

PMR3409 – CONTROLE E II

EXPERIÊNCIA 4

PROJETO DE CONTROLADOR DE VELOCIDADE TIPO PI

1. INTRODUÇÃO

Nesta experiência, será realizado o projeto de um controlador PI para controle da velocidade angular do motor CC, cujo modelo foi identificado na Experiência 2 e 3.

Na Seção 2 é apresentada uma introdução sobre controladores tipo PID em tempo contínuo. Na Seção 3 são apresentadas duas técnicas de projeto de controladores em tempo contínuo e na Seção 4 são apresentadas algumas considerações práticas sobre implementação e funcionamento de controladores tipo PID. A Seção 5 apresenta o roteiro experimental.

2. Controladores PID

2.1. Controlador PID em tempo contínuo

A equação tradicional que representa um controlador tipo PID no domínio do tempo contínuo é dada por:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (1)$$

onde u é a variável de controle e e é o erro de controle ($e = r - y$). A variável de controle u é portanto a soma de três termos: O termo P (que é proporcional ao erro), o termo I (que é proporcional à integral do erro) e o termo D (que é proporcional à derivada do erro). Os parâmetros do controlador são proporcionais ao ganho K , à constante de tempo integral T_i e à constante de tempo derivativa T_d .

Ação Proporcional

No caso de uma ação de controle puramente proporcional, a equação (1) de controle se reduz a:

$$u(t) = Ke(t) + u_b. \quad (2)$$

A ação de controle é simplesmente proporcional ao erro de controle e . A variável u_b é um *offset* ou um *reset*. Quando o erro de controle e é zero, a variável de controle assume o valor $u(t) = u_b$. O *offset* u_b é frequentemente escolhido como $(u_{\max} + u_{\min})/2$, mas pode ser algumas vezes ajustado manualmente tal que o erro estacionário de controle seja zero para um determinado valor de referência.

Análise estática. Muitas propriedades do controle proporcional podem ser entendidas através do seguinte argumento baseado apenas em considerações estáticas. Considere a malha de realimentação, ilustrada na Figura 1, que é composta de um processo e um controlador. Assuma que o controlador tem ação proporcional e que o processo é modelado através do modelo estático:

$$x = K_p(u + l), \quad (3)$$

onde x é a variável de processo, u é a variável de controle, l é um distúrbio de carga e K_p é o ganho estático do processo. As seguintes equações podem ser obtidas do diagrama de blocos:

$$y = x + n, \quad (4)$$

$$y = K_p(u + l), \quad (5)$$

$$u = K(r - y) + u_b, \quad (6)$$

onde n é um ruído inserido no processo durante a medição da variável de saída.

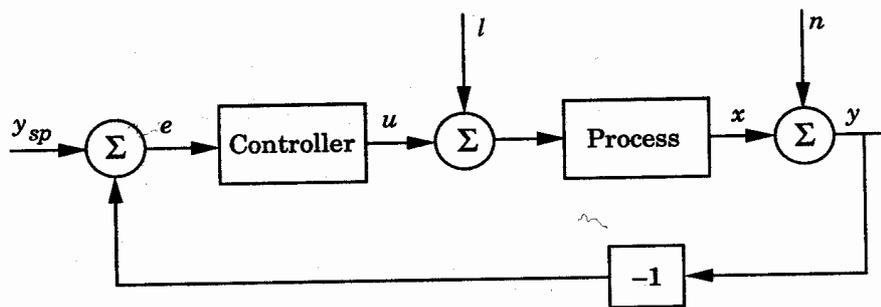


Figura 1: Sistema de controle em malha fechada.

A partir destas equações, é possível estabelecer relações entre a variável de processo x , o valor de referência r , o distúrbio de carga l , e o ruído de medida n :

$$x = \frac{KK_p}{1 + KK_p}(r - n) + \frac{K}{KK_p}(l + u_b) \quad (7)$$

O Produto KK_p é um número adimensional denominado Ganho de Malha. Muitas propriedades interessantes podem ser deduzidas a partir da equação (7):

- Inicialmente assuma que n e u_b são zero. Então o ganho de malha deve ser grande para que o valor da variável de saída x fique próximo ao valor de referência r ;
- Um ganho de malha grande também permite que o sistema se torne insensível ao distúrbio de torque l .
- Entretanto, se o ruído de medida n for diferente de zero, ele pode influenciar o valor da saída do processo da mesma maneira que o valor de referência r ;
- Para evitar que o sistema seja sensível ao ruído de medida n , o ganho de malha não pode ser escolhido muito grande.
- Além disso, o *offset* do controlador u_b influencia o sistema da mesma forma que um distúrbio de torque.

Dessa forma, o projeto do controlador é uma solução de compromisso entre diferentes objetivos de controle, e não existe uma resposta simples para qual o valor mais adequado para o ganho de malha. Isto irá depender de qual objetivo de controle é escolhido como mais importante.

Também pode ser determinado pela equação (7), que normalmente haverá um erro estacionário ($e \neq 0$ para $t \rightarrow +\infty$) com a adoção de controle proporcional. Isto pode ser deduzido intuitivamente observando a equação (7) que o erro de controle é zero apenas quando $u = u_b$ em regime estacionário. O erro, portanto, pode ser feito zero apenas para um determinado ponto de operação através de uma escolha adequada para o *offset*, u_b , ou quando $u_b = 0$.

A análise estática apresentada acima é baseada no fato de que o processo pode ser descrito por um modelo estático. Isto deixa de fora várias propriedades importantes da dinâmica de malha fechada do sistema. A mais importante é que o sistema será normalmente

instável para ganhos de malha grandes. Na prática, o ganho de malha máximo é determinado através da consideração das características dinâmicas do processo.

Um exemplo típico de controle proporcional está ilustrado na Figura 2 para um processo de função de transferência $G(s)=1/(s+1)^3$. A figura mostra o comportamento da saída do processo y e o sinal de controle u após uma mudança no valor de referência na forma de degrau unitário. O termo de *offset* u_b , o distúrbio de carga l e o ruído de medida n são todos zeros para as simulações. Com um ganho do controlador $K=1.0$ e o ganho estático do processo $K_p=1.0$, o erro é portanto 50%. A figura mostra que o erro estacionário, e , diminui com o aumento do ganho do controlador. Note também que a resposta se torna mais oscilatória com o aumento do ganho do controlador.

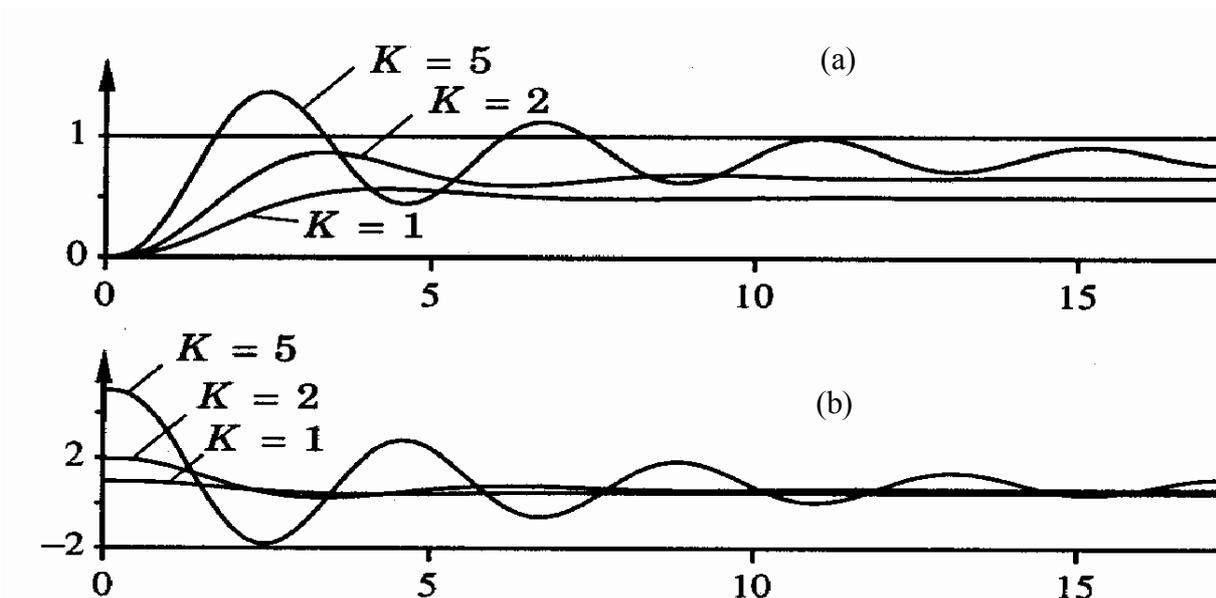


Figura 2: Simulação de um sistema de controle em malha fechada com controle proporcional. (a) sinal de referência saída do sistema; (b) entrada do sistema.

