Eletricidade e Magnetismo - IME

Corrente elétrica, Resistência e circuitos elétricos de corrente contínua

Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

Cargas em movimento

Cargas em movimento → ***Corrente elétrica***

O caminho percorrido pela corrente denomina-se ***circuito elétrico.***

A principal função de um circuito elétrico é transferir ***energia*** de um local para ao outro.

A medida que as partículas carregadas fluem no circuito, a energia potencial elétrica é transferida de uma fonte até um dispositivo, onde é armazenada ou convertida em outra forma de energia: calor, som, luz, etc

Corrente elétrica

Movimento de cargas de uma região para a outra.

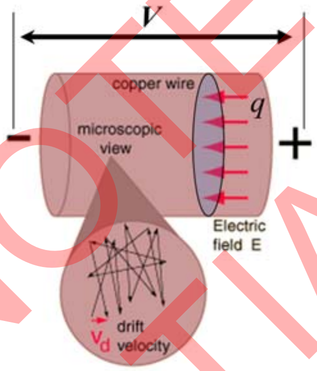
No equilíbrio eletrostático, o campo elétrico é igual a zero em todos os pontos no interior de um condutor e portanto não existe *nenhuma corrente.*

Considere agora o que ocorre quando um campo constante e estacionário ***E*** é estabelecido no interior de um condutor.

Uma partícula carregada será submetida a uma força estacionária $\vec{F} = q\vec{E}$. Se esta partícula estivesse no vácuo, ela teria uma aceleração estacionária.

No entanto, dentro de um condutor, as partículas carregadas se movem e colidem com íons grandes do material, praticamente estáticos.

Assim, o efeito resultante do campo ***E*** é tal que, além do movimento caótico das partículas carregadas, existe também um movimento muito lento, ou movimento de *arraste*, de um grupo de partículas na direção da força elétrica. Esse movimento é descrito pela ***velocidade de arraste*** $\vec{v}_d$ das partículas.



<u>Assim surge uma corrente efetiva no condutor</u>

Corrente elétrica

Definimos corrente elétrica *I*, como o movimento de ***cargas positivas***, mesmo sabendo que a corrente real é produzida pelos elétrons.

Esta escolha denomina-se ***sentido convencional de corrente.***

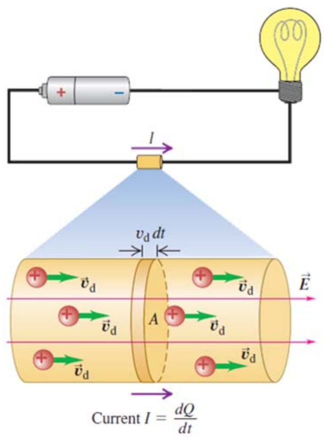
Deste modo define-se a corrente através da área com seção reta A como igual ao ***fluxo total das cargas atraves da área por unidade de tempo***.

$$I = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right) = \frac{dQ}{dt}$$

q : carga [Coulomb]

t : tempo [segundos]

I : ampère [A = C/s]



No SI a unidade de corrente elétrica é o ampère, definido como um coulomb por segundo.

Quando uma lanterna é ligada tem-se correntes da ordem de 0.5 até 1A; a corrente dos fios do motor de arranque em um motor de partida de automóvel é da ordem de 200A. As correntes em um circuito de radio e televisão são da ordem de miliamperes ou microamperes e corrente dentro de computadores são da ordem de picoamperes.

Corrente elétrica, velocidade de arraste e densidade de corrente

Sejam *n* partículas carregadas por unidade de volume. A grandeza *n* é a concentração de partículas (no SI, possui unidade m^{-3}).

