Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”
Universidade de São Paulo

Probabilidade

Professora Renata Alcarde Sermarini

Piracicaba
Abril 2017

Probabilidade

Probabilidade

Medida de incerteza em termos de escala numérica.

- Início: estratégias de apostas em jogos de azar;
- Desenvolvimento: século XX (teoria matemática);
- Até agora: descrevemos o comportamento de um fenômeno por meio das distribuições de frequências

Experimento Aleatório

Experimento Aleatório

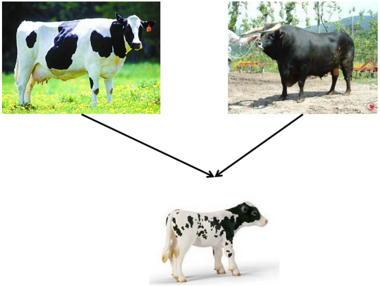
são experimentos que, quando repetidos em condições similares, dão resultados geralmente diferentes.

Experimento Aleatório

Experimento Aleatório

são experimentos que, quando repetidos em condições similares, dão resultados geralmente diferentes.

- Cruzar dois animais e observar o sexo do primeiro que nascer;



Experimento aleatório

- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;

- Lançar duas moedas e observas as faces voltadas para cima;

Experimento aleatório

- Colocar 20 sementes em um germinador e contar, após determinado tempo, o número de sementes germinadas;

- Observar uma amostra de n tomates quanto ao número de tomates com defeitos graves;

Experimento aleatório

- Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas;

- Medir a produção de uma parcela de cana-de-açúcar;

Experimento aleatório

- Medir a altura de uma árvore;

Espaço amostral

Espaço Amostral

é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Espaço amostral

Espaço Amostral

é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

Espaço amostral

Espaço Amostral

é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

- Um espaço amostral é discreto quando podemos enumerar todos os resultados do experimento;

Espaço amostral

Espaço Amostral

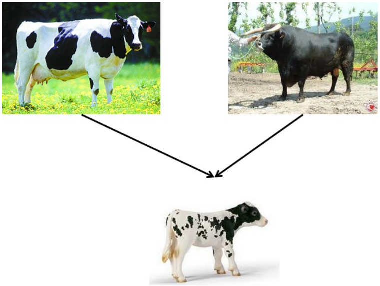
é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

- Um espaço amostral é discreto quando podemos enumerar todos os resultados do experimento;
- Um espaço amostral é contínuo quando não podemos enumerar todos os resultados

Espaço Amostral

- Cruzar dois animais e observar o sexo do primeiro que nascer;



$$\Omega = \{\text{Macho, Fêmea}\}$$

Espaço Amostral

- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

- Lançar duas moedas e observas as faces voltadas para cima;

$$\Omega = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, coroa}), (\text{coroa, cara}), (\text{coroa, coroa})\}$$

Espaço Amostral

- Colocar 20 sementes em um germinador e contar, após determinado tempo, o número de sementes germinadas;

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 20\}$$

- Observar uma amostra de n tomates quanto ao número de tomates com defeitos graves;

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Espaço Amostral

- Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas;

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$$

- Medir a produção de uma parcela de cana-de-açúcar;

$$\Omega = (0, 1000)\text{kg}$$

Espaço Amostral

- Medir a altura de uma árvore;

$$\Omega = (0, 6)\text{metros}$$

Eventos

Evento

Os eventos são subconjuntos do espaço amostral Ω, ou seja, são conjuntos dos resultados de um experimento.
Notação: A, B, $C, \ldots$

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior ou igual a 15
- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%
- Observar árvores com altura superior a 3 metros
- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

$$C = (3, 6)\text{metros}$$

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

$$C = (3, 6)\text{metros}$$

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

$$D = (3, 6)\text{metros}$$

Eventos

- **Evento certo**: $A = \Omega$.

- **Evento impossível**: $A = \emptyset$.