Ação Integral

A função principal da ação integral é assegurar que a saída do processo y atinja o mesmo valor que o valor de referência r em regime estacionário. Com um controle proporcional normalmente existe um erro de regime estacionário diferente de zero. Com uma ação integral, um erro positivo vai sempre levar a um aumento do sinal de controle, e um erro negativo vai sempre levar a uma diminuição do sinal de controle independente do tamanho do erro.

Os seguintes argumentos mostram que o erro estacionário será sempre zero com a ação de controle integral. Assuma que o sistema esteja em **regime estacionário** com uma ação de controle u_0 e um erro constante e_0 . Segue da equação (1) que o sinal de controle é dado por:

$$u_0 = K \left(e_0 + \frac{e_0}{T_i} t \right). \quad (8)$$

Desde que $e_0 \neq 0$, isto claramente mostra que o sinal de controle u_0 não pode ser constante. Um controlador com ação integral vai sempre fornecer um erro estacionário nulo.

As propriedades da ação de controle integral estão ilustradas na Figura 3, que ilustra a simulação de um processo de função de transferência $G(s)=1/(s+1)^3$ com controlador PI. O Ganho proporcional K é igual a 1.0 em todas as curvas, e o tempo integral é mudado. O caso $T_i=\infty$ corresponde a um controlador proporcional puro. Este caso é idêntico ao caso $K=1.0$ na Figura 2, onde o erro estacionário é de 50%. O erro estacionário é removido com valores finitos de T_i . Para valores grandes de tempo de integração, a resposta do sistema vai vagarosamente em direção ao valor de referência. O processo é aproximadamente exponencial com constante de tempo T_i/KK_p . O processo é mais rápido para valores menores de T_i e é também mais oscilatório.

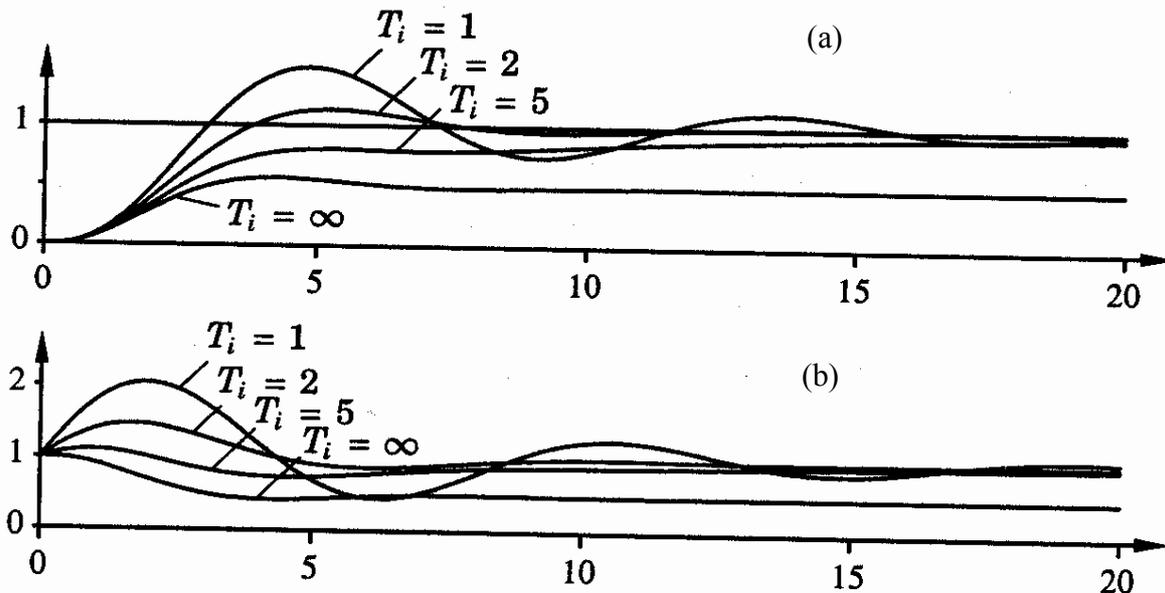


Figura 3: Simulação de um sistema de controle em malha fechada com controlador PI. (a) sinal de referência e saída do sistema; (b) entrada do sistema.

Ação Derivativa

A proposta da ação derivativa é o aumento da estabilidade da malha fechada. A razão de uma possível instabilidade pode ser descrita intuitivamente como se segue. Devido à dinâmica do processo, levará algum tempo até que o efeito da mudança na variável de controle u seja notado na saída do processo y . Portanto, o sistema de controle passará a agir tardiamente para uma correção de erro. A ação de um controlador com uma ação de controle proporcional e derivativa pode ser interpretada como proporcional à saída predita do processo,

onde a predição é feita extrapolando o erro através da tangente à curva de erro. A estrutura básica de um controlador PD é dada por:

$$u(t) = K \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right). \quad (9)$$

A expansão em Série de Taylor de $e(t+T_d)$ fornece:

$$e(t+T_d) \cong e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (10)$$

A ação de controle é portanto proporcional à estimativa do erro de controle no tempo $t+T_d$, onde esta estimativa é obtida através de extrapolação linear.

As propriedades da ação de controle derivativa estão ilustradas na Figura 4, que mostra a simulação de um sistema de malha fechada com um processo de função de transferência $G(s)=1/(1+s)^3$ e um controlador PID. O ganho do controlador e o tempo de integração são mantidos constantes, $K=3$ e $T_i=2$, e o tempo derivativo T_d é mudado. Para $T_d=0$ tem-se um controlador PI puro. O sistema de malha fechada é oscilatório para os parâmetros escolhidos. Inicialmente, o amortecimento aumenta com o aumento do tempo derivativo, mas diminui novamente quando o tempo derivativo se torna bastante grande.