Suponha que se movam com a mesma velocidade de arraste v_d . Em um intervalo dt, cada partícula se desloca $v_d\,dt$. Vamos assumir que as partículas se desloquem em uma seção circular de área A. Assim o volume ocupado pelas partículas é $A\,v_d\,dt$ e o numero de partículas em seu interior é $n\,A\,v_d\,dt$. Se cada partícula possui carga q, a carga dQ que flui para for a da extremidade do cilindro no intervalo dt é:

$$dQ = q(nAv_d dt) = nqAv_d dt$$

A corrente é: $I = \dfrac{dQ}{dt} = nqAv_d$

A densidade de corrente *J* é definida como a corrente que flui ***por unidade de área da seção reta:***

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d \qquad J: \ [\text{A/m}^2\,]$$

J e *I* independem do sinal da carga, somente depende do valor absoluto

O valor densidade de corrente inclui o sentido da velocidade de arraste:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Resistividade

A relação entre a densidade de corrente $\vec{J}$ face a um dado campo elétrico $\vec{E}$ é, em geral, bastante complexa.

Para certos materiais, especialmente metais, em uma dada temperatura $\vec{J}$ é quase diretamente proporcional a $\vec{E}$, e a razão *E / J* *permanece constante*.

Esta relação, chamada Lei de Ohm foi descoberta pelo físico alemão Georg Simon Ohm.

Define-se resistividade ρ de um material como a razão entre o módulo do campo elétrico e o módulo da densidade de corrente

$$\rho = \frac{E}{J}$$

No SI a resistividade possui unidade V.m/A ou Ω.m

Sendo Ω (ohm) a unidade de ***resistência elétrica*** (V/A)

Georg Simon Ohm

Matemática

Nacionalidade	Alemão
Nascimento	16 de março de 1789
Local	Erlangen
Morte	6 de julho de 1854 (65 anos)
Local	Munique
Atividade	
Campo(s)	Matemática
Instituições	Universidade de Munique
Alma mater	Universidade de Erlangen-Nuremberg
Tese	1811[1]
Orientador(es)	Karl Christian von Langsdorf
Conhecido(a) por	Lei de Ohm, ohmímetro
Prémio(s)	Medalha Copley (1841)

Resistividade para vários materiais

Table 25.1 Resistivities at Room Temperature (20°C)

	Substance	$\rho\ (\Omega \cdot m)$
Conductors		
Metals	Silver	1.47×10^{-8}
	Copper	1.72×10^{-8}
	Gold	2.44×10^{-8}
	Aluminum	2.75×10^{-8}
	Tungsten	5.25×10^{-8}
	Steel	20×10^{-8}
	Lead	22×10^{-8}
	Mercury	95×10^{-8}
Alloys	Manganin (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)	44×10^{-8}
	Constantan (Cu 60%, Ni 40%)	49×10^{-8}
	Nichrome	100×10^{-8}

	Substance	$\rho\ (\Omega \cdot m)$
Semiconductors		
	Pure carbon (graphite)	3.5×10^{-5}
	Pure germanium	0.60
	Pure silicon	2300
Insulators		
	Amber	5×10^{14}
	Glass	$10^{10}-10^{14}$
	Lucite	$>10^{13}$
	Mica	$10^{11}-10^{15}$
	Quartz (fused)	75×10^{16}
	Sulfur	10^{15}
	Teflon	$>10^{13}$
	Wood	$10^{8}-10^{11}$

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Table 25.2 Temperature Coefficients of Resistivity (Approximate Values Near Room Temperature)

Material	$\alpha\ [(^\circ C)^{-1}]$	Material	$\alpha\ [(^\circ C)^{-1}]$
Aluminum	0.0039	Lead	0.0043
Brass	0.0020	Manganin	0.00000
Carbon (graphite)	−0.0005	Mercury	0.00088
Constantan	0.00001	Nichrome	0.0004
Copper	0.00393	Silver	0.0038
Iron	0.0050	Tungsten	0.0045

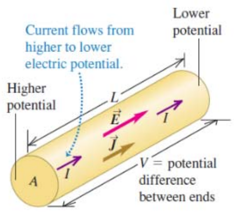
Resistência

Para um condutor com resistividade ρ temos a relação

$$\vec{E} = \rho\vec{J}$$

Quando a Lei de Ohm é obedecida, a resistividade ρ é constante

Suponha um fio condutor com seção transversal com área A e comprimento L. Quando temos um potencial V entre as extremidades, a corrente convencional I fluirá no sentido de maior potencial para o menor potencial.



