Física IV - Aula 4 - Relatividade Restrita

As equações de Maxwell, como todas as leis da Física, são formuladas com respeito a referenciais inerciais. Dessa forma, as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com velocidade $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ com respeito a um dado referencial inercial. Consequentemente, uma questão central neste contexto consiste em determinar qual referencial privilegiado é esse e qual é a forma da equação da onda nos demais referenciais.

Nesta aula abordaremos esse problema deduzindo as transformações de Lorentz a partir de considerações gerais sobre as condições impostas às transformações entre referenciais inerciais pelo princípio da relatividade, homogeneidade e isotropia do espaçotempo e pela condição de causalidade. Em particular, diferentemente das abordagens tradicionais, baseadas no original de Einstein, não empregaremos a hipótese central da invariância da velocidade da luz.

Muito embora tal hipótese esteja devidamente fundamentada sobre resultados experimentais, formular a teoria da relatividade especial a partir de uma propriedade fundamental dos fenômenos eletromagnéticos, a saber, a constância da velocidade da luz, restringe aparentemente a sua validade a tal classe de fenômenos naturais. Pelo contrário, toda evidência experimental coletada nos últimos 100 anos aponta para a validade da relatividade restrita em qualquer fenômeno natural, independente da natureza eletromagnética da interação, i.e., mesmo para aqueles mediados pelas interações forte, fraca e gravitacional.

Um ponto importante a se ressaltar é que a teoria da relatividade restrita não é uma consequência da sincronização de relógios através de sinais eletromagnéticos, mas sim é a validade da teoria da relatividade que restringe os sinais eletromagnéticos a apresentarem tais propriedades de propagação.

De um ponto de vista mais moderno, a teoria da relatividade restrita constitui um ingrediente fundamental na descrição da arena espaçotemporal que onde todos os fenômenos físicos ocorrem. De uma forma mais abstrata, a teoria da relatividade especial afirma que todas as leis físicas são invariantes sob o grupo de Lorentz não-homogêneo, também conhecido como grupo de Poincaré. Por exemplo, a relatividade restrita impõem que todas as partículas sejam descritas por representações irredutíveis do grupo de Poincaré, o que permite, mas não requer, que existam objetos com massa nula. Dessa forma, mesmo que eventualmente se constate que o fóton possui uma massa não-nula, não haveria nenhuma contradição com a relatividade restrita em si.

1- O Princípio da Relatividade

De uma forma bem geral, o princípio da relatividade pode ser enunciado da seguinte maneira:

AXIOMA 1: "Existe uma classe não enumerável de referenciais fisicamente indistinguíveis ou equivalentes. Em particular, os referenciais dessa classe são denominados referenciais inerciais."

Posto em outras palavras, o princípio da relatividade afirma que as leis da Física assumem a mesma forma em qualquer referencial inercial. Consequentemente, não é possível distinguir referenciais inerciais através de fenômes físicos. Naturalmente, isso não significa que o valor de quantidades físicas deva ser o mesmo em todos os referenciais inerciais: apenas as relações entre elas deve permanecer invariante. Desse ponto de vista o princípio da relatividade é sobre o que não se altera quando consideramos uma transformação entre dois referenciais inerciais arbitrários, i.e., as leis da Física.

Nesse contexto, a teoria da relatividade fornece as leis de transformação, doravante denominadas transformações inerciais, que permitem relacionar as expressões de uma mesma quantidade física em dois referenciais inerciais distintos.

É importante ressaltar que o princípio da relatividade constitui uma generalização do princípio da inércia, ou seja, que um objeto físico não possui um estado de movimento absoluto ou descanso.

Nosso próximo passo consiste em obter relações funcionais para as transformações inerciais. Para tanto, vamos considerar as coordenadas espaçotemporais de de um evento arbitrário do ponto de vista de dois referênciais inerciais distintos

$(t, x), (t', x') \in \mathbb{R}^2$.

Para uma maior clareza do raciocínio restringimos a nossa análise ao caso $(1+1)$-dimensional.

Como supomos a existência de uma classe não enumerável (contínua e infinita) de referenciais inerciais equivalentes, as transformações entre tais referenciais devem depender de um certo conjunto de parâmetros contínuos:

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_N \}$$

que fixa a transformação relacionando a descrição do evento em questão entre dois referênciais inerciais, a saber,

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x; a_1, \dots, a_N), \\ t' &= g(t, x; a_1, \dots, a_N). \end{aligned} \tag{1}$$

A seguir restringimos o conjunto de parâmetros A com os seguintes argumentos:

(i) Podemos empregar a existência de duas classes especiais de transformações inerciais:

(a) translações espaciais: $x' = x + \xi, \ \forall \xi \in \mathbb{R}$ (2a)

(b) translações temporais : $t' = t + \tau \quad , \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$ (2b)

que refletem duas de nossas hipóteses centrais sobre a natureza, a saber:

(a) Homogeneidade do espaço: num espaçotempo vazio experimentos feitos aqui ou a milhares de anos-luz, realizados sob as mesmas condições experimentais, devem fornecer os mesmos resultados;

(b) Homogeneidade do tempo: num espaçotempo vazio experimentos feitos hoje ou (h)á milhares de anos, realizados sob as mesmas condições experimentais, devem fornecer os mesmos resultados;

para fixar dois parâmetros do conjunto A. Em outras palavras, as hipóteses (a) e (b) acima correspondem a supormos que não existem pontos privilegiados na arena espaçotemporal, ou seja, todos os lugares x e instantes t são a priori equivalentes. Essa equivalência origina uma simetria por translações espaço-temporais (equações 2a e 2b), que permite escolhermos arbitrariamente as origens dos sistemas de coordenadas inerciais.

Consequentemente, podemos nos restringir, sem perda de generalidade, a referenciais inerciais com a mesma origem. Procedendo dessa forma eliminamos dois parâmetros do conjunto A,

$a_N = \xi$ e $a_{N-1} = \zeta$.