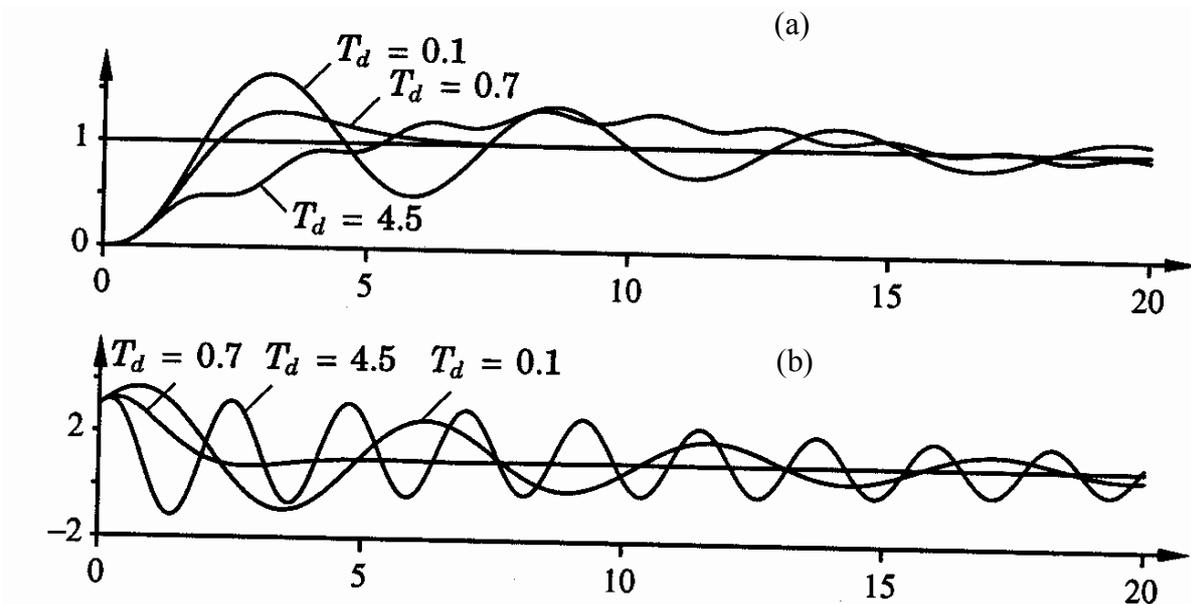


Figura 4: Simulação de um sistema de controle em malha fechada com controlador PID. (a) sinal de referência e saída do sistema; (b) entrada do sistema.

3. Técnicas de projeto de controladores PID em tempo contínuo

3.1. Pólos dominantes

Qualquer sistema de ordem n pode ser considerado como sendo composto por subsistemas de 1ª e de 2ª ordens. Além disso, para o projeto de controladores PID é possível utilizar o conceito de pólos dominantes. Assim, pode-se considerar apenas os pólos que dominam a resposta do sistema, ou seja, aqueles que fornecem as maiores constantes de tempo para o sistema. Dentro deste contexto, o sistema resultante em malha fechada é **aproximado** como sendo um sistema de 1ª ou de 2ª ordem. Quanto menor forem as partes reais dos pólos dominantes em relação aos outros pólos melhor a aproximação.

Tanto para sistemas de 1ª como para de 2ª ordens, é possível correlacionar facilmente as características transitórias no domínio do tempo com os pólos do sistema. Assim, dadas as especificações transitórias e estacionária do sistema de controle, é possível escolher os parâmetros do controlador de tal forma a alocar os pólos numa região que satisfaça as especificações desejadas.

A seguir é apresentado uma análise da resposta transitória de sistemas de 2ª ordem seguido de uma apresentação do método do lugar das raízes que pode ser utilizado para o projeto do controlador. A resposta transitória de sistemas de 1ª ordem foi apresentada na apostilha da Experiência 3 e portanto não será repetida aqui.

Resposta transitória a degrau de um sistema de 2ª ordem

Um sistema de segunda ordem pode ser descrito pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (22)$$

onde, $Y(s)$ é a saída do sistema, $R(s)$ é a entrada do sistema, ω_n é a frequência natural do sistema e ξ é o grau de amortecimento. A resposta a degrau deste sistema pode ser categorizada em três tipos distintos (veja Figura 5):

- Caso Sub-amortecido ($0 < \xi < 1$): para este caso, a função de transferência do sistema, $G(s)$, pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)}, \quad (23)$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ é a frequência de oscilação do sistema, também chamada de frequência natural amortecida. Para uma entrada a degrau a resposta no tempo para a saída do processo, y , pode ser escrita como:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right), \text{ para } t \geq 0 \quad (24)$$

Como a frequência das oscilações transitórias é a frequência natural amortecida, ω_d , ela varia com o grau de amortecimento ξ . Se o grau de amortecimento ξ é igual a zero, a resposta se torna não amortecida, oscilando indefinidamente.

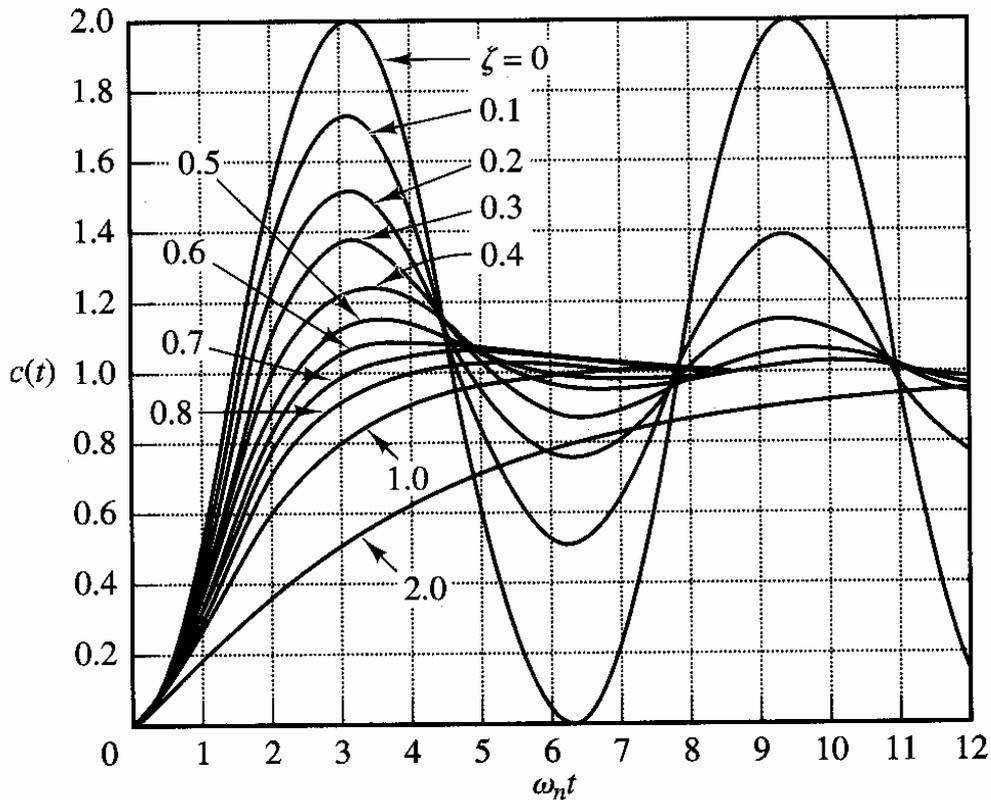


Figura 5: Resposta a degrau de um sistema de 2ª ordem.

- Caso de Amortecimento Crítico ($\xi=1$): para este caso a função de transferência $G(s)$ pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}. \tag{25}$$

Neste caso os dois pólos do sistema são reais e iguais a $-\omega_n$.

Para uma entrada na forma de degrau, a resposta no tempo para a saída do processo y pode ser escrita como:

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad \text{para } t \geq 0. \tag{26}$$

- Caso super-amortecido ($\xi > 1$): neste caso os dois pólos do sistema tem as partes reais negativas e distintas. A função de transferência $G(s)$, neste caso, pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})}, \quad (27)$$

Para uma entrada a degrau, a resposta no tempo para a saída do processo y pode ser escrita como:

$$y(t) = 1 - e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0. \quad (28)$$

Definição das especificações da resposta transitória. Em muitos casos práticos, as características de desempenho de sistemas de controle são especificados no domínio do tempo através da resposta transitória a degrau unitário.