Como J é uma densidade de corrente, o produto JA indicará o valor da corrente elétrica I. Agora, como temos uma corrente estacionaria, V=EL. Assim:

$I = JA$

$E = \rho J$

$V = EL \Rightarrow E = V / L$

$J = E / \rho \Rightarrow J = V / \rho L$

$$I = JA = \frac{VA}{\rho L} = \frac{V}{\left(\frac{\rho L}{A}\right)} = \frac{V}{R} \Rightarrow I = \frac{V}{R}$$

Onde definimos a resistência R como sendo

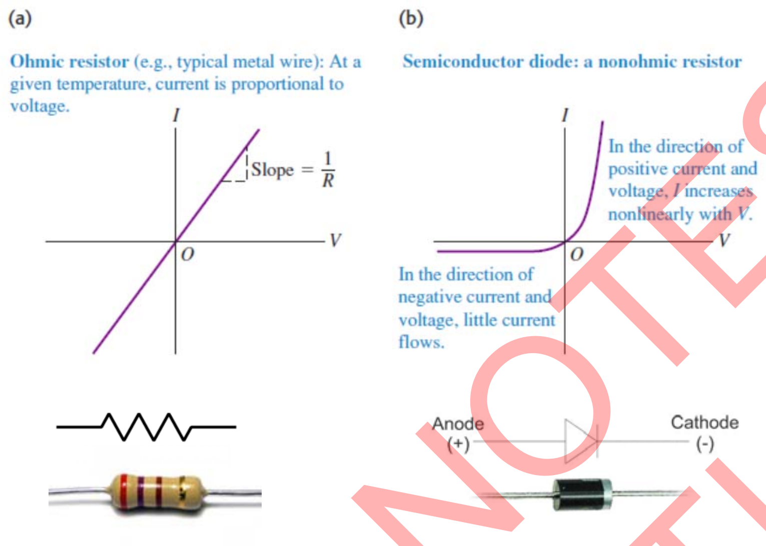
$$R = \frac{\rho L}{A}$$

E temos a Lei de Ohm relacionando, V, I e R:

$$V = RI$$

Ω (ohm) é a unidade de ***resistência elétrica*** (V/A)

Grafico IxV



Força eletromotriz e Circuitos

Corrente estacionária -> circuito completo

A corrente flui de um ponto com maior potencial para outro ponto com menor potencial e, em algum lugar do circuito, deve existir um dispositivo que novamente eleve o potencial, fazendo com que as cargas em um circuito (que são constantes) retornem de uma região de baixo potencial para outra de alto potencial.

O agente que faz a corrente fluir do potencial mais baixo para o mais elevado denomina-se ***força eletromotriz (fem)***

Todo circuito com corrente estacionária deve possuir algum dispositivo que produza uma *fem*. Tal dispositivo denomina-se ***fonte de fem**, ou **fonte de tensão**.* Exemplos são pilhas, baterias, geradores elétricos, células solares, termopares, células de combustível, etc

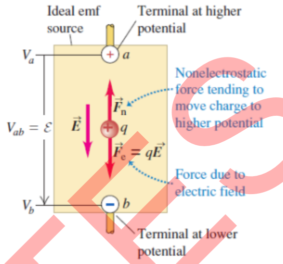
Uma fonte ideal (que não existe!) mantem um potencial constante independente da corrente que passa por ele.

Força eletromotriz e Circuitos

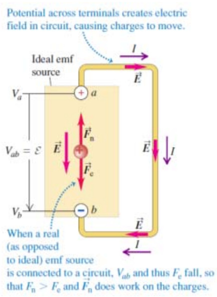
Em um circuito fechado, a função de uma fonte emf é mover cargas de localizadas em um potencial baixo para um potencial elevado de modo que o circuito funcione.