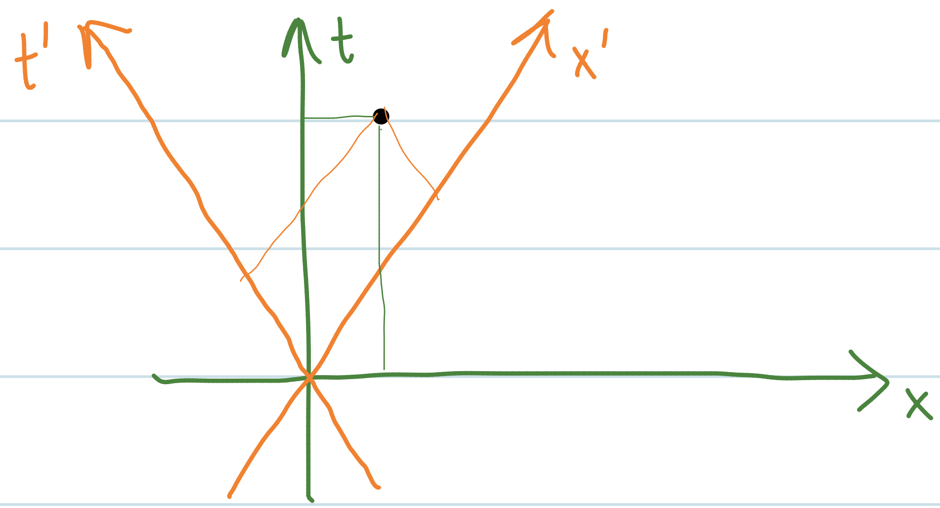
Logo, nossas transformações inerciais:

$$x' = f(t, x; a_1, \dots, a_{N-2}, \zeta, \xi) = F(t, x; a_1, \dots, a_n) \qquad (3)$$
$$t' = g(t, x; a_1, \dots a_{N-2}, \zeta, \xi) = G(t, x; a_1, \dots, a_n)$$

dependem apenas de $n = N-2$ parâmetros. Em particular, para as origens de tais referenciais, temos:

$$0 = F(0, 0, a_1, \dots, a_n) \qquad (4)$$
$$0 = G(0, 0, a_1, \dots a_n)$$

(ii) Podemos interpretar as transformações inerciais (3) como as fórmulas que relacionam o intervalo ou a distância espaçotemporal entre o evento com coordenadas (t, x) e a origem com o intervalo entre o evento (t', x') e a origem. Graficamente,



A pergunta relevante é a seguinte:

Existe um referencial inercial no qual o intervalo com coordenadas (t, x) tenha coordenadas (t', x')?

Tal pergunta equivale a saber se existe um conjunto de n parâmetros $\{a_1, \dots, a_n\}$ tais que:

$$x' = F(t, x; a_1, \dots, a_n)$$

$$t' = G(t, x; a_1, \dots, a_n)$$

está bem definido. Equivalentemente, podemos considerar as transformações entre (t, x) e (t', x') como um sistema de duas equações e n incógnitas: $\{a_1, \dots a_n\}$.

De uma forma geral, se $n \geq 2$ haverá uma única solução para tais equações. Consequentemente, seria possível encontrar um sistema de coordenadas inercial no qual um intervalo entre dois eventos pode ter coordenadas arbitrárias. Em particular, seria possível encontrar um referencial inercial no qual o efeito precederia a causa, impedindo qualquer noção de causalidade.

Por outro lado, se $n = 0$, as únicas transformações inerciais possíveis seriam as translações espaciais e temporais (2), que não constituem uma teoria da relatividade propriamente dita.

Tais argumentos permitem que tomemos $n=1$, de forma que as transformações inerciais entre dois referenciais com origens coincidentes dependem apenas de um parâmetro contínuo:

$$x' = F(t, x; a)$$
$$t' = G(t, x; a) \qquad (5)$$

já para as origens:

$$0 = F(0, 0; a)$$
$$0 = G(0, 0; a) \qquad (6)$$

Por outro lado, a partir de considerações simples, como as sugeridas pelo próprio Galileu, de que experiências mecânicas feitas sob o convés de um navio, com as escotilhas fechadas, seriam incapazes de distinguir se a nau estaria ancorada ou em movimento retilíneo uniforme, concluímos que a velocidade é o único parâmetro contínuo que pode variar entre dois referenciais inerciais quaisquer. De fato, ao incluirmos contribuições de maior ordem na taxa de variação da posição, como a aceleração, na lei de transformação entre referenciais, é necessário incluir efeitos físicos adicionais, as forças de inércia (força centrífuga, força de Coriolis, etc.) que permitem distinguir os referenciais.

Nas seções seguintes, empregaremos uma sucessão de argumentos físicos que determinarão explicitamente a forma funcional das transformações inerciais (5).

2 - Hipótese 1: Homogeneidade do Espaçotempo

AXIOMA 2: "O espaçotempo é homogêneo, i.e., seus pontos são indistinguíveis."

O axioma 2 constitui a formalização das hipóteses fundamentais que empregamos para fixar os dois primeiros parâmetros do conjunto A através da invariância das leis da Física por translações espaçotemporais. Posto de outra maneira, a transformação inercial do intervalo $(\Delta t, \Delta x)$, que nas considerações anteriores correspondia a

$$\Delta t = t - 0 \quad , \quad \Delta x = x - 0 \, ,$$

depende apenas do intervalo ("distância" entre os pontos que o definem) e não da localização dos pontos de fronteira, i.e., o intervalo transformado

$(\Delta t', \Delta x')$ é independente de tais pontos.