A resposta transitória de um sistema de controle frequentemente exhibe oscilações com amortecimento até chegar ao regime permanente. Ao especificar as características de resposta transitória a uma entrada na forma de degrau unitário, é comum especificar as seguintes grandezas:

1. Tempo de atraso, t_d : o tempo de atraso é o tempo requerido para a resposta do sistema alcançar a metade do valor final pela primeira vez.
2. Tempo de subida, t_r : o tempo de subida é o tempo requerido para a resposta do sistema subir de 10% a 90%, 5% a 95% ou 0% a 100% do seu valor final. Para sistemas sub-amortecidos de 2ª ordem, a especificação de 0% a 90% é normalmente utilizada. Para sistemas super-amortecidos de 2ª ordem ou sistemas de 1ª ordem, o valor de 0% a 90% é mais comumente utilizado.
3. Instante do de pico, t_p : o instante de pico é o tempo requerido para a resposta atingir o primeiro pico do sobressinal.
4. Máximo sobressinal (percentual), M_p : o máximo sobressinal é definido como o maior valor percentual do pico em relação ao valor final. Este valor pode ser definido como:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%. \quad (29)$$

5. Tempo de assentamento, t_s : o tempo de assentamento é o tempo requerido para a resposta atingir um valor dentro de um intervalo de $\pm 2\%$ do valor final (as vezes utiliza-se o valor de $\pm 5\%$). O tempo de assentamento está obviamente relacionado à maior constante de tempo do sistema.

A Figura 6 apresenta graficamente estas especificações através da resposta transitória de um sistema de 2ª ordem.

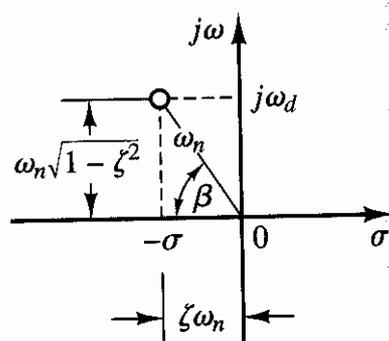
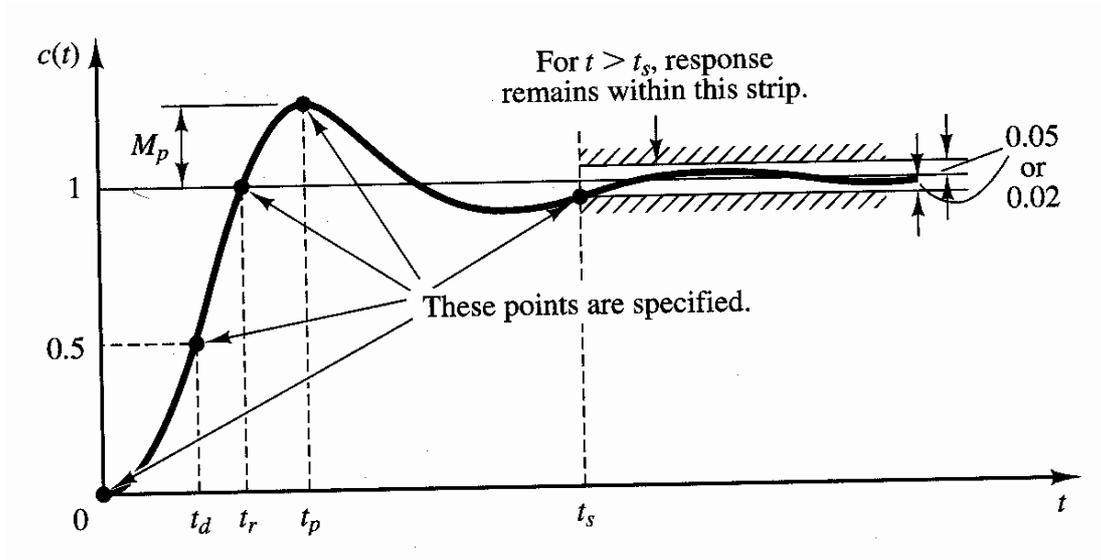


Figura 6: Resposta a degrau e especificações transitórias para resposta a degrau.

Para um sistema de 2ª ordem tem-se as seguintes relações, ver Figura 6:

- Freqüência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} . \tag{30}$$

- Ângulo β :

$$\beta = \ar \cos \left(\frac{\sigma}{\omega_n} \right) . \tag{31}$$

- Grau de amortecimento:

$$\xi = \cos(\beta) = \frac{\sigma}{\omega_n} . \tag{32}$$

Experiência 4 -

- Freqüência natural amortecida:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} . \quad (33)$$

- Tempo de assentamento 2%:

$$t_s \cong \frac{4}{\xi \omega_n} . \quad (34)$$

Um determinado valor fixo de tempo de assentamento t_s define uma reta vertical no plano complexo s já que $\sigma = \xi \omega_n$. Usualmente procura-se relações de desigualdade do tipo $t_s \leq \alpha$ (onde α é uma constante). Esta relação de desigualdade define então um lugar geométrico equivalente a um semiplano onde a reta vertical que o delimita é dada por:

$$\sigma = \frac{4}{\alpha} . \quad (35)$$

O semiplano delimitado por σ é ilustrado na Figura 7.

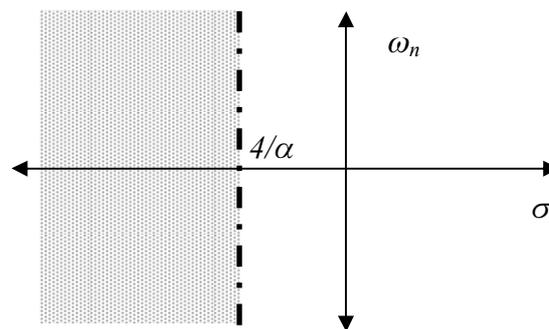


Figura 7: Semiplano definido por t_s .

- Tempo de subida:

$$t_r \cong \frac{\pi - \beta}{\omega_d} . \quad (36)$$

- Máximo sobressinal:

$$M_p \cong \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) . \quad (37)$$

Experiência 4 -

O máximo sobressinal tem conexão direta com o grau de amortecimento ξ . Em geral, a especificação de sobressinal em um sistema de controle é feito através de uma desigualdade do tipo:

$$M_p \leq \gamma, \quad (38)$$

onde γ é uma constante. Através da equação (37) pode-se calcular quais os valores de ξ que satisfazem a desigualdade dada pela equação (38), ou seja:

$$\xi \geq \sqrt{\frac{\ln^2 \gamma}{\pi^2 + \ln^2 \gamma}}. \quad (39)$$

Como $\xi = \cos \beta$ então a região que satisfaz a desigualdade original corresponde a uma região com um ângulo:

$$\beta \leq \arccos \sqrt{\frac{\ln^2 \gamma}{\pi^2 + \ln^2 \gamma}}. \quad (40)$$

A Figura 8 ilustra esse lugar geométrico.

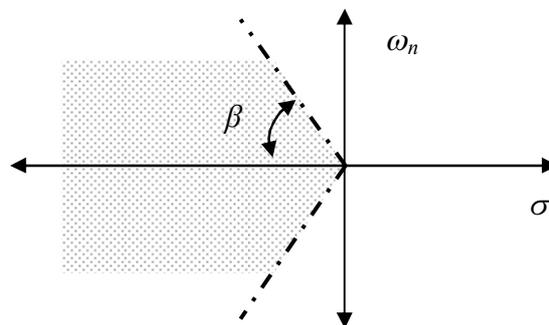


Figura 8: Pólos de um sistema de 2ª ordem no plano complexo.

No caso de sistemas de 1ª ordem, tem-se um único pólo no eixo real. Assim, para caracterizar a sua resposta dinâmica pode-se usar t_s ou t_r , que estão relacionados com a constante de tempo do sistema, T , da seguinte forma:

$$t_s = 4T; \quad (41)$$

$$t_r \approx 2,3T. \quad (42)$$

Nota-se que as especificações de resposta transitória para um sistema de 2ª ordem são mais amplas do que para um sistema de 1ª ordem. Além disso, as especificações de resposta transitória de um sistema de 2ª ordem engloba todas as especificações de um sistema de primeira ordem, fato fácil de ser observado se for lembrado que o pólo de um sistema de 1ª

ordem é localizado em $\sigma = -1/T$. Assim, na prática utiliza-se somente as características de resposta transitória de sistemas de 2ª ordem para definir o lugar geométrico, ou **região desejada**, dos pólos da malha fechada que satisfazem as especificações

Lugar das Raízes

Considere o sistema apresentado na Figura 9. A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}, \quad (43)$$

onde $G(s)$ representa a planta e $H(s)$ o compensador.