O aumento na energia potencial é igual ao trabalho ***não eletrostático*** realizado pela fonte ***emf***: $q\varepsilon = qV_{ab}$, logo:

$$V_{ab} = \mathcal{E} \quad \text{(ideal source of emf)}$$



When the emf source is not part of a closed circuit, $F_n = F_e$ and there is no net motion of charge between the terminals.



A tensão nas extremidades de um fio é dada por $V_{ab} = IR$. Logo, para um circuito fechado, alimentado por uma fonte emf ε,

$$\mathcal{E} = V_{ab} = IR \quad \text{(ideal source of emf)}$$

Fontes reais

Fontes emf reais possuem ***resistência interna***. Esta resistência, que denominaremos de *r*, acabará por ser diminuir a tensão disponível por esta fonte. Em outras palavras, parte da tensão **emf** da fonte fica nesta resistência interna:

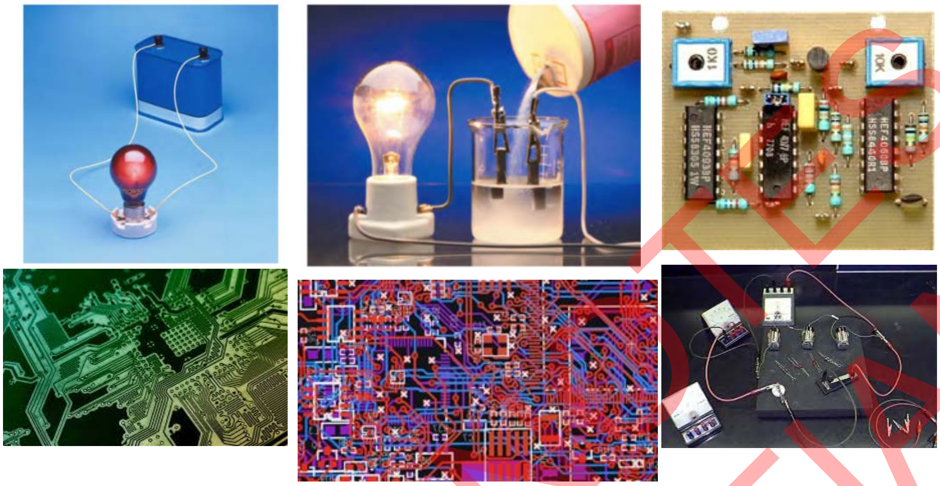
$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \quad \text{(terminal voltage, source with internal resistance)}$$

Logo, a corrente que passa por um circuito elétrico será dada por:

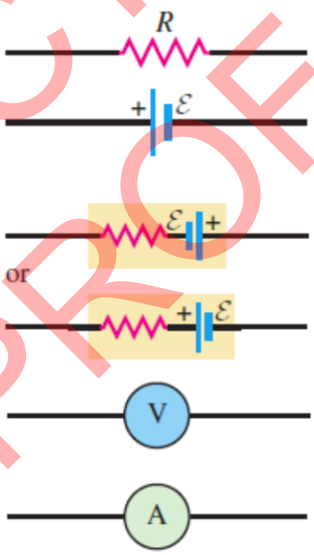
$$\mathcal{E} - Ir = IR \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad \text{(current, source with internal resistance)}$$

Assim, a resistência total do circuito é R + r .

