$$
\begin{aligned}
& G^* \\
&= \frac{4}{\ln(g^*)} \\
&\cong 3,33.
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$G^* \cong \ln(3,33).$$

Questão 8 (Prova 1 de 2010): Em uma economia competitiva há 1000 indivíduos, cada um deles com uma dotação de 1 unidade de terra, que pode ser alocada para a produção de 2 bens, girassol ou milho. As preferências do indivíduo i são caracterizadas por:

$$U^i = \ln(x_g^i) + 2\ln(x_m^i) + \ln\left(\frac{y_g}{1000}\right),$$

sendo x_g^i o consumo de girassol pelo consumidor i, x_m^i o consumo de milho pelo indivíduo i e y_g a produção total de girassol. Note que, dada a beleza dos campos de girassol, sua produção gera uma externalidade positiva sobre os indivíduos. No entanto, cada consumidor não tem poder de decisão sobre a quantidade agregada de girassol produzida, y_g. As tecnologias disponíveos para a produção de girassol e milho são simples, dadas por:

$$y_g = t_g$$

e

$$y_m = t_m,$$

sendo y_m a produção total de milho, t_m o montante de terra usado na produção de milho e t_g o montante total de terra usado na produção de girassol.

(a) Escreva o problema que determina as alocações eficientes de terra e consumo. Determine a alocação eficiente simétrica, na qual todos os indivívuos têm o mesmo consumo (e, portanto, pesos de Pareto iguais).

Para achar a alocação eficiente, vamos montar o problema de Pareto (geral, imporemos a condição de simetria posteriormente):

$$\max_{(\{x_g^i\}_{i=1}^{1000}, \{x_m^i\}_{i=1}^{1000}, t_g, t_m)} \sum_{i=1}^{1000} \lambda_i \left[\ln(x_g^i) + 2\ln(x_m^i) + \ln\left(\frac{y_g}{1000}\right)\right]$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{1000} x_g^i = y_g = t_g;$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_m^i = y_m = t_m;$$

$$t_g + t_m = 1000.$$

A fim de obter a alocação eficiente simétrica, impomos iguais pesos de Pareto para todos os indivíduos: $\lambda_i = \lambda, i = 1, 2, ..., 1000$. Além disso, a simetria também implica que todos os consumidores consomem a mesma quantidade de cada bem, o que por sua vez significa que $\sum_{i=1}^{1000} x_g^i = 1000 x_g^i$. Assim, podemos escrever o problema de Pareto simétrico como:

$$\max_{\{x_g^i\}_{i=1}^{1000}, \{x_m^i\}_{i=1}^{1000}, t_g, t_m} \lambda \sum_{i=1}^{1000} \left[\ln\left(x_g^i\right) + 2\ln\left(x_m^i\right) + \ln\left(\frac{1000 x_g^i}{1000}\right) \right]$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{1000} x_g^i = y_g = t_g; \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_m^i = y_m = t_m; \tag{26}$$

$$t_g + t_m = 1000. \tag{27}$$

As condições de primeira ordem ficam:

$$x_g^i : \lambda\left(\frac{1}{x_g^i} + \frac{1}{x_g^i}\right) = \mu_1; \tag{28}$$

$$x_m^i : \lambda\left(\frac{2}{x_m^i}\right) = \mu_2; \tag{29}$$

$$t_g : \mu_1 = \mu_3; \tag{30}$$

$$t_m : \mu_2 = \mu_3. \tag{31}$$

(30)→(28):

$$\lambda\left(\frac{2}{x_g^i}\right) = \mu_3; \tag{32}$$

(31)→(29):

$$\lambda\left(\frac{2}{x_m^i}\right) = \mu_3. \tag{33}$$

Logo, igualando (32) e (33), temos que $x_g^i = x_m^i \rightarrow \sum_{i=1}^{1000} x_m^i = \sum_{i=1}^{1000} x_g^i \rightarrow t_g = t_m$. O único modo de termos $t_g = t_m$é com $t_g = t_m = 500$. Com isso, temos que $x_g^i = 0,5$ e $x_m^i = 0,5$.

↳ 500/1000

(b) Determine o equilíbrio competitivo (preços e alocações). Mostre que tal alocação não é eficiente. Como essa alocação se compara à alocação eficiente? Dê uma intuição para esta comparação. *Dica:* Use terra como numerário.