Para um intervalo infinitesimal (dt, dx), que, pela regra da cadeia, está relacionado com (dt', dx') por:

$$dx' = \partial_x F \, dx + \partial_t F \, dt, \qquad (7)$$
$$dt' = \partial_x G \, dx + \partial_t G \, dt,$$

o axioma 2 demanda que os coeficientes de dx e dt sejam independentes de x e t. Logo,

$$\partial_x F = H(a), \quad \partial_t F = -K(a)$$
$$\partial_x G = -M(a), \quad \partial_t G = L(a)$$

em que $H, K, L, M : D \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ são funções contínuas do parâmetro a. Os sinais foram introduzidos para futura conveniência de notação.

Integrando tais relações, obtemos:

$$F(t, x; a) = H(a)\, x - K(a)\, t + \varphi,$$
$$G(t, x; a) = L(a)\, t - M(a)\, x + \theta,$$

em que $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$ são constantes de integração, que podem ser determinadas pela condição de que as origens dos dois referenciais devem coincidir,

$$0 = F(0, 0; a) \Rightarrow \varphi = 0$$

$$0 = G(0,0;a) \Rightarrow \theta = 0.$$

Portanto,

$$x' = H(a)\,x - K(a)\,t \qquad (8a)$$

$$t' = L(a)\,t - M(a)\,x \qquad (8b)$$

É claro que a transformação inercial definida por (8) é linear. Tal linearidade possui importantes consequências físicas. Para considerá-las é conveniente introduzir a seguinte definição:

Definição 3: "Denominam-se movimentos inerciais aqueles obtidos através da aplicação de uma transformação inercial a um corpo em repouso com respeito a um dado referencial inercial."

Em outras palavras, um objeto está em movimento inercial, se existir uma transformação inercial para um referencial inercial no qual tal objeto esteja em repouso. Claramente, movimentos inerciais são caracterizados pelo mesmo parâmetro que as transformações inerciais. De acordo com a (8a), a equação de movimento para um corpo em movimento inercial é:

$$H(a)x - K(a)t = k \ , \quad k \in \mathbb{R} \qquad (9)$$

Assim, excetuando-se casos patológicos, nos quais $K(a) = 0$ ou $H(a) = 0$, movimentos inerciais são movimentos uniformes com velocidade:

$$v = K(a)/H(a) \ .$$

Sugerindo, pois, que usemos a velocidade v no lugar do parâmetro indefinido a para caracterizar as transformações inerciais. Introduzindo as funções:

$$\gamma(v) = H(a) \ , \quad \lambda(v) = L(a)/H(a) \ , \quad \mu(v) = M(a)/H(a)$$

as transformações inerciais podem ser convenientemente escritas como:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)\,(x - vt) \\ t' &= \gamma(v)\,[\lambda(v)t - \mu(v)t] \end{aligned} \qquad (10)$$

em termos das funções:

$$\gamma : D \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R} \ , \quad \lambda, \mu : D \setminus \ker(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R} \ ,$$

cuja continuidade é consequência da continuidade das funções H, K, L e M originais.

Estudemos brevemente os casos patológicos excluídos de nossa análise. Primeiramente, o anulamento de $H(a)$ demanda

$$K(a)t = k \ ,$$

Assim, a menos que K(a) também se anule, todos os referenciais inerciais teriam tempos constantes, em clara contradição com a experiência. Finalmente, o anulamento de K(a) implica que o único movimento inercial possível é o repouso absoluto. Novamente, uma situação que vai de encontro à experiência. Por conseguinte, podemos prosseguir sem real perda de generalidade excluindo tais casos patológicos.

3- Hipótese 2: Isotropia do Espaço

AXIOMA 4: " O espaço é isotrópico, i.e., suas direções espaciais são fisicamente indistinguíveis ou equivalentes. "

O axioma 4 nos diz que não existe nenhuma direção espacial preferencial. Assim, num espaço vazio devemos obter as mesmas medições experimentais ao apontarmos um telescópio em todas as direções possíveis. A isotropia do espaço, ou seja, a equivalência de todas as possíveis orientações, afirma, pois, que as leis da Física devem ser invariantes sob rotações espaciais. Em espaçotempos com uma única direção espacial, como o que consideramos nesta aula, onde só existem duas orientações possíveis: a positiva $x>0$ e a negativa $x<0$, o grupo de rotações coincide com o das reflexões. Portanto, se (t,x) e (t',x') são dois eventos relacionados por uma transformação inercial parametrizada por uma velocidade v, então os eventos obtidos por uma reflexão espacial: $(t,-x)$ e $(t',-x')$ também estão relacionados por uma transformação inercial. Logo, se

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)(x - vt) \\ t' = \gamma(v)[\lambda(v)t - \mu(v)x] \end{cases} \iff \begin{cases} -x' = \gamma(u)(-x - ut) \\ t' = \gamma(u)[\lambda(u)t + \mu(u)x] \end{cases} \tag{12}$$

para algum parâmetro desconhecido $u \in \mathbb{R}$. Comparando os dois sistemas de equação acima, concluímos que:

$$\gamma(v) = \gamma(u) \tag{13a}$$

$$-v\gamma(v) = u\gamma(u) \tag{13b}$$

$$\gamma(v)\lambda(v) = \gamma(u)\lambda(u) \tag{13c}$$

$$-\gamma(v)\mu(v) = \gamma(u)\mu(u) \tag{13d}$$

Segue trivialmente de (13a) e (13b) que:

$$-v\gamma(v) = u\gamma(u) \overset{(a)}{\iff} -v\gamma(v) = u\gamma(v)$$

$$\iff -v = u, \quad \gamma(v) \neq 0 \tag{14}$$

Um resultado tão natural, expressando a velocidade relativa entre os referenciais inerciais refletidos como o oposto da velocidade relativa entre os referenciais originais, poderia ser tomado como óbvio. É gratificante (e um indicativo de que não estamos cometendo nenhum erro crasso), no entanto, deduzí-lo a partir de primeiros princípios. Em virtude da equação (14), obtemos a partir das equações (13) remanescentes as paridades das funções γ, λ e μ:

$$\gamma(v) = \gamma(-v), \quad \forall v \in D \tag{15a}$$

$$\lambda(v) = \lambda(-v), \quad \forall v \in D \setminus \ker(\gamma) \tag{15b}$$

$$\mu(v) = -\mu(-v), \quad \forall v \in D \setminus \ker(\gamma) \tag{15c}$$

Alternativamente, as mesmas expressões poderiam ter sido obtidas a partir da hipótese de invariância sob inversão temporal das transformações inerciais. Por outro lado, podemos tomar a simetria de inversão temporal como uma consequência de sua contraparte espacial.