Eventos

- **Evento certo**: $A = \Omega$.

  Colocar 20 sementes no germinador e observar 20 sementes ou menos germinadas.

- **Evento impossível**: $A = \emptyset$.

Eventos

- **Evento certo**: $A = \Omega$.

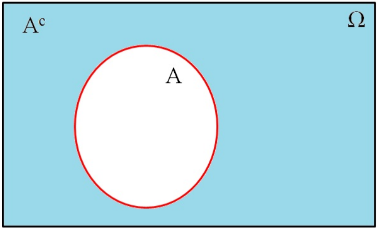
  Colocar 20 sementes no germinador e observar 20 sementes ou menos germinadas.

- **Evento impossível**: $A = \emptyset$.

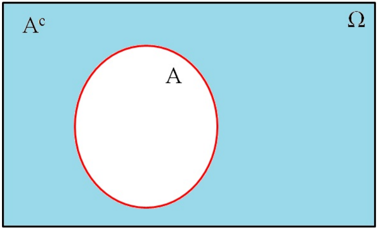
  Colocar 20 sementes no germinador e observar mais do que 20 sementes germinadas.

Eventos

- **Evento complementar**: O complementar de um evento A é o conjunto de pontos amostrais que não pertencem a A. Notação: $\bar{A}$ ou A^c.



- **Evento complementar**: O complementar de um evento A é o conjunto de pontos amostrais que não pertencem a A. Notação: $\bar{A}$ ou A^c.

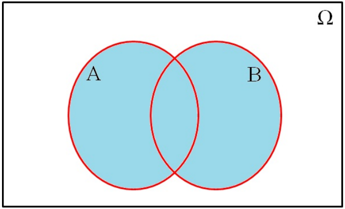


A = Observar o número de sementes germinadas maior ou igual a 15.
A^c = Observar o número de sementes germinadas menor do que 15.

Eventos

União

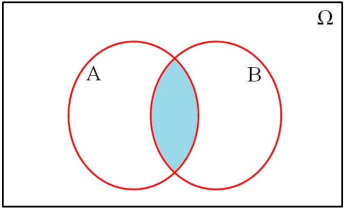
A **união** de dois eventos A e B é o conjunto de todos os elementos amostrais que estão em A, em B ou em ambos.
Notação: $A \cup B$.



Eventos

Interseção

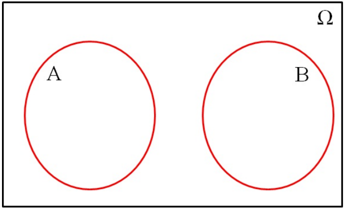
A **interseção** de dois eventos A e B é o conjunto de todos os elementos amostrais que estão em A e estão em B.
Notação: $A \cap B$.



Eventos

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos se eles não têm elementos amostrais em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$, ou ainda, se eles não podem ocorrer simultaneamente.



Eventos

Exemplo: Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

A: Soma dos valores igual a 7;

B: Resultado do primeiro dado igual a 6;

C: Os resultados nos dois dados são iguais;

D: Soma nos dois dados é 2;

Construir o espaço amostral.

Eventos

Exemplo: Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

A: Soma dos valores igual a 7;

B: Resultado do primeiro dado igual a 6;

C: Os resultados nos dois dados são iguais;

D: Soma nos dois dados é 2;

Construir o espaço amostral.

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

Exemplo: Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

A: Soma dos valores igual a 7;

B: Resultado do primeiro dado igual a 6;

C: Os resultados nos dois dados são iguais;

D: Soma nos dois dados é 2;

Construir o espaço amostral.

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

Relacionar os elementos dos eventos A, B e C.

Eventos

- A: Soma dos valores igual a 7

Eventos

- A: Soma dos valores igual a 7

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

Eventos

- B: Resultado do primeiro dado igual a 6

Eventos

- B: Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Eventos

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

Eventos

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

Eventos

- D: Soma nos dois dados é 2

Eventos

- D: Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \Big\{ \color{red}{(1,1)}, (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \Big\}$$

$$D = \{(1,1)\}$$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?

- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$
  - $A \cap C$
  - $B \cup D$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?

  A e C, A e D e B e D.
- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$
  - $A \cap C$
  - $B \cup D$

Eventos

$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
$D = \{(1,1)\}$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?
  A e C, A e D e B e D.
- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$
    $A \cap B = \{(6,1)\}$
  - $A \cap C$
  - $B \cup D$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?

  A e C, A e D e B e D.
- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$

    $A \cap B = \{(6,1)\}$
  - $A \cap C$

    $A \cap C = \emptyset$
  - $B \cup D$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?
  A e C, A e D e B e D.
- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$
    $A \cap B = \{(6,1)\}$
  - $A \cap C$
    $A \cap C = \emptyset$
  - $B \cup D$
    $B \cup D = \{(1,1),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

Definições

Definição Clássica

Seja $A \subset \Omega$, então

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{\text{número de resultados favoráreis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

- Os resultados são equiprováveis;
- O espaço amostral é discreto e finito

Exemplo: No lançamento de dois dados honestos (resultados equiprováveis), calcular a probabilidade dos seguintes eventos:

- A: Soma dos valores igual a 7;
- B: Resultado do primeiro dado igual a 6;
- C: Os resultados nos dois dados são iguais;
- D: Soma nos dois dados é 2;

Definições

- A: Soma dos valores igual a 7

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\color{red}{(1,6)},\\
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\color{red}{(2,5)},(2,6),\\
(3,1),(3,2),(3,3),\color{red}{(3,4)},(3,5),(3,6),\\
(4,1),(4,2),\color{red}{(4,3)},(4,4),(4,5),(4,6),\\
(5,1),\color{red}{(5,2)},(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
\color{red}{(6,1)},(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

Definições

- A: Soma dos valores igual a 7

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = 0,17$$

Definições

- B: Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ \color{red}{(6,1)},\color{red}{(6,2)},\color{red}{(6,3)},\color{red}{(6,4)},\color{red}{(6,5)},\color{red}{(6,6)}\Big\}$$

Definições

- B: Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = 0,17$$

Definições

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \Big\{ {\color{red}(1,1)}, (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), {\color{red}(2,2)}, (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), {\color{red}(3,3)}, (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), {\color{red}(4,4)}, (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), {\color{red}(5,5)}, (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), {\color{red}(6,6)} \Big\}$$

Definições

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \Big\{\color{red}{(1,1)}, (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ (2,1), \color{red}{(2,2)}, (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ (3,1), (3,2), \color{red}{(3,3)}, (3,4), (3,5), (3,6),\\ (4,1), (4,2), (4,3), \color{red}{(4,4)}, (4,5), (4,6),\\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), \color{red}{(5,5)}, (5,6),\\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), \color{red}{(6,6)}\Big\}$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = 0,17$$

Definições

- D: Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \Big\{\color{red}{(1,1)}, (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\Big\}$$

Definições

- D: Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \Big\{ \color{red}{(1,1)}, (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \Big\}$$

$$P(D) = \frac{1}{36} = 0,03$$

Definições

Definição Frequentista

Outro método de definir probabilidade é o da frequência relativa. Pode-se definir $P(A)$ como o limite da frequência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes do experimento, com n tendendo ao infinito, ou seja,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (\text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ repetições do experimento})$$

Definições

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipo AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigostos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos. Tal como:

Definições

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipo AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigostos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos. Tal como:

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

Definições

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipo AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigostos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos. Tal como:

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

- Para $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipo AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigostos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos. Tal como:

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

- Para $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

- Para $n = 1000$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	263	0,263
Aa	495	0,495
aa	242	0,242
Total	1000	1,00

Definições

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipo AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigostos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos. Tal como:

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

- Para $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

- Para $n = 1000$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	263	0,263
Aa	495	0,495
aa	242	0,242
Total	1000	1,00

- Para $n \to \infty$

Genótipo	Probabilidade
AA	0,25
Aa	0,50
aa	0,25
Total	1,00

Definições

Exemplo: Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Definições

Exemplo: Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Considere o experimento escolha ao acaso de um aluno do primeiro ano e verificar qual curso está cursando e a qual sexo pertence

Definições

Exemplo: Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	 Engenharia Florestal (F)	 Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Considere o experimento escolha ao acaso de um aluno do primeiro ano e verificar qual curso está cursando e a qual sexo pertence
- Considere ainda os seguintes eventos:
  - H: ser do sexo masculino
  - M: ser do sexo feminino
  - A: estar cursando Engenharia Agronômica
  - F: estar cursando Engenharia Florestal
  - E: estar cursando Economia Agroindustrial

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
- $P(M)$
- $P(A)$
- $P(F)$
- $P(E)$
- $P(\Omega)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
- $P(A)$
- $P(F)$
- $P(E)$
- $P(\Omega)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(A)$
- $P(F)$
- $P(E)$
- $P(\Omega)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(A)$
  $= \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F)$
- $P(E)$
- $P(\Omega)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(A)$
  $= \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F)$
  $= \frac{40}{265} = 0,1510$
- $P(E)$
- $P(\Omega)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(A)$
  $= \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F)$
  $= \frac{40}{265} = 0,1510$
- $P(E)$
  $= \frac{25}{265} = 0,0943$
- $P(\Omega)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(A)$
  $= \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F)$
  $= \frac{40}{265} = 0,1510$
- $P(E)$
  $= \frac{25}{265} = 0,0943$
- $P(\Omega)$
  $= \frac{265}{265} = 1,0000$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
- $P(H \cup M)$
- $P(H \cap M)$
- $P(M \cap E)$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Engenharia Agrônomica (A)	Curso Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$
- $P(H \cap M)$
- $P(M \cap E)$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$
  $= P(H) + P(M) =$
  $0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$
- $P(M \cap E)$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$
  $= P(H) + P(M) =$
  $0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$
  $= 0$
- $P(M \cap E)$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$
  $= P(H) + P(M) =$
  $0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$
  $= 0$
- $P(M \cap E)$
  $= \frac{10}{265} = 0,0377$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$
  $= P(H) + P(M) =$
  $0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$
  $= 0$
- $P(M \cap E)$
  $= \frac{10}{265} = 0,0377$
- $P(H \cup A)$
  $= P(H) + P(A) - P(H \cap A) =$
  $0,7736 + 0,7547 - \frac{160}{265} = 0,9245$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$

  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$

- $P(H \cup M)$

  $= P(H) + P(M) =$
  $0,7736 + 0,2264 = 1$

- $P(H \cap M)$

  $= 0$

- $P(M \cap E)$

  $= \frac{10}{265} = 0,0377$

- $P(H \cup A)$

  $= P(H) + P(A) - P(H \cap A) =$
  $0,7736 + 0,7547 - \frac{160}{265} = 0,9245$

- $P(A^c)$

  $= P(F) + P(E) = 0,1510 + 0,0943 =$
  $1 - 0,7547 = 0,2453$

Propriedades

Propriedades

Se A e B são dois eventos do espaço amostral Ω, então valem as seguintes regras básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Propriedades

Propriedades

Se A e B são dois eventos do espaço amostral Ω, então valem as seguintes regras básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então:

$P(A \cap B) =$

$P(A \cup B) =$

Propriedades

Propriedades

Se A e B são dois eventos do espaço amostral Ω, então valem as seguintes regras básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então:

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade dele ser do sexo masculino (H)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade dele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H|F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade dele estar cursando Engenharia Agronômica?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade dele estar cursando Engenharia Agronômica?