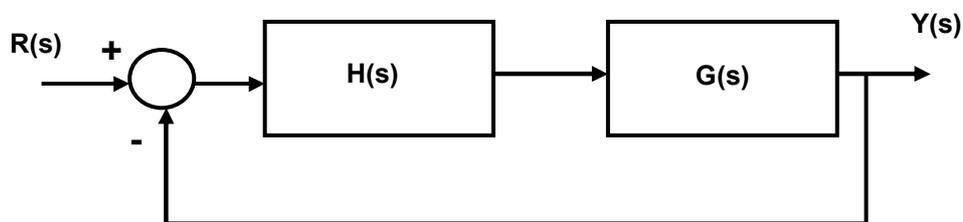


Figure 9: Diagrama esquemático de um sistema de controle em malha fechada.

A equação característica para este sistema é obtida igualando-se o denominador a zero, ou seja:

$$1 + G(s)H(s) = 0. \quad (44)$$

Os valores de s que satisfazem esta condição são as raízes da equação característica ou os pólos da malha fechada. Em geral deseja-se obter os pólos da malha fechada em função do ganho do controlador. O gráfico que fornece os pólos da malha fechada em função do ganho é chamado de lugar das raízes.

Para se obter o lugar das raízes de uma malha fechada primeiramente precisa-se reescrever a equação (44) de forma que o ganho do controlador apareça explicitamente. Assim, para uma planta de primeira ordem do tipo:

$$G_o(s) = \frac{K_o}{Ts + 1} \quad (45)$$

e um controlador PI:

$$H(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad (46)$$

Obtém-se:

$$1 + G_{\omega}(s)H(s) = 1 + \frac{K(1 + T_i s)}{T_i s} \frac{K_{\omega}}{(Ts + 1)} = 0. \quad (47)$$

Antes que se possa aplicar o método do lugar das raízes na equação acima é preciso que todas os parâmetros com exceção do ganho K sejam especificados, ou seja, **deve-se definir a localização do zero do compensador**, pela escolha de T_i , para que o único parâmetro variável seja o ganho K . Assim, a equação acima deve ser escrita na seguinte forma:

$$1 + K \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = 0, \quad (48)$$

onde os coeficientes a_i e b_i são constantes que dependem de T , T_i e K_w .

Esta é a função de transferência para a qual deve ser feito o lugar das raízes. A melhor localização do zero do compensador PI, para a nossa planta, é à esquerda do pólo da planta em $-1/T$.

Com o gráfico do lugar das raízes feito, basta verificar o ganho K referente à posição dos pólos da malha fechada que satisfazem as especificações do sistema de controle.

Um exemplo. Suponha que se deseja obter o lugar das raízes de um sistema composto de uma planta de 1a. ordem e um controlador PI. Os parâmetros referentes à planta e o tempo de integração T_i escolhido para o controlador PI são os seguintes:

- $K_{\omega}=1.0$;
- $T=0.35$;
- $T_i=0.25$.

Para estes parâmetros, o gráfico do lugar das raízes obtido está ilustrado na Figura 10. No gráfico do lugar das raízes, pode-se observar o local onde se encontram os pólos de malha fechada, a medida que K varia de zero a infinito. Deve-se observar que, quando $K=0$ os pólos da malha fechada são os pólos da malha aberta, ou seja, $s = 0$ e $s = -1/T$. A medida que K aumenta, os dois pólos se aproximam até se encontrar. Depois se separam em direções distintas, caminhando sobre um círculo. Quando se encontram novamente do outro lado do círculo, tomam direções opostas. Sendo que um vai em direção ao zero dado por $s=-1/T_i$ e o outro caminha em direção ao menos infinito sobre o eixo real. Para cada valor de K tem-se um par de pólos no domínio s . Na Figura 10 está evidenciado um ponto sobre a curva, juntamente com um quadrado onde está descrita a grandeza relacionada àquele ponto particular.

Obviamente, quando deseja-se obter um ganho K do controlador que satisfaça as especificações escolhidas para o sistema de controle, deve-se procurar as raízes que estejam simultaneamente sobre o gráfico do lugar das raízes e que satisfaçam as especificações dadas e traduzidas em termos de uma região desejada para os pólos da malha fechada.

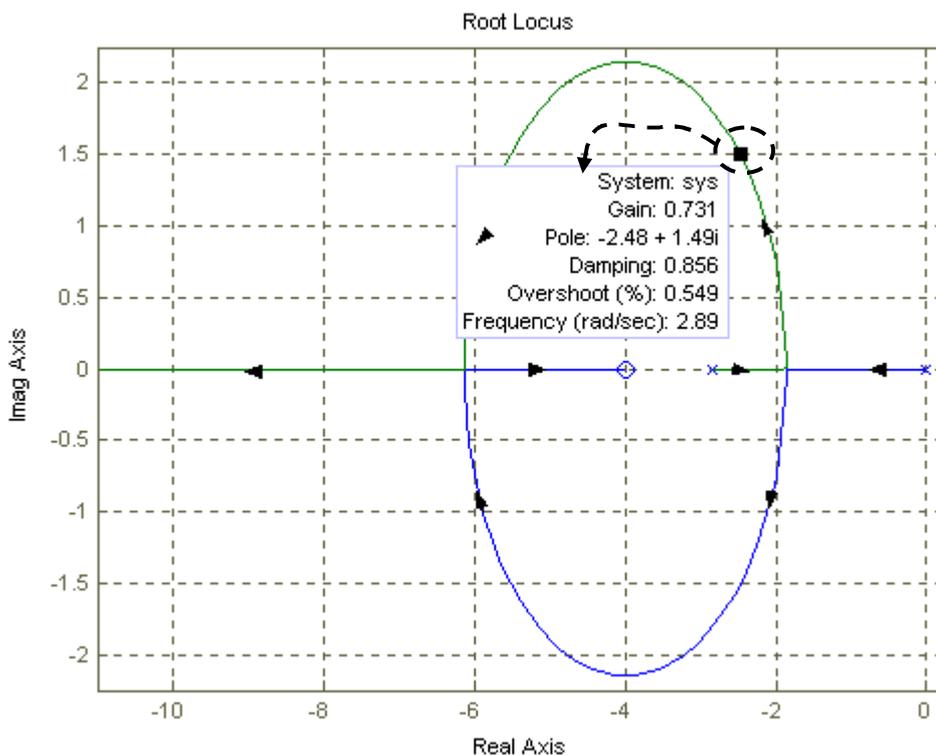


Figura 10: Gráfico do lugar das raízes – Sistema de 1ª ordem + Controlador PI.

É importante ter em mente que este método é aproximado, já que as equações (30) a (37) valem para um sistema de 2ª ordem do tipo dado pela equação (22), ou seja, um sistema sem zero. No caso do motor, que é uma planta de 1ª ordem em conjunto com o controlador PI existe a presença de um zero em $s=-1/T_i$.