Exercício 1: "Sejam dois eventos (t, x) e (t', x') relacionados por uma transformação inercial parametrizada por v. Usando as relações (15) demonstre que os eventos obtidos pela inversão temporal, i.e., $(-t, x)$ e $(-t', x')$ estão relacionados por uma transformação inercial parametrizada por $-v$."

4- Hipótese 3: Estrutura de Grupo

A equivalência entre referenciais inerciais requer que o conjunto de todas as transformações inerciais possua uma estrutura de grupo.

Definição 5: "Um conjunto não-vazio G dotado de uma operação binária

$$\cdot : G \times G \to G, \quad G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 \in G$$

denominada produto e uma operação unária bijetora

$$^{-1} : G \to G, \quad G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$$

denominada inversa é dito um grupo se satisfizer as seguintes propriedades:

(1) Elemento neutro: $\exists!\, e \in G \mid g \cdot e = e \cdot g = g, \ \forall g \in G$

(2) Inversa: $\forall g \in G, \ \exists!\, g^{-1} \in G \mid g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

(3) Associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \forall a, b, c \in G$."

Verifiquemos que condições a definição 5 impõe nas funções γ, λ e μ que determinam as transformações inerciais:

(1) Elemento neutro: deve existir um parâmetro $v \in D$ tal que $x' = x$ e $t' = t$. Consequentemente,

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)\,(x - vt) = x \\ t' = \gamma(v)\,[\lambda(v)\,t - \mu(v)\,x] = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 0 & \\ \gamma(0) = 1 & (18a) \\ \lambda(0) = 1 & (18b) \\ \mu(0) = 0 & (18c) \end{cases}$$

Logo, corroborando a nossa intuição, a transformação inercial que corresponde ao elemento neutro é parametrizada por $v = 0$. Note também que a equação (18c) é uma consequência elementar de μ ser uma função ímpar.

Para encontrar as condições impostas pelas demais propriedades da definição 5 é conveniente empregarmos o isomorfismo entre as transformações lineares e o espaço vetorial de matrizes para representarmos as transformações inerciais por matrizes. Como um evento arbitrário (t, x) pode ser representado pelo vetor $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, podemos representar a transformação inercial parametrizada por $v \in \mathbb{R}$ relacionando os eventos (t, x) e (t', x') por:

$$T(v) : D \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\mu(v) & \lambda(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \qquad (19)$$

(2) Inversa: Se

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = T(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix},$$

a transformação inversa deve ter a mesma forma funcional, mas ser parametrizada por um parâmetro diferente:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = T(w) \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad T(w) = \gamma(w) \begin{pmatrix} 1 & -w \\ -\mu(w) & \lambda(w) \end{pmatrix},$$

de forma que:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = T(w) \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = T(w) T(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = T(v)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = T(v)T(w)\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, as transformações inerciais devem satisfazer:

$$T(w)T(v) = T(v)T(w) = \mathbb{1}. \tag{20}$$

Calculando explicitamente os produtos matriciais:

$$T(w)T(v) = \gamma(v)\gamma(w)\begin{pmatrix} 1 + w\mu(v) & -v - w\lambda(v) \\ -\lambda(w)\mu(v) - \mu(w) & \lambda(v)\lambda(w) + v\mu(w) \end{pmatrix}$$

$$T(v)T(w) = \gamma(v)\gamma(w)\begin{pmatrix} 1 + v\mu(w) & -w - v\lambda(w) \\ -\lambda(v)\mu(w) - \mu(v) & \lambda(v)\lambda(w) + w\mu(v) \end{pmatrix}$$

Analisemos inicialmente as condições impostas por:

$$T(w)T(v) = T(v)T(w)$$

a saber:

$$\begin{cases} 1 + w\mu(v) = 1 + v\mu(w) \\ -v - w\lambda(v) = -w - v\lambda(w) \\ -\lambda(w)\mu(v) - \mu(w) = -\mu(v) - \lambda(v)\mu(w) \\ \lambda(v)\lambda(w) + v\mu(w) = \lambda(v)\lambda(w) + w\mu(v) \end{cases}$$

que para parâmetros não-nulos, i.e., $v \neq 0$ e $w \neq 0$, correspondem a:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mu(v)}{v} = \dfrac{\mu(w)}{w} \\[2mm]
\dfrac{1-\lambda(v)}{v} = \dfrac{1-\lambda(w)}{w} \\[2mm]
\dfrac{1-\lambda(v)}{\mu(v)} = \dfrac{1-\lambda(w)}{w} \\[2mm]
\dfrac{\mu(v)}{v} = \dfrac{\mu(w)}{w}
\end{cases}
$$

Claramente, apenas as duas primeiras relações são independentes. Além disso, ambas as relações remanescentes apresentam conteúdos similares, definindo funções independentes dos parâmetros v e w. De fato, introduzindo as funções:

$$A(v) = \frac{\mu(v)}{v} \quad e \quad B(v) = \frac{1-\lambda(v)}{v} \qquad (21)$$

podemos resolver as duas primeiras equações acima como:

$$A(v) = A(w) \quad e \quad B(v) = B(w),$$

relações que só podem ser verdadeiras, em geral, se

$$A(v) = k_1 \quad e \quad B(v) = k_2, \quad \forall v \in D \setminus \ker(\gamma), \; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \qquad (22)$$