Simbolos para circuitos elétricos



Simbolos para circuitos elétricos



Condutor com resistência desprezável

Resistor

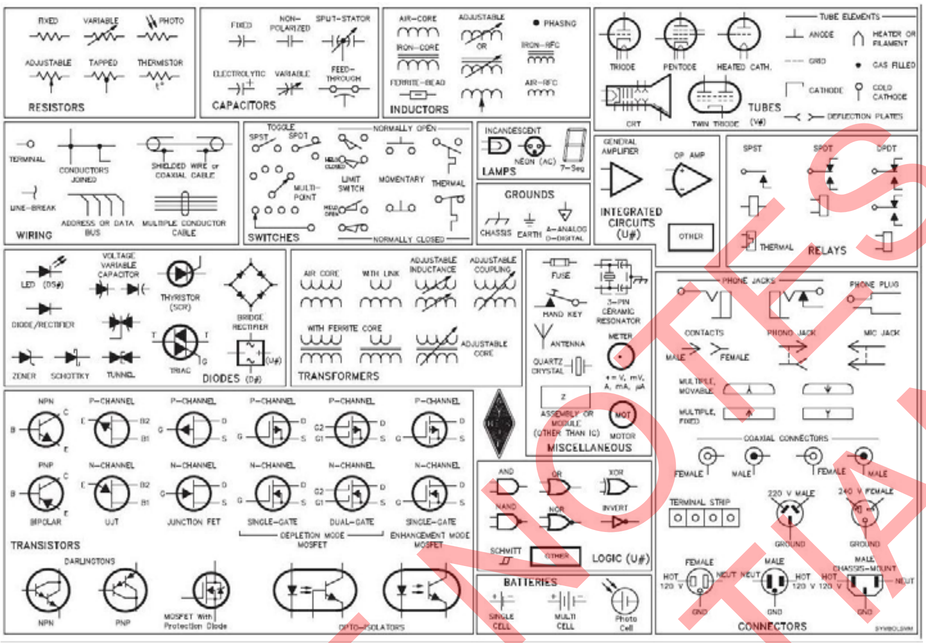
Fonte emf ideal. Linha longa sempre para o terminal positivo, indicando o terminal com maior potencial.

Fonte emf com resistência interna.

Voltímetro

Amperímetro

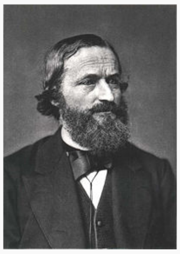
Simbolos para circuitos elétricos



Circuitos Elétricos

Gustav Robert Kirchhoff

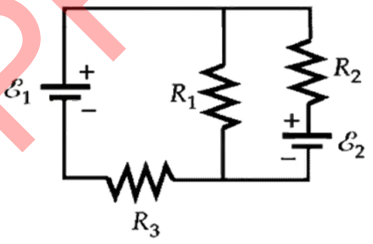
Física

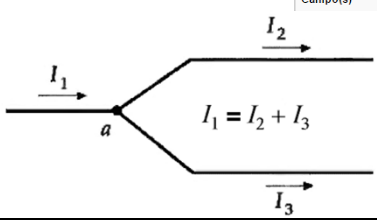


Nacionalidade	Alemão
Residência	Alemanha
Nascimento	12 de março de 1824
Local	Königsberg
Morte	17 de outubro de 1887 (63 anos)
Local	Berlim
	Atividade
Campo(s)	Física

Leis de Kirchhoff

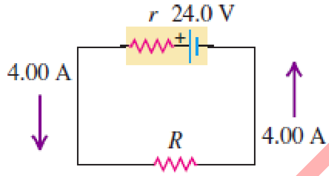
- Quando um circuito fechado é percorrido (malha), a soma algébrica das mudanças no potencial deve ser zero
- Em qualquer ponto de junção no circuito onde a corrente pode se dividir, a soma das correntes que entram an junção deve ser igual a soma das correntes que saem da junção



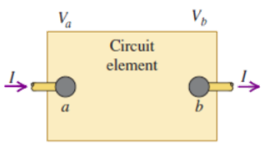


25.28 • Consider the circuit shown in Fig. E25.28. The terminal voltage of the 24.0-V battery is 21.2 V. What are (a) the internal resistance r of the battery and (b) the resistance R of the circuit resistor?

Figure **E25.28**



Energia e Potência em circuitos elétricos



Quando uma carga passa por um elemento do circuito, existe uma alteração no potencial igual a $q\ V_{ab}$.As cargas não ganham energia cinética devido ao fato da corrente que passa pelo circuito é a mesma em todos os pontos.

Assim a quantidade $q\ V_{ab}$ indica a quantidade de energia fornecida a um elemento do circuito ou extraída dele.

Em um circuito elétrico a quantidade de interesse é a taxa com que a energia é fornecida ou extraída de um dado elemento.