Para derivar o equilíbrio competitivo, vamos fazer o problema do consumidor e o problema da firma, com cada consumidor agindo individualmente, e o mesmo valendo para as firmas.

O problema do consumidor i é:

$$\max_{x_g^i, x_m^i} \ln\left(x_g^i\right) + 2\ln\left(x_m^i\right) + \ln\left(\frac{y_g}{1000}\right)$$

sujeito a:

$$p_g x_g^i + p_m x_m^i = 1.$$

Note que agora $y_g$não é uma variável de escolha do problema.

A condição de primeira ordem fica:

$$x_g^i : \frac{1}{x_g^i} = \lambda p_g; \tag{34}$$

$$x_m^i : \frac{2}{x_m^i} = \lambda p_m. \tag{35}$$

Fazendo (34)/(35), temos:

$$\frac{x_m^i}{2x_g^i} = \frac{p_g}{p_m} \Rightarrow p_m x_m^i = 2p_g x_g^i. \tag{36}$$

Substituindo na restrição orçamentária temos:

$$3p_g x_g^i = 1 \rightarrow x_g^i = \frac{1}{3p_g}.$$

Com isto, $x_m^i = \frac{2}{3p_m}$.

O problema da firma produtora de Girassol é (note que já substituímos $y_g = t_g$ e $p_t = 1$):

$$\max_{t_g} p_g t_g - t_g.$$

A condição de primeira ordem resulta em $p_g = 1$. De modo análogo, temos que $p_m = 1$ também. Assim, $x_g^i = \frac{1}{3}$, $x_m^i = \frac{2}{3}$, para todo i. Além disso, $y_g = \frac{1000}{3}$ e $y_m = \frac{2000}{3}$. Para comparar com a alocação eficiente, vejamos o nível de utilidade que esta alocação gera ao consumidor, comparando com o nível de utilidade do item (a):

$$U^i\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 500\right) = -2,773 > U^i\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1000}{3}\right) = -3,008.$$

Deste modo, o equilíbrio competitivo gera uma situação pior para todos os indivíduos, ou seja, o equilíbrio competitivo não é eficiente de Pareto. Isto ocorre pois no equilíbrio competitivo, o consumidor não internaliza a externalidade positiva da produção de Girassol.

(c) Mostre que um subsídio de 100% sobre o valor da produção de girassol, financiado por um imposto *lump-sum* para os consumidores, gerará eficiência em uma alocação competitiva. Qual será o montante de impotto *lump-sum* pago por cada um dos indivíduos?

Um imposto de 100% sobre a produção de Girassol faz com que o preço do Girassol vá para o nível $p_g^{'} = 2p_g$. Com isso, o problema da firma produtora de Girassol passa a ser:

$$\max_{t_g} 2p_g t_g - t_g.$$

→ Pm

A condição de primeira ordem resulta em $p_g = 0,5$. O problema da firma produtora de milho não se altera. Do problema do consumidor, tínhamos a equação (12). Substituindo $p_g = 0,5$ em (12), temos:

$$\begin{aligned} x_g^i &= x_m^i \rightarrow y_g = y_m = t_g = t_m = 500 \\ &\rightarrow x_m^i = x_g^i = 0,5. \end{aligned}$$

Como o montante do imposto é de 100% do valor da produção de Girassol, ou seja, é igual a $p_g t_g$, o montante Lump-sum a ser pago por todos os individuos será:

$$p_g t_g = \frac{500(0,5)}{1000} = 0,25.$$

Note que a renda dos individuos sera de 0,75 (Substitua os valores na Restrição Orçamentária e note isto.

Questão 9 (Prova 1 de 2010): Suponha uma economia com N indivíduos indexados por $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ e dois bens, x e z. O bem x é público e o bem z é privado. A utilidade do indivíduo i é dada por $U^i = U^i\left(x, z_c^i\right)$, onde x e z_c^i denotam as quantidade de x e z consumidas pelo indivíduo i. Cada indivíduo i possui uma dotação inicial do bem z dada por z^{*i}. A função de produção do bem público x é dada por $x = f\left(\sum_{i=1}^{N} z_d^i\right)$, onde z_d^i denota a quantidade a quantidade do bem z empenhada na produção de x pelo indivíduo i.