Derivando ambas as equações (22) com respeito a seus parâmetros e empregando as definições (22), obtemos:

$$0 = \partial_v A(v) = \partial_v\left(\frac{\mu(v)}{v}\right) = \frac{\partial_v \mu(v)}{v} - \frac{\mu(v)}{v^2}$$

$$0 = \partial_v B(v) = \partial_v\left(\frac{1-\lambda(v)}{v}\right) = -\frac{\partial_v \lambda(v)}{v} - \frac{1-\lambda(v)}{v^2}$$

que, em conjunto com as relações (18b) e (18c) fornecem às seguintes equações diferenciais ordinárias para μ e λ:

$$\begin{aligned} v\,\mu'(v) - \mu(v) &= 0 \,, \quad \mu(0) = 0 \\ v\,\lambda'(v) + \lambda(v) - 1 &= 0 \,, \quad \lambda(0) = 1 \end{aligned} \tag{23}$$

cujas soluções gerais são:

$$\begin{aligned} \mu(v) &= \alpha v \,, & \alpha \in \mathbb{R} \\ \lambda(v) &= 1 + \frac{\tilde{\alpha}}{v} \,, & \tilde{\alpha} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercício 2: "Verifique que o $\mu(v)$ e $\lambda(v)$ dados acima constituem soluções gerais das equações diferenciais (23)."

Empregando as condições iniciais, determinamos apenas que $\tilde{\alpha} = 0$. Logo,

$$T(v)T(w) = T(w)T(v) \Rightarrow \begin{cases} \mu(v) = \alpha v \,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \lambda(v) = 1 \end{cases} \tag{24}$$

Resta analisarmos as condições impostas por uma das equações:

$$T(v)T(w) = \mathbb{1} \quad \text{ou} \quad T(w)T(v) = \mathbb{1} \,.$$

Por concreteza, concentremo-nos na segunda,

$$\begin{cases} \gamma(v)\gamma(w)\left[1 + w\mu(v)\right] = 1 \\ \gamma(v)\gamma(w)\left[\lambda(v)\lambda(w) + v\mu(w)\right] = 1 \\ -v - w\lambda(v) = 0 \\ -\lambda(w)\mu(v) - \mu(w) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

empregando as condições (24), o sistema (25) se simplifica

$$\begin{cases} \gamma(v)\gamma(w)\left[1 + \alpha w v\right] = 1 \\ \gamma(v)\gamma(w)\left[1 + \alpha v w\right] = 1 \\ -v - w = 0 \\ -\alpha v - \alpha w = 0 \end{cases}$$

que é equivalente às condições:

$$\begin{cases} \gamma(v)\gamma(w)\left[1 + \alpha w v\right] = 1 \\ v = -w \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos:

$$\gamma(v)\gamma(-v)\left[1 - \alpha v^2\right] = 1$$

Como γ é uma função par, concluímos que:

$$\gamma^2(v)\left[1 - \alpha v^2\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma(v) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha v^2}} \tag{27}$$

Coletando todas as condições impostas pela existência da transformação inercial inversa, concluímos que uma transformação inercial parametrizada por uma velocidade $v \in D \setminus \ker(\gamma)$ tem a seguinte forma:

$$T(v) = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\alpha v & 1 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{28}$$

em que escolhemos o sinal positivo, pois $\gamma(0) = 1$.

Note que com isso também provamos que a transformação inercial inversa a $T(v)$ é $T(-v)$, ou seja, a transformação inversa é parametrizada pelo oposto da velocidade da transformação original.

(3) Associatividade: Sejam $v_1, v_2, v_3 \in D \setminus \ker(\gamma)$, precisamos impor que

$$T(v_1)\left[T(v_2)T(v_3)\right] = \left[T(v_1)T(v_2)\right]T(v_3).$$

Para tanto, é necessário primeiramente garantir que a composição de duas transformações inerciais seja também uma transformação inercial, i.e., devemos encontrar o parâmetro $v \in D \setminus \ker(\gamma)$ associado à transformação inercial

$$T(v) = T(v_1)\,T(v_2).$$

Calculando explicitamente,

$$T(v_1)\,T(v_2) = \gamma(v_1)\gamma(v_2)\begin{pmatrix} 1+\alpha v_1 v_2 & -(v_1+v_2) \\ -\alpha(v_1+v_2) & 1+\alpha v_1 v_2 \end{pmatrix}$$

$$= (1+\alpha v_1 v_2)\,\gamma(v_1)\gamma(v_2)\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{v_1+v_2}{1+\alpha v_1 v_2} \\ -\dfrac{\alpha(v_1+v_2)}{1+\alpha v_1 v_2} & 1 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

Como uma transformação inercial parametrizada por v é representada pela matriz:

$$T(v) = \gamma(v)\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\alpha v & 1 \end{pmatrix}, \qquad (30)$$

concluímos que

$$T(v) = T(v_1)\,T(v_2) \iff \begin{cases} v = \dfrac{v_1+v_2}{1+\alpha v_1 v_2} & (31a) \\ \gamma(v) = (1+\alpha v_1 v_2)\,\gamma(v_1)\,\gamma(v_2) & (31b) \end{cases}$$

Portanto, a equação (31a) fornece a lei de adição de velocidades da nossa teoria da relatividade se a condição de consistência (31b) for satisfeita.