$$P(A|M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F|M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade dele ser do sexo masculino (H)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade dele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H|F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	 Engenharia Florestal (F)	 Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade dele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H|F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

$$= \frac{\frac{30}{265}}{\frac{40}{265}} = \frac{P(H \cap F)}{P(F)}$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Engenharia Agrônomica (A)	Curso Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade dele estar cursando Engenharia Agronômica (A)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade dele estar cursando Engenharia Agronômica (A)?

$$P(A|M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade dele estar cursando Engenharia Agronômica (A)?

$$P(A|M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

$$= \frac{\frac{40}{265}}{\frac{60}{265}} = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Engenharia Agrônomica (A)	Curso Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F|M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Engenharia Agrônomica (A)	Curso Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F|M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

$$= \frac{\frac{10}{265}}{\frac{60}{265}} = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$$

Probabilidade condicional e independência

Definição

Dados dois eventos quaisquer, A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado B, como sendo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade condicional e independência

Definição

Dados dois eventos quaisquer, A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado B, como sendo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observação:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Regra do Produto

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(B) \times P(A|B) \\
&= P(A) \times P(B|A)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**. Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**. Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Os eventos B_1 e B_2 são independentes?

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**. Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Os eventos B_1 e B_2 são independentes?

Os eventos P_1 e P_2 são independentes?

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**. Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Os eventos B_1 e B_2 são independentes?

Os eventos P_1 e P_2 são independentes?

Os eventos P_1 e B_2 são independentes?

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**. Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Pede-se:

(a) calcular a probabilidade de sair bola branca na primeira extração e preta na segunda extração;

(b) construir o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

(a) calcular a probabilidade de sair bola branca na primeira extração e preta na segunda extração;

$$P(B_1 \cap P_2) = P(B_1) \times P(P_2|B_1)$$

$P(B_1) = \frac{3}{5}$
$P(P_2|B_1) = \frac{2}{4}$

$$P(B_1 \cap P_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,30$$

Exercício: Consideremos o mesmo caso anterior, porém **com reposição** da primeira bola extraída antes da extração da segunda bola.

- Os eventos B_1 e B_2 são independentes?

- Os eventos P_1 e P_2 são independentes?

- Construir o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

Probabilidade condicional e independência

Exercício: Consideremos o mesmo caso anterior, porém **com reposição** da primeira bola extraída antes da extração da segunda bola.
Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(B_2)$
- $P(P_2)$
- $P(B_2|B_1)$
- $P(B_2|P1)$
- $P(P_2|B_1)$
- $P(P_2|P_1)$
- Construir o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

Probabilidade condicional e independência

Note que:

B_2 e B_1 são eventos independentes e que $P(B_2|B_1) = P(B_2)$
B_2 e P_1 são eventos independentes e que $P(B_2|P_1) = P(B_2)$
P_2 e B_1 são eventos independentes e que $P(P_2|B_1) = P(P_2)$
P_2 e P_1 são eventos independentes e que $P(P_2|P_1) = P(P_2)$

Generalizando,

se dois eventos, A e B, são independentes, temos que

$$P(A|B) = P(A) \qquad \text{ou} \qquad P(B|A) = P(B)$$

Pela regra do produto de probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

$$= P(A) \times P(B|A)$$

Probabilidade condicional e independência

Independência

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Observação: Dois eventos são mutuamente exclusivos se, e somente se, $P(A \cap B) = 0$

Exemplo

Temos três profissionais: um engenheiro agrônomo, um biólogo e um engenheiro civil. Cada um deles plantou dez mudas de álamos em vasos numa casa de vegetação. Sobreviveram nove das plantadas pelo engenheiro agrônomo, cinco pelo biólogo e duas pelo engenheiro civil. Dos trinta vasos, escolhe-se um ao acaso, e verifica-se se a muda sobreviveu. Se ela sobreviveu, qual é a probabilidade de ela ter sido plantada pelo engenheiro agrônomo?