(a) Explique porque o bem x consumido pelo indivíduo i não é indexado por i.

Pela definição de bem público, o mesmo nível de x deve ser consumido por todos os indivíduos da sociedade, de modo que não faz sentido indexar o consumo deste bem por individuo, ao mesmo tempo em que x dve aparecer na função de utilidade de cada um.

(b) Monte e resolva o problema de Pareto desta economia. Mostre qual é a condição para haver produção eficiente do bem público.

O problema de Pareto é:

$$\max_{\left(\{z_c^i\}_{i=1}^N, \{z_d^i\}_{i=1}^N, x\right)} \lambda_1 U^1\left(x, z_c^1\right) + \lambda_2 U^2\left(x, z_c^2\right) + \ldots + \lambda_N U^N\left(x, z_c^N\right)$$

sujeito a:

$$x = f\left(\sum_{i=1}^{N} z_c^i\right);$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(z_c^i + z_d^i\right) = \sum_{i=1}^{N} z^{i*}.$$

Montando o Lagrangeano, temos:

$$\begin{aligned} L &= \lambda_1 U^1\left(x, z_c^1\right) + \lambda_2 U^2\left(x, z_c^2\right) + \ldots + \lambda_N U^N\left(x, z_c^N\right) + \\ &+\mu\left[f\left(\sum_{i=1}^{N} z_c^i\right) - x\right] + \gamma\left[\sum_{i=1}^{N} z^{i*} - \sum_{i=1}^{N}\left(z_c^i + z_d^i\right)\right]. \end{aligned}$$

A condição de primeira ordem fica:

$$x : \lambda_1 \frac{\partial U^1(x, z_c^1)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial U^2(x, z_c^2)}{\partial x} + \ldots + \lambda_N \frac{\partial U^N(x, z_c^N)}{\partial x} - \mu = 0; \tag{37}$$

$$z_c^i : \lambda_i \frac{\partial U^i}{\partial z_c^i} = \gamma; \tag{38}$$

$$z_d^i : \mu f' = \gamma. \tag{39}$$

Substituindo (38) e (39) em (37), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\frac{\partial U^i}{\partial x}}{\frac{\partial U^i}{\partial z_c^i}} = \frac{1}{f'}.$$

Ou seja, a produção eficiente de bem privado se dá no ponto em que a soma da Utilidade marginal relativa (em relação à utilidade marginal do bem privado) do bem público para todos os individuos (ou seja, o benefício marginal do bem público medido em termos do benefício marginal do bem privado) é inversamente proporcional à produtividade da produção do bem público. Isto ocorre porque o bem privado é usado como insumo para a produção de bem público, e portanto para se produzir f' unidades adicionais de bem público, deve-se abrir mão de uma 1 unidade do bem privado, e assim sendo, enquanto o benefício marginal total (para todos os indivíduos, uma vez que é um bem público) do bem público for maior do que a soma dos benefícios marginais do bem privado vale a pena continuar produzindo este bem em detrimento de cada indivíduo consumir o bem privado.

(c) A curva de demanda agregada para bens privados é obtida através da soma horizontal (i.e. para um mesmo preço devemos somar as quantidades consumidas do bem privado por cada indivíduo). A demanda por um bem público também pode ser obtida desta forma? Justifique sua resposta.

(ver Nicholson, pág. 682): No caso de bens privados, a curva de demanda obtida por meio da soma horizontal das demandas individuais reporta de modo correto o valor marginal do bem para a sociedade: uma unidade adicional poderia ser consumida por alguém que atribua a ela o valor que corresponde ao preço de mercado. No caso de bens públicos, o valor de uma unidade adicional é, na verdade, a soma dos valores que cada indivíduo atribui a tal unidade, uma vez que todos os individuosirão se beneficiar com esta unidade. Portanto, nesse caso, as demandas individuais deveriam ser somadas verticalmente: o preço nessa curva de demanda "vertical" reflete, parta cada nível de produção, o quanto uma unidade adicional do bem público seria valorizada por todos os consumidores, conjuntamente. A curva de mercado usual (soma horizontal) não reflete essa valoração marginal total.