De fato,

$$\gamma^2(v) = \frac{1}{1-\dfrac{\alpha(v_1+v_2)^2}{(1+\alpha v_1 v_2)^2}} = \frac{(1+\alpha v_1 v_2)^2}{(1+\alpha v_1 v_2)^2 - \alpha(v_1+v_2)^2}$$

$$= \frac{(1+\alpha v_1 v_2)^2}{1+\cancel{2\alpha v_1 v_2}+\alpha^2 v_1^2 v_2^2-\alpha v_1^2-\cancel{2\alpha v_1 v_2}-\alpha v_2^2}$$

$$\Rightarrow \gamma^2(v) = \frac{(1+\alpha v_1 v_2)^2}{(1-\alpha v_1^2)(1-\alpha v_2^2)} = (1+\alpha v_1 v_2)^2 \gamma_1^2(v_1)\gamma_2^2(v_2).$$

Consequentemente, ao impormos que a composição de duas transformações inerciais também constituísse uma transformação inercial, obtivemos como subproduto a lei da adição de velocidades. Estamos finalmente em condições de verificar a associatividade e as condições por ela impostas. Por um lado:

$$T(v_1)[T(v_2)T(v_3)] = T(v_1)T(v_{23}) = T\left(\frac{v_1+v_{23}}{1+\alpha v_1 v_{23}}\right),$$

com $v_{23} = \dfrac{v_2+v_3}{1+\alpha v_2 v_3}$, de forma que:

$$\frac{v_1+v_{23}}{1+\alpha v_1 v_{23}} = \frac{v_1+v_2+v_3+\alpha v_1 v_2 v_3}{1+\alpha(v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3)}. \tag{32}$$

Por outro lado,

$$[T(v_1)T(v_2)]T(v_3) = T(v_{12})T(v_3) = T\left(\frac{v_{12}+v_3}{1+\alpha v_{12}v_3}\right),$$

com $v_{12} = \dfrac{v_1+v_2}{1+\alpha v_1 v_2}$, de forma que

$$\frac{v_{12}+v_3}{1+\alpha v_{12}v_3} = \frac{v_1+v_2+v_3+\alpha v_1 v_2 v_3}{1+\alpha(v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3)} \tag{33}$$

que coincide com a equação (32). Logo,

$$T(v_1)[T(v_2)T(v_3)] = [T(v_1)T(v_2)]T(v_3)$$

e a associatividade está verificada. Note, contudo, que a associatividade não impõe nenhuma condição adicional à teoria, sendo trivialmente satisfeita a partir das propriedades obtidas anteriormente.

Resta ainda determinarmos o parâmetro real α. Vamos dividir a nossa análise desse parâmetro em três casos:

(i) $\alpha < 0$: nesse caso podemos escrever $\alpha = -c^{-2}$, em que $c \in \mathbb{R}$ possui dimensão de velocidade. As transformações inerciais assumem a seguinte forma:

$$T_-(v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2/c^2}}\begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/c^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1+v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t+vx/c^2}{\sqrt{1+v^2/c^2}} \tag{34}$$

enquanto que a lei de adição de velocidades fica:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} . \tag{35}$$

Note que neste caso, qualquer valor real de velocidade é permitido, i.e., $v \in (-\infty, \infty)$.

(ii) $\alpha = 0$: as expressões se simplificam consideravelmente neste caso:

$$T_0(v) = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\Rightarrow \quad x' = x - vt \;, \quad t' = t \;,$$

enquanto que a lei de adição de velocidades fica:

$$v = v_1 + v_2 . \tag{37}$$

Note que as transformações inerciais (36) correspondem às transformações de coordenadas usuais da mecânica galileu-newtoniana. O grupo formado por tais transformações inerciais é por isso denominado grupo de Galileu.

(iii) $\alpha > 0$: denotando $\alpha = c^{-2}$, em que $c \in \mathbb{R}$ também possui dimensões de velocidade, temos as seguintes transformações inerciais:

$$T_+(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{38}$$

com a lei de adição de velocidades:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{39}$$

Tais transformações inerciais são conhecidas como transformações de Lorentz.

Note que a velocidade como parâmetro de uma transformação de Lorentz está limitada ao subconjunto $-c \leq v \leq c$.

Exercício 3: "Demonstre que as transformações de Lorentz limitam a velocidade parametrizando a transformação inercial ao intervalo $-c \leq v \leq c$."

Ao impormos três hipóteses sobre a natureza do espaço tempo e sobre a a forma das leis da Física sob diferentes perspectivas, a saber:

1 - Homogeneidade do espaçotempo;

2 - Isotropia do espaço;

3 - Estrutura de Grupo;

encontramos três possíveis formulações para as transformações inerciais, dependendo do valor do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$. Resta determinarmos quais dessas três teorias da relatividade é de fato respeitada pela natureza.

5 - Hipótese 4 : Causalidade

Seja Δt o intervalo temporal entre dois eventos de acordo com um sistema referencial inercial, e considere seu comportamento sob as transformações inerciais:

(i) $$\Delta t' = \frac{\Delta t + \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad v \in \mathbb{R} \tag{40a}$$

(ii) $$\Delta t' = \Delta t \tag{40b}$$

$$\text{(i)} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \,, \quad -c \leqslant v \leqslant c \tag{40c}$$

Assim, apenas no caso (ii), correspondendo às transformações de Galileu, o intervalo temporal não depende do referencial. Tal propriedade explicita o caráter absoluto do tempo no contexto da relatividade de Galileu, ou seja, o tempo passa da mesma maneira para todos os observadores inerciais. Dessa forma, fica claro que a transformação (40b) preserva o ordenamento temporal entre dois eventos, em particular, a causa sempre precede a consequência.

Devido à dependência no referencial das transformações (40a) e (40c) não é óbvio, nem válido em geral, que a ordem temporal entre dois eventos arbitrários seja preservada por tais transformações. Por outro lado, a nossa experiência diária nos ensina que nenhum efeito pode preceder a sua causa, corroborando a existência de pelo menos um ordenamento parcial dentre todos os eventos possíveis. Tal ordenamento parcial é a essência do princípio da causalidade, que enunciamos a seguir.

