



Lista de Exercícios de Cálculo II (LOB1004) - 6

Profa. Responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

Assunto referente: Derivada direcional

1- Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(1,7)$ e $D(6,15)$. A derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AB}$ é 3 e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$. **R.: $\frac{327}{\sqrt{13}}$**

2- Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0,02x^2 - 0,001y^3$, onde x , y e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à boia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique. **R.: 3,92 m**

3- a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em x na direção oposta do vetor gradiente, ou seja, na direção de $-\nabla f(x)$.
b) Utilize o resultado do item (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2, -3)$. **R.: $\text{Grad}f(2, -3) = (-12, 92)$**

4- A temperatura é $T(x, y)$ graus em qualquer ponto de uma placa retangular situado no plano xy e $T(x, y) = 3x^2 + 2xy$. A distância é medida em metros.
a) Determinar a taxa de variação máxima no ponto $(3, -6)$ da placa. **R.: $6\sqrt{2}$**
b) Determinar a direção e sentido em que a taxa de variação é máxima em $(3, -6)$.

5- O potencial elétrico é $V(x, y)$ volts em qualquer ponto do plano xy e $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$. A distância é medida em metros.

a) Determinar a taxa de variação do potencial no ponto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, na direção do vetor

unitário $\cos \frac{\pi}{6} \vec{i} + \sin \frac{\pi}{6} \vec{j}$. **R.: $\frac{\partial V}{\partial u} \left(0, \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ volt}$**

b) Determinar a direção e sentido e o valor da taxa de variação máxima de V em $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. **R.: $\vec{j}, 2$**



6- Seja $f(x, y) = x + 2y + 1$. Determinar a reta contida no gráfico de f , passando pelo ponto $(1, 1, 4)$ e que forma com o plano xy ângulo máximo. R.:

$$(x, y, z) = (1, 1, 4) + \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \sqrt{5} \right)$$

7- Calcule a derivada direcional da função dada, no ponto e direção $\vec{w}$ indicados.

a) $f(x, y, z) = xyz$ em $(1, 1, 1)$ na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ R.: $\left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$

b) $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1, 2, -1)$ e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ R.: $\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$

8- Considere que o sistema xyz esteja localizado no espaço, de modo que a temperatura T no ponto (x, y, z) seja dada por $T = \frac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$.

a) Determinar a taxa de variação de T em relação à distância no ponto $P(1, 3, -2)$ e na direção do vetor $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. R.: 2,4

b) Em que direção, a partir de P , T aumenta mais rapidamente? Qual a taxa máxima de variação de T em P ? R.: 3,8