Seja uma corrente I passando por um elemento.. Assim em um intervalo dt uma quantidade de carga $dQ = I\ dt$ passa pelo elemento.

A mudança de energia potencial neste elemento é dada por $V_{ab}\ dQ = V_{ab}\ I\ dt$

Dividindo essa expressão por dt, obtemos a taxa de transferência de energia para o elemento ou a partir dele. Essa taxa de transferência d energia é a potência P:

$$P = V_{ab} I$$

Taxa de energia fornecida ou extraída de um elemento do circuito

[P] = [V].[I]=1J/C * 1 C/s = 1J / s = 1 W (Watt)

Potência em resistores

Se o elemento do circuito é um resistor, a diferença de potencial é dada por:

$$V_{ab} = IR$$

Assim, a potência dissipada em um resistor será:

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R}$$

(power delivered to a resistor)

Essa potencia dissipada se transforma geralmente em calor. Isso pode ser utilizado, por exemplo, para aquecimento de água, torradeira ou diversos outros de dispositivos.

Potência fornecida pela fonte

A energia é fornecida por uma fonte para um dado circuito seguindo a equação:

$$P = V_{ab}I$$

Uma fonte real possui a força eletromotriz $\mathcal{E}$ e a resistência interna r , de modo que a tensão na fonte é:

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

Assim teremos:

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I - I^2r$$

$\mathcal{E}I$ é a potencia fornecida pela fonte ao sistema. É a taxa de trabalho realizado pela fonte no sistema.

I^2r é a energia dissipada pela resistência interna da fonte.

A diferença acima é a potencia disponível fornecida pela fonte

Potência

Circuitos DC

Neste tipo de circuitos, teremos a chamada *direct current* (DC), corrente contínua. Neste tipo de sistema consideramos que a fonte de tensão é constante.

Associação de resistores:

Resistores em série:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \text{(resistors in series)}$$

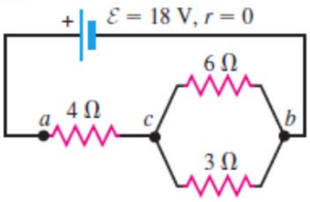
Resistores em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \text{(resistors in parallel)}$$

Example 26.1 Equivalent resistance

Find the equivalent resistance of the network in Fig. 26.3a and the current in each resistor. The source of emf has negligible internal resistance.

(a)



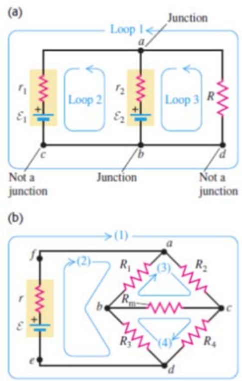
Leis de Kirchhoff

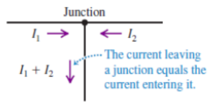
- Quando um circuito fechado é percorrido (malha), a soma algébrica das mudanças no potencial deve ser zero

$$\sum V = 0 \quad \text{(loop rule, valid for any closed loop)}$$

- Em qualquer ponto de junção no circuito onde a corrente pode se dividir, a soma das correntes que entram na junção deve ser igual a soma das correntes que saem da junção

$$\sum I = 0 \quad \text{(junction rule, valid at any junction)}$$

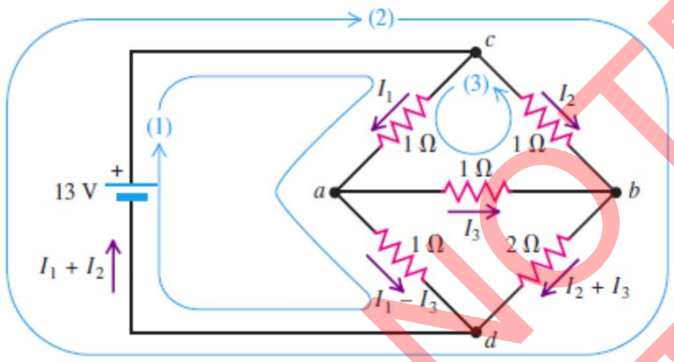




Example 26.6 **A complex network**

Figure 26.12 shows a "bridge" circuit of the type described at the beginning of this section (see Fig. 26.6b). Find the current in each resistor and the equivalent resistance of the network of five resistors.