AXIOMA 6: "Existe uma classe de pares de eventos espaçotemporais para os quais o sinal do intervalo temporal Δt entre eles é o mesmo para todos os referenciais inerciais. Ademais, os eventos que constituem tais pares são ditos causalmente conectados."

Da discussão anterior, é óbvio que tal classe de eventos existe para as transformações de Galileu. De fato, tal classe coincide com todos os eventos possíveis. Resta verificarmos se as transformações (40a) e (40c) satisfazem o princípio da causalidade.

(i) Suponha que $\Delta t > 0$ em um dado referencial inercial S, consequentemente, aplicando a transformação inercial (40a) obtemos o intervalo temporal

$$\Delta t' = \frac{\Delta t + \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad v \in \mathbb{R}$$

de acordo com o referencial inercial S'. Logo, se considerarmos uma transformação inercial parametrizada por

$$v < -c^2 \, \Delta t / \Delta x \, ,$$

concluiremos que existe pelo menos um referencial inercial para o qual $\Delta t' < 0$. Portanto, as transformações (40a) violam o princípio da causalidade, pois para qualquer par de eventos existe ao menos um referencial inercial para o qual $\Delta t > 0$ e outro para o qual $\Delta t' < 0$.

(ii) Similarmente, suponha que $\Delta t > 0$ em um dado referencial inercial S, consequentemente, aplicando a transformação de Lorentz (40c), obtemos

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \, , \quad -c \leqslant v \leqslant c \, .$$

Considerando os intervalos tais que $\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \leqslant c$, temos que

$$\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \geqslant \Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \right) \geqslant 0 \, ,$$

pois $-c \leqslant v \leqslant c$. Logo, para intervalos tais que $\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \leqslant c$, se $\Delta t > 0$ em S', teremos necessariamente que $\Delta t' > 0$ em S'.

Note que a classe de eventos causalmente conectados por transformações de Lorentz, isto é, aqueles que satisfazem $\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \leqslant c$, é não-vazia, pois uma partícula viajando com velocidade constante $v \in [-c, c]$ fornece intervalos entre quaisquer dois pontos de sua trajetória

$$x = v t$$

que satisfazem

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| = |v| \leqslant c .$$

Portanto, o princípio da causalidade nos permitiu eliminar as transformações (40a) como candidatas às transformações inerciais implementadas pela natureza. Restam, contudo, ainda duas possibilidades, as transformações de Galileu (40a) e de Lorentz (40c).

6 - Eletromagnetismo de Maxwell

Para determinarmos qual das transformações inerciais: Galileu ou Lorentz são de fato observadas na natureza, precisamos de dados experimentais. Antes de discutirmos alguns dos diversos experimentos que comprovam a validade das transformações de Lorentz em detrimento das de Galileu, é conveniente verificarmos a compatibilidade dos grupos de

Galileu e Lorentz com demais teorias físicas cuja validade experimental já tenha sido estabelecida. Nesse contexto, uma possibilidade promissora é fornecida pela eletrodinâmica de Maxwell. Muito embora seja possível demonstrar que as equações de Maxwell são invariantes pelo grupo de Lorentz e não pelo de Galileu, por vínculos temporais nos contentaremos apenas com a constatação de que uma de suas consequências: a equação das ondas

$$\partial_x^2 \psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi = 0 \quad , \quad \psi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$$

é invariante apenas pelas transformações de Lorentz.

Consideramos inicialmente o efeito de uma transformação de Galileu:

$$x' = x - vt \quad , \quad t' = t$$

da regra da cadeia temos que:

$$\begin{cases} \partial_x = \partial_x x' \partial_{x'} + \partial_x t' \partial_{t'} = \partial_{x'} \\ \partial_t = \partial_t x' \partial_{x'} + \partial_t t' \partial_{t'} = -v \partial_{x'} + \partial_{t'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x^2 = \partial_{x'}^2 \\ \partial_t^2 = v^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{t'}^2 - 2v \partial_{t'} \partial_{x'} \end{cases}$$

Consequentemente, após uma transformação de Galileu, a equação da onda assume a seguinte forma:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\partial_{x'}^2\psi-\frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2\psi+\frac{2v}{c^2}\partial_{x'}\partial_{t'}\psi=0$$

que não descreve a propagação de ondas eletromagnéticas. Consequentemente as transformações de Galileu não obedecem ao princípio da relatividade no contexto do eletromagnetismo de Maxwell, posto que não preservam a forma das leis físicas em todos os referenciais inerciais.

Já para transformações de Lorentz:

$$x'=\gamma(v)(x-vt),\quad t'=\gamma(v)\left(t-\frac{v}{k^2}x\right),$$

em que usamos k no lugar de c para evitarmos confusão com a velocidade da luz, temos pela regra da cadeia:

$$\begin{cases}\partial_x=\gamma(v)\partial_{x'}-\gamma(v)\frac{v}{k^2}\partial_{t'}=\gamma(v)\left(\partial_{x'}-\frac{v}{k^2}\partial_{t'}\right)\\ \partial_t=-\gamma(v)v\,\partial_{x'}+\gamma(v)\partial_{t'}=\gamma(v)\left(-v\,\partial_{x'}+\partial_{t'}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\partial_x^2=\gamma^2(v)\left(\partial_{x'}^2-\frac{2v}{k^2}\partial_{x'}\partial_{t'}+\frac{v^2}{k^4}\partial_{t'}^2\right)\\ \partial_t^2=\gamma^2(v)\left(v^2\partial_{x'}^2-2v\,\partial_{x'}\partial_{t'}+\partial_{t'}^2\right)\end{cases}$$