Sejam os eventos:

S: a muda sobreviver

A: muda plantada pelo Engenheiro Agrônomo

B: muda plantada pelo Biólogo

C: Muda plantada pelo Engenheiro Civil

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formem uma partição do espaço amostral, Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, se conheçam as probabilidades condicionais, $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Então, para qualquer j,

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

Exercícios

Exemplo

Uma água é contaminada se forem encontrados bacilos tipo A ou tipo B e C, simultaneamente. As probabilidade de se encontrarem bacilos tipo A, B e C são, respectivamente, 0,30, 0,20 e 0,80. Existindo bacilos do tipo A não existirão bacilos tipo B. Existindo bacilos tipo B, a probabilidade de existirem bacilos tipo C é reduzida à metade. Calcular:

- a probabilidade de ocorrer bacilos tipo B ou C ou ambos;
- a probabilidade de a água estar contaminada;
- sabendo que a água está contaminada, calcular a probabilidade de ela ter sido contaminada pelo bacilos do tipo B e C.

Exercícios

1 Dados dois eventos B e C, tais que, $P(B) = 0,6$, $P(C) = 0,3$ e $P(B \cap C) = 0,20$, verifique se B e C são independentes.

2 Uma urna contém 6 bolas azuis e 4 brancas, de onde são retiradas duas bolas ao acaso e sem reposição. Sejam os eventos A_1, sair bola azul na primeira extração, e B_2, sair bola branca na segunda extração. Pede-se:

- Calcular as probabilidades de todos os possíveis resultados do experimento;
- Calcular a probabilidade de sair bola branca na segunda extração;
- Calcular a probabilidade de ter saído bola azul na primeira extração dado que saiu branca na segunda extração;
- Verificar se A_1 e B_2 são eventos independentes.

3 Três fábricas fornecem equipamentos de precisão para o laboratório de química da universidade. Apesar de serem aparelhos de precisão, existe uma pequena chance de superestimação das medidas efetuadas. A tabela a seguir apresenta as probabilidades associadas às categorias dos equipamentos produzidos em cada fábrica:

Fábrica	Subestima	Exata	Superestima
I	0,010	0,98	0,010

Fábrica	Subestima	Exata	Superestima
II	0,005	0,98	0,015

Fábrica	Subestima	Exata	Superestima
III	0,000	0,99	0,01

Exercícios

As fábricas fornecem, respectivamente, 20%, 30% e 50% dos aparelhos utilizados. Escolhemos, ao acaso, um desses aparelhos e perguntamos a probabilidade de:

- Haver superestimação de medida?
- Não haver superestimação de medida?
- Dando medidas exatas, ter sido fabricado em III?
- Ter sido produzido por I, dado que não subestima as medidas?

Exercícios

Num experimento com tomates em casa de vegetação, tem-se 60 vasos distribuídos igualmente nas seis condições de três variedades e dois porta-enxertos. Foi observado o número de vasos com virose para cada combinação, cujos resultados encontram-se a seguir:

Variedade	1		2		3	
Porta-enxertos	1	2	1	2	1	2
Número de vasos plantados	10	10	10	10	10	10
Número de vasos com virose	3	2	5	4	1	3

Sorteia-se um vaso ao acaso. Dado que o vaso sorteado apresentou virose, qual a probabilidade de que ele tenha sido oriundo da variedade 1 e porta-enxerto 2?

Dado que o vaso sorteado apresenta virose, qual a probabilidade de que tenha sido oriundo da variedade 1?

Referências

- ANDRADE, D.F.; OGLIARI, P.J. **Estatística para as ciências agrárias e biológicas com noções de experimentação**. Editora da UFSC, Florianópolis, 2007.
- ZOCCHI, S.S.; LEANDRO, R.A. **Notas para acompanhar a disciplina LCE-211-Estatística Geral**. ESALQ-USP, Piracicaba, S.P. 1999.