26.12 A network circuit with several resistors.

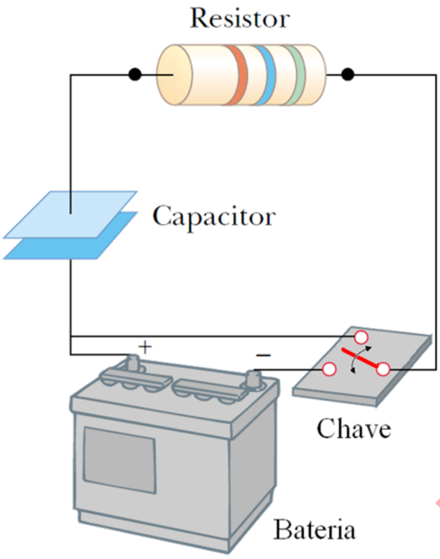


Balanço de energia

Energia fornecida pela Fonte: $$dE = VI(t)dt$$

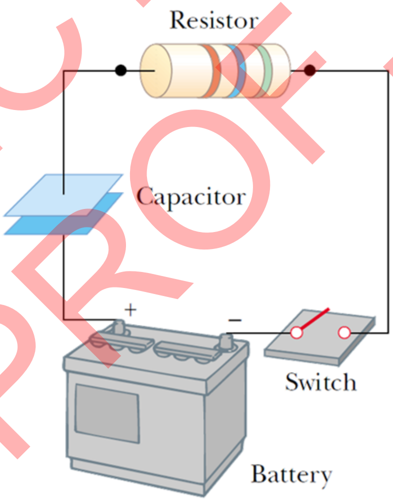
$$E = \int_0^{\infty} VI(t)dt$$

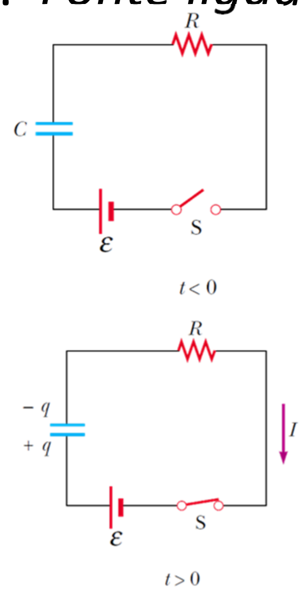
Circuito RC

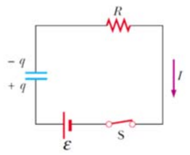


Alternando-se a posição da Chave comutadora, pode-se ligar e desligar a fonte no sistema

Carga do Capacitor : *Fonte ligada*







Assumindo que o capacitor C está inicialmente descarregado podemos aplicar a lei das malhas e obter:

$$\varepsilon - V_C - V_R = 0$$

$$V_C = \frac{q}{C} \qquad V_R = IR$$

$$\boxed{\varepsilon - \frac{q}{C} - IR = 0}$$

Duas variáveis, *I* e *q*

São Independentes?

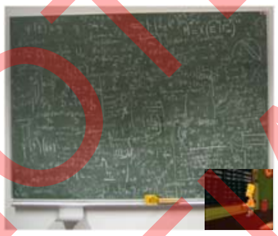
NÃO!!!