3.2. Uma outra maneira – Alocação de pólos

Uma outra maneira de projetar um controlador PI para um sistema de 1ª ordem é o método de alocação de pólos. Suponha que o processo possa ser descrito pela seguinte função de transferência.

$$G_o(s) = \frac{K_o}{Ts + 1} \tag{49}$$

e o controlador PI:

$$H(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \tag{50}$$

A função de transferência de 2ª ordem resultante é dada por:

Experiência 4 -

$$G(s) = \frac{G_w(s)H(s)}{1 + G_w(s)H(s)}. \quad (51)$$

Os pólos de malha fechada podem ser escolhidos arbitrariamente através da escolha adequada do ganho (K) e do tempo integral (T_i) do controlador. Os pólos são obtidos através da seguinte equação característica:

$$1 + G_w(s)H(s) = 0 \quad (52)$$

que se torna:

$$s^2 + s \frac{1 + K_w K}{T} + \frac{K_w K}{T T_i} = 0. \quad (53)$$

Suponha agora que os pólos da malha fechada desejada possam ser caracterizados pelo grau de amortecimento ξ e pela frequência natural ω_n . A equação característica pode então ser escrita como:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0. \quad (54)$$

Igualando-se as equações (53) e (54), tem-se:

$$\omega_n^2 = \frac{K_w K}{T T_i}; \quad (55)$$

$$2\xi\omega_n = \frac{1 + K_w K}{T}. \quad (56)$$

Resolvendo estas equações para a determinação dos parâmetros do controlador, obtém-se:

$$K = \frac{2\xi\omega_n T - 1}{K_p}; \quad (57)$$

$$T_i = \frac{2\xi\omega_n T - 1}{\omega_n^2 T}. \quad (58)$$

4. Algumas considerações práticas

4.1. Quando controladores PID podem ser utilizados ?

Os requisitos para um sistema de controle podem incluir muitos fatores como tempo de resposta a comandos, insensibilidade a ruído de medida e a variações do processo, e rejeição de distúrbios de torque. O projeto de sistemas de controle envolve ainda aspectos como as características dinâmicas do processo, a saturação de atuadores, e as características dos distúrbios no processo. A experiência na área permite concluir que a maioria dos processos industriais podem ser controlados razoavelmente bem com um controlador PID desde que os requisitos de desempenho do controlador não sejam muito altos.

Quando controladores PI são suficientes? O termo derivativo é frequentemente não utilizado. É interessante observar que na maioria dos controlador industriais a parte derivativa opera em geral desligada. Pode ser demonstrado que controladores PI são adequados para todos os processos onde as dinâmicas são essencialmente de 1a. ordem.

Quando controladores PID são suficientes? Similarmente controladores PID são suficientes para processos onde as dinâmicas dominantes são de segunda ordem. Um caso típico de benefício com o uso do termo derivativo, são a utilização em processos onde as constantes de tempo são bastante distintas (pólos diferentes em magnitude). Por exemplo, em processos de controle de temperatura. Neste caso, a ação derivativa pode diminuir o tempo de resposta do sistema.

4.2. Faixas de operação e saturação de atuadores

Quando se projeta um sistema de controle algumas considerações práticas devem ser observadas. Uma das mais importantes é a viabilidade física dos parâmetros K , T_i e T_d projetados. Em sistemas analógicos, a constante proporcional K , por exemplo, está claramente associado ao ganho de amplificadores e estes possuem limites claros de potência fornecida, faixa de operação de tensão de entrada, faixa de operação de tensão de saída, etc.

Para o caso de controladores digitais, deve-se considerar a faixa de operação da tensão da entrada da placa de aquisição (no caso de $\pm 0.05V$ a $\pm 10V$), a faixa de operação da tensão de saída da placa de aquisição (no caso de $\pm 10V$) e a faixa de operação da tensão de entrada do amplificador do módulo de Motor CC (no caso de $\pm 5V$).

A consequência desta limitação é que dependendo da tensão de referência e dos parâmetros do controlador, o sistema pode operar muitas vezes sob saturação. Para evitar a saturação pode-se diminuir a faixa de operação do sistema, ou reprojeter o sistema de controle diminuindo os requisitos de desempenho.

Quando o sistema opera em saturação, o laço de controle é descontinuado e o sistema opera como se estivesse em malha aberta porque o atuador vai permanecer no seu limite independente da saída do processo y . Se um controlador com ação integral é utilizado, o erro pode continuar a ser integrado. Isto significa que o termo integral pode se tornar muito grande, um fenômeno comumente conhecido como *WINDUP*. Para que o sistema retorne ao seu funcionamento normal é necessário que o erro mude de sinal por um longo período até

“zerar” o integrador. A consequência é que qualquer controlador com ação integral pode estar sujeito a longos períodos transitórios quando o atuador satura.

O fenômeno de *WINDUP* está ilustrado na Figura 11, que mostra um processo sendo controlado por um controlador do tipo PI. A mudança inicial de referência y_{sp} é tão grande que o atuador satura. O termo integral I aumenta inicialmente porque o erro é positivo, e atinge o seu valor máximo em $t=10\text{seg.}$ quando o erro vale zero ($y=y_{sp}$). A saída se mantém em saturação devido ao valor alto do termo integral I . O limite de saturação não é abandonado até que o erro permaneça negativo por um longo tempo, um tempo suficiente para que o termo integral diminua significativamente. Note que o esforço de controle u , se alterna nos dois limites várias vezes. O efeito geral é um grande sobressinal, e uma oscilação amortecida onde o esforço de controle se alterna nos dois valores limites. Quando a saída do processo y se aproxima do sinal de referência o atuador não entra mais em saturação e o comportamento se torna linear.

Em geral, controladores industriais possuem algoritmos *Anti-Windup*. Estes algoritmos contêm mecanismos diversos, tais como, o desligamento da parte integral quando o controlador entra em saturação, ou um re-cálculo da parte integral, de forma a diminuí-lo para que o atuador não entre em saturação.

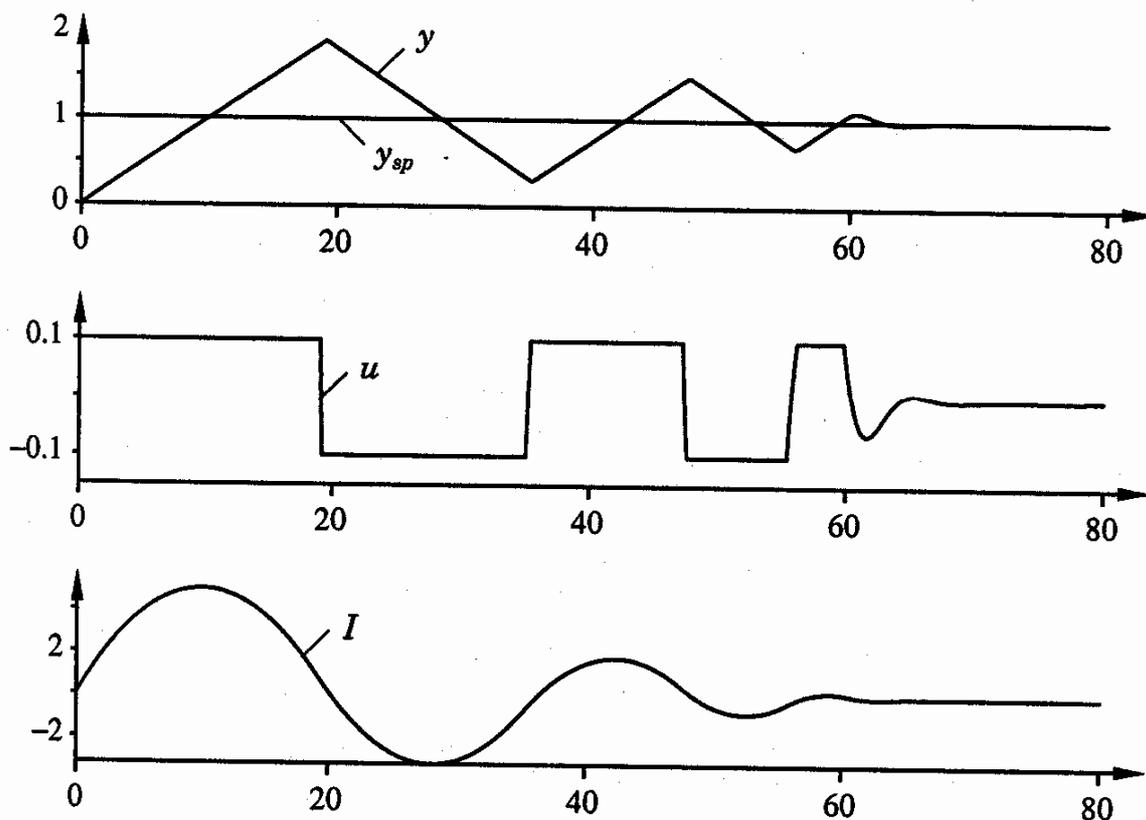


Figura 11: Ilustração do fenômeno de *WINDUP*.