Logo, sob uma transformação de Lorentz, a equação da onda fica:

$$\gamma^2(v)\left[\partial^2_{x'}\psi - \frac{2v}{k^2}\partial_{x'}\partial_{t'}\psi + \frac{v^2}{k^4}\partial^2_{t'}\psi - \frac{v^2}{c^2}\partial^2_{x'}\psi + \frac{2v}{c^2}\partial_{x'}\partial_{t'}\psi - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t'}\psi\right] = 0$$

$$\gamma^2(v)\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\partial^2_{x'}\psi - \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2c^2}{k^4}\right)\partial^2_{t'}\psi + 2v\left(-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{c^2}\right)\partial_{x'}\partial_{t'}\psi\right] = 0$$

Assim, se tomarmos $k = c$, obtemos:

$$\gamma^2(v)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\partial^2_{x'}\psi - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t'}\psi\right] = 0$$

como

$$\gamma^2(v) = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

temos que, no referencial S' a equação das ondas assume a mesma forma que em S, i.e.,

$$\partial^2_{x'}\psi - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t'}\psi = 0.$$

Logo, no contexto da eletrodinâmica de Maxwell, as transformações de Lorentz são as únicas compatíveis com o princípio da relatividade.

7 - Considerações Experimentais

Nas últimas seções, estudamos as possíveis formas que uma transformação inercial pode assumir, ao fazermos um conjunto de hipóteses bem gerais sobre a natureza do espaçotempo. A saber, ao supormos a validade do princípio da relatividade, juntamente com a homogeneidade do espaçotempo, a isotropia do espaço e o princípio da causalidade, concluímos que apenas dois conjuntos de transformações inerciais são viáveis: as transformações de Galileu e as transformações de Lorentz. Finalmente, verificamos que apenas as transformações de Lorentz são compatíveis com o eletromagnetismo de Maxwell, ao passo que, apenas as transformações de Galileu são compatíveis com a mecânica de Newton.

Portanto, apenas uma das seguintes três opções pode ser válida:

(i) A mecânica newtoniana e as equações de Maxwell são válidas, mas o princípio da relatividade não se aplica a todas as leis físicas, isto é, existe um referencial preferencial, denominado éter, no qual a velocidade da luz é c em todas as direções. Ademais, deve ser possível através de experimentos detectar um movimento retilíneo e uniforme em relação ao referencial absoluto do éter.

(ii) O princípio da relatividade aplica-se a todas as leis da física e a mecânica de Newton está correta. Consequentemente, as equações de Maxwell devem ser modificadas, bem como tais desvios da eletrodinâmica de Maxwell, passíveis de detecção experimental.

(iii) O princípio da relatividade é válido para todas as leis físicas e a eletrodinâmica de Maxwell está correta. Logo, a mecânica de Newton deve ser modificada, bem como tais desvios devem ser experimentalmente observáveis.

A única forma de determinar qual das três asserções está correta, ou seja, é satisfeita em nosso universo, é através de experimentos. No que resta deste capítulo, discutiremos brevemente alguns dos experimentos que contribuíram para a comprovação experimental de (iii).

Um teste experimental da opção (i) foi realizado por Michelson e Morley através de uma série de experimentos ocorrida entre 1881 e 1887. A fundamentação teórica é a seguinte. Se a hipótese (i) fosse válida, deveria ser possível detectar um movimento retilíneo uniforme em relação ao éter usando a lei de adição de velocidades de Galileu. Notadamente, a velocidade da luz num referencial em movimento relativo ao éter deveria ser diferente ao longo de direções diferentes.

Tomando como referencial inercial um referencial no qual o Sol estaria em repouso, sabemos que a velocidade (de translação) da Terra é da ordem $\|v_T\| \simeq 30$ km/s e apresenta sentidos opostos em intervalos de meio ano. Assim, mesmo que em um dado instante de tempo, o referencial ligado à Terra esteja em repouso com respeito ao referencial absoluto do éter, seis meses mais tarde, ele se movimentaria com uma velocidade relativa da ordem de 60 km/s. Com isso, por pelo menos meio ano a Terra se movimentaria a pelo menos 30 km/s com respeito a qualquer referencial fixo. Dessa forma, a lei de adição de velocidades de Galileu implicaria desvios da ordem de $v_T/c \gtrsim 10^{-4}$ na velocidade de propagação da luz.

Utilizando um interferômetro de Michelson, Michelson e Morley tentaram detectar o deslocamento das franjas de interferência devido à luz se propagar com velocidades diferentes ao longo das direções ortogonais correspondentes aos braços do interferômetro. Tal deslocamento não foi observado nos experimentos realizados em 1881, quando utilizaram um interferômetro cujos braços mediam 1,2m. Posteriormente, em 1887, Michelson e Morley repetiram o experimento com um interferômetro cujos braços mediam 11m, confirmando o resultado negativo. Com isso, o cenário delineado em (i) pôde ser devidamente descartado.

Uma tentativa de manter o princípio da relatividade e a mecânica newtoniana no contexto da opção (ii) foi feita por Ritz em 1908 com a proposição da teoria da emissão. Segundo Ritz, c deveria ser interpretado como a velocidade da luz no vácuo relativa à fonte emissora, e não como a velocidade de propagação de ondas em um meio. Dessa forma, c seria sempre uma velocidade relativa, explicando, pois, o resultado nulo do experimento de Michelson e Morley, uma vez que as transformações de Galileu não afetam velocidades relativas. A teoria de Ritz só foi, contudo, devidamente falseada em 1964 por Alvager et al., que realizou medições diretas da velocidade da luz emitida por uma fonte em movimento rápido, ao estudar o decaimento $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$ no CERN. O resultado experimental foi que, se incluíssemos uma eventual dependência na velocidade da fonte v da seguinte forma:

$$c' = c + kv,$$

resultaria que $k = 0 \pm 1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Portanto, a única opção condizente com os fatos experimentais é a (iii), que demanda a validade do princípio da relatividade e da eletrodinâmica de Maxwell e corresponde a uma modificação da mecânica de Newton que deve ser compatível com transformações inerciais lorentzianas.