4.3. Seleção do Período de Amostragem

A escolha apropriada do período de amostragem T_a é uma decisão importante em um sistema de controle digital. Se o período de amostragem for muito longo será impossível reconstruir o sinal contínuo. Se o período de amostragem for muito pequeno o computador ficará sobrecarregado e componentes de alta frequência serão introduzidos na malha fechada pela conversão digital-analógica. A escolha do período de amostragem depende bastante do propósito do sistema.

A escolha do período de amostragem pode ser feita com base numa variável adimensional e que possui uma interpretação física. Para sistemas oscilatórios é natural a normalização com base no período de oscilação, para sistemas não oscilatórios, o tempo de subida do sistema é o fator de normalização adequado.

Define-se o número de períodos de amostragem por tempo de subida, N_r :

$$N_r = \frac{t_r}{T_a}, \quad (59)$$

onde t_r é o tempo de subida. Para sistemas de 1ª ordem, o tempo de subida é igual a constante de tempo. **Portanto, é razoável escolher N_r por volta de 10 para o caso de projeto do controlador realizado em tempo discreto. Contudo, se o projeto do controlador foi realizado em tempo contínuo, N_r deve ficar por volta de 20.**

Para um sistema de segunda ordem com grau de amortecimento ξ e frequência natural ω_n , o tempo de subida é dado por:

$$T_r = \omega_0^{-1} e^{\varphi / \tan \varphi}, \quad (60)$$

onde $\xi = \tan \varphi$. Para um grau de amortecimento em torno de $\xi=0.7$, isto resulta em:

$$\omega_0 T_a \approx 0,1 \text{ ou } 0,05, \quad (61)$$

onde ω_0 é dado em radianos por segundo.

Uma questão importante a ser considerada é que os pólos e zeros no domínio z dependem do período de amostragem. Como se sabe, os pólos do domínio s são mapeados no domínio z através da seguinte relação:

$$z = e^{sT_a}. \quad (62)$$

Na medida em que o período de amostragem $T_a \rightarrow 0$, ou seja, diminui, os pólos estáveis em s (pólos com parte real negativa) tendem rapidamente para $z=1$. Paradoxalmente pode-se esperar que conforme o período de amostragem diminui a aproximação do sistema contínuo se torna mais precisa, no entanto períodos de amostragem pequenos podem introduzir distorções significativas no comportamento dinâmico do sistema. Isto decorre principalmente em razão do número finito de algarismos utilizado em um computador digital. Assim, por exemplo, considere um pólo em tempo discreto localizado em $z = 0,999991$, o que

Experiência 4 -

é uma posição muito próxima de $z = 1$ que é o limite da estabilidade, após inúmeros cálculos realizados pelo controlador, a cada período de amostragem, podem ocorrer erros de arredondamento que levam o sistema facilmente para a instabilidade.

Uma outra forma de escolher o período de amostragem é utilizar a eq. (62) de modo que os pólos do sistema de malha aberta em tempo discreto fiquem em torno de 0,95. Assim, invertendo a eq. (62), tem-se:

$$T_a = \frac{\ln(0,95)}{p}, \quad (63)$$

onde p é o pólo mais rápido da malha aberta. Esse método garante que os pólos do sistema em tempo discreto tenham um número de dígitos significativos suficiente de forma que não sejam arredondados para a unidade devido a erros de quantização.

5. Roteiro Experimental

Na parte experimental você deve escolher um valor para os parâmetros do motor CC, ou seja, o ganho K_w e a constante de tempo T baseado nos valores estimados na Experiência 2 e 3.

Justifique a sua escolha.

5.1. Projeto de um controlador de velocidade tipo PI em tempo contínuo

O objetivo desta experiência é projetar um controlador PI que satisfaça as seguintes especificações para a velocidade angular do motor:

- Erro de regime estacionário nulo para uma entrada na forma de degrau ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$).
- Tempo de subida: $t_r < 1.0s$;
- Tempo de assentamento: $t_s < 1.5s$;
- Máximo sobressinal: $M_p < 5\%$.

Estas especificações devem ser observadas com o motor CC sem atuação do freio magnético;

Item 2: A partir das especificações fornecidas para a resposta transitória, faça um esquema da região desejada para os pólos da malha fechada no plano s .

Item 3: Projete o controlador de forma a obter os parâmetros do mesmo. Descreva passo a passo o seu projeto.

DICA: você pode utilizar a função `sisotool` que fornece um ambiente iterativo de projeto de um controlador baseado no lugar das raízes, onde você escolhe a posição dos pólos da malha fechada e observa a simulação do sistema simultaneamente. Coloque no seu relatório o gráfico do lugar das raízes obtido.

O lugar das raízes é calculado em função de um único parâmetro, no caso, o ganho K_p . Portanto, você deve inicialmente escolher um valor para o tempo integral T_i e posteriormente definir as funções de transferência G do sistema e do controlador C como indicado abaixo.

```
G = tf([Kw], [T 1])
C=tf([Ti 1], [Ti 0])
sisotool(G,C)
```

Item 4: Simule o seu sistema de controle de velocidade para o Motor CC utilizando o modelo em SIMULINK do Arquivo `c:\PMR3409\Exp4\ControladorPIDV2.mdl`.

Faça uma cópia do programa no seu diretório de trabalho. Qualquer modificação deve ser feita neste arquivo

A Figura 12 ilustra o modelo de simulação em SIMULINK do sistema de controle. Com este modelo em SIMULINK, você pode simular o seu projeto do sistema de controle. O

Experiência 4 -

modelo foi projetado para que seja possível simular controladores do tipo P, PI, PD e PID, sendo a parte derivativa acoplada a um filtro de 1ª ordem para garantir uma relação de causalidade e filtragem de ruídos de alta frequência.

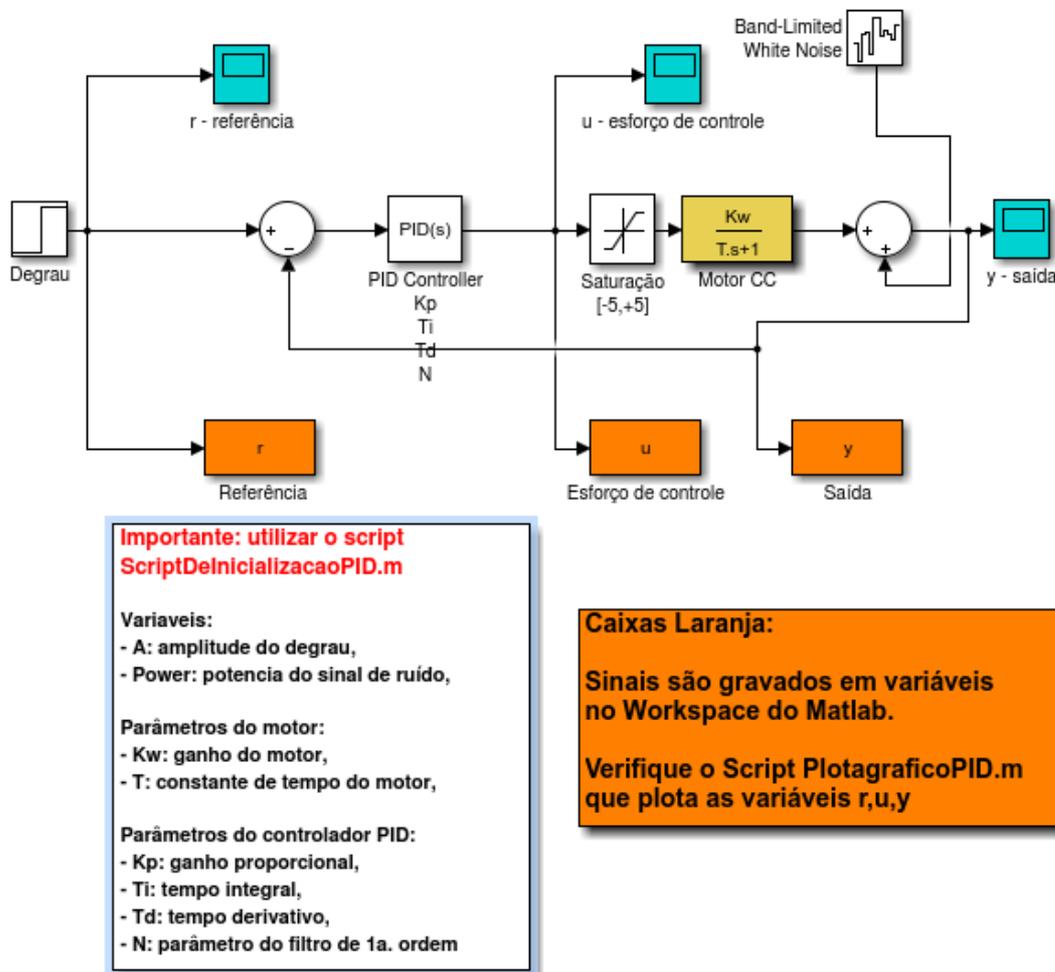


Figura 12: Modelo em SIMULINK do sistema em malha fechada em tempo contínuo.

Os parâmetros do bloco PID do SIMULINK estão definidos em função dos parâmetros K , T_i , T_d e N que devem estar definidos no ambiente do MATLAB. Idem para os parâmetros da planta K_ω e T . Verifique o script `ScriptDeInicializacaoPID.m`.

O bloco de entrada a degrau e o bloco de ruído branco estão associados a um ganho. A saída do controlador PID está conectada a um bloco de saturação que opera linearmente na faixa de $[-5,+5]$. Três variáveis são monitoradas através de blocos SCOPE e blocos que salvam os valores de simulação no ambiente do MATLAB: o valor de referência r , o esforço de controle u e a saída do processo y . Além destas variáveis um vetor com o tempo da simulação, $tout$, também é salvo no ambiente do MATLAB.

Faça a simulação do seu sistema de controle sem a utilização do bloco de ruído ($Power=0$) e com o valor do degrau $A=1$. Caso a simulação não esteja obedecendo as especificações modifique o seu projeto. Coloque no seu relatório os gráficos com os resultados das simulações (referência, entrada e saída da planta).

Item 5: Neste item deseja-se observar o efeito da saturação no sistema de controle. Selecione um valor de amplitude da entrada degrau A de forma que o esforço de controle u atinja valores maiores que o limite da saturação. Simule esta condição e comente os resultados obtidos. Não se esqueça de incluir o gráfico com os resultados da entrada real da planta (com saturação) e da saída.

Item 6: Testes no módulo de motor CC MS15

Para implementação computacional do controlador PI é necessário transformar a equação diferencial na equação de diferenças correspondente. Existem vários métodos para essa transformação que serão apresentados com maiores detalhes na próxima aula de laboratório.

Todos os métodos resultam numa equação de diferenças no tempo discreto que implementam um algoritmo de integração numérica.

Nessa experiência utilizaremos o método de integração através de aproximação trapezoidal usualmente denominado na terminologia de controle de tempo discreto como *Transformação Bilinear*.

Nesse caso o controlador PI pode ser escrito em função dos parâmetros do controlador PI como:

$$u(k) = u(k-1) + a_1 e(k) + a_2 e(k-1)$$

$$a_1 = \frac{K_p + 2K_p T_i / T_a}{2T_i / T_a}$$

$$a_2 = \frac{K_p - 2K_p T_i / T_a}{2T_i / T_a}$$

Escolhendo um intervalo de amostragem T_a suficientemente pequeno a equação de diferenças se aproxima da equação diferencial.

Você deve utilizar o script `sistemadecontrolePI.m` cujo código é apresentado a seguir. Você deve escolher a frequência de amostragem F_a , e os parâmetros do controlador P_i , K_p e T_i .

Selecione no gerador de funções uma amplitude de tensão em torno de 3Volts (6 Volts pico a pico).

Analise os resultados obtidos.

```
function [vetorrk,vetoruk,vetoryk] = sistemadecontrolePI
Fa = 20;           % Sampling frequency
Ta = 1/Fa;        % Sampling time
Duration = 50;    % Duracao em segundos
NumberOfTasksToExecute = round(Duration/Ta)

% Create and configure timer object
tm = timer('ExecutionMode','fixedRate', ...           % Run continuously
           'Period',Ta, ...                             % Period = sampling time
           'TasksToExecute',NumberOfTasksToExecute, ... % Runs NumberOfTasksToExecute times
           'TimerFcn',@MyTimerFcn, ...                 % Run MyTimerFcn at each timer event
           'StopFcn', @StopEverything);
```

Experiência 4 -

```
% Setup da placa de aquisicao
ai=analoginput('nidaq','Dev1');
ao=analogoutput('nidaq','Dev1')
addchannel(ai,0:1);
addchannel(ao,0);
Set(ai,'ChannelSkewMode','Equisample')
ai.ChannelSkew

% inicializacao de variaveis do sistema de controle
rk = 0.0;
yk = 0.0;
uk = 0.0;
uk_1 = 0.0;
ek = 0.0;
ek_1 = 0.0;

vetorrk = zeros(NumberOfTasksToExecute+1,1);
vetorrk(1) = rk; % instante 0 -> k=1
vetoryk = zeros(NumberOfTasksToExecute+1,1);
vetoryk(1) = yk;
vetoruk = zeros(NumberOfTasksToExecute+1,1);
vetoruk(1) = uk;
k=2;

% Parametros do controlador PI
Kp = 1;
Ti = 0.2;

% Transformacao bilinear
a = Kp + 2*Kp*Ti/Ta;
b = Kp - 2*Kp*Ti/Ta;
c = 2*Ti/Ta;
a1 = a/c;
a2 = b/c;

% Start the timer
start(tm)
function MyTimerFcn(obj,event)

    % Leitura da Porta A/D - e(k)
    sample=getsample(ai);
    rk = sample(1);
    yk = sample(2);

    % calculo do erro e(k)
    ek = rk - yk;

    % Calculo do controle
    uk = u(k-1) + a1*e(k) + a2*e(k-1)

    % Controle de Saturacao
    if uk >= 5.0
        uk = 5.0;
    else if uk <= -5.0
        uk = -5.0;
    end
end

    % Escrita na Porta D/A - u(k)
    putsample(ao,uk);

    % Salva os valores
    vetorrk(k) = rk;
    vetoryk(k) = yk;
    vetoruk(k) = uk;

    % Update de variaveis
    k=k+1
    uk_1 = uk;
    ek_1 = ek;
end

function StopEverything(obj,event)
nsamples = length(vetorrk);
t=0.0:Ta:(nsamples-1)*Ta;
plot(t,vetorrk,'-',t,vetoruk,'-.',t,vetoryk,'--');
```

Experiência 4 -

```
grid on
title('Referencia r(k) (-) / Esforço de controle u(k) (-.) / Saida da planta
y(k) (--)'
xlabel('tempo (s)');
ylabel('tensao (Volts)');
mensagem='acabou'
end
end
```

Item 7: Sensibilidade a variações da planta.

O projeto do controlador PI foi realizado sem a consideração do freio magnético.

Realize experimentos colocando o freio magnético nas duas posições de atuação (atuação parcial e total).

Quais requisitos de projeto são preservados e quais são violados ?

Item 8: Sensibilidade a variações dos parâmetros do controlador

a-) Mantendo T_i como projetado realize experimentos com valores de K_P igual a 2 vezes o valor projetado e metade do valor projetado. Analise os resultados.

b-) Mantendo K_P como projetado realize experimentos com valores de T_i igual a 2 vezes o valor projetado e metade do valor projetado. Analise os resultados.