Corrente elétrica: $I = \frac{dq}{dt}$

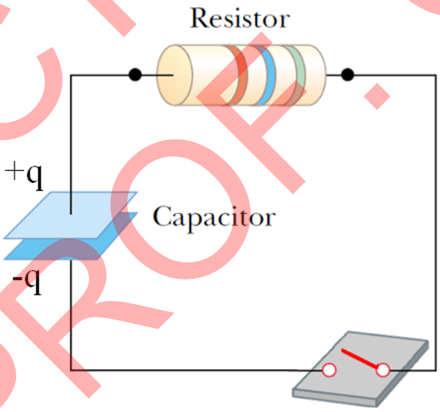
$$\boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon}$$

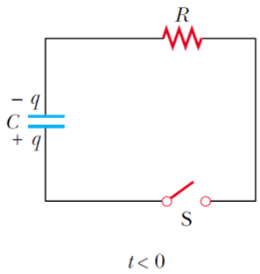
Equação Diferencial de primeira ordem com sinal externo

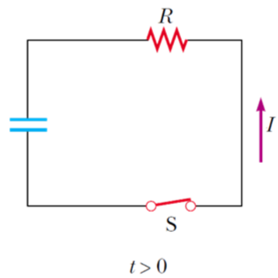
Como Resolver?

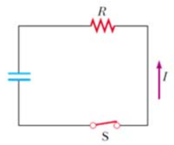


Descarga do Capacitor









Agora o capacitor está completamente carregado. Como não existe mais a fonte a lei das malhas fornece:

$$V_C + V_R = 0$$

$$V_C = \frac{q}{C} \qquad V_R = IR$$

$$\boxed{\frac{q}{C} + IR = 0}$$

Duas variáveis, *I* e *q*

São Independentes?

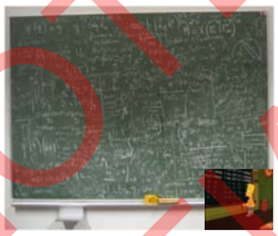
NÃO!!!

Corrente elétrica: $I = \frac{dq}{dt}$

$$\boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0}$$

Equação Diferencial de primeira ordem homogênea

Como Resolver?



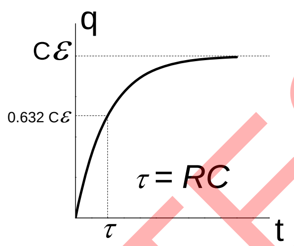
Precisamos Resolver:

Carga do Capacitor $$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

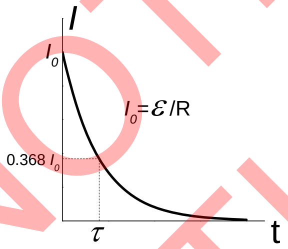
Descarga do Capacitor $$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Solução obtida: Carga do Capacitor

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

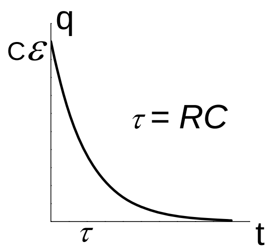


$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow I = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

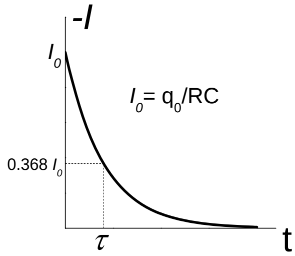


Solução obtida: Descarga do Capacitor

$$q = q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow I = \left(-\frac{q_0}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$



Balanço de energia

Energia fornecida pela Fonte:

$$dE = VI(t)dt$$

$$q = C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad dq = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$E = \int_0^\infty VI(t)dt$$

$$= \varepsilon\int_0^\infty \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{RC}}dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}(-RC)e^{-\frac{t}{RC}}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}(-RC)(0-1)$$

$$= C\varepsilon^2$$

Energia Armazenada /Fornecida pelo capacitor

Carga

$$dU = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

$$q = C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad dq = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$dU = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)dt$$

$$U = \int dU$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}\left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\left[-RC(0-1) + \frac{RC}{2}(0-1)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\left[RC - \frac{RC}{2}\right] = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

Descarga

$$dU = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

$$q = C\varepsilon\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad dq = -\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$dU = -\frac{\varepsilon^2}{R}\left(e^{-2t/RC}\right)dt$$

$$U = \int dU$$

$$= \int_0^\infty -\frac{\varepsilon^2}{R}\left(e^{-2t/RC}\right)dt$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{R}\left[\frac{RC}{2}(0-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

Onde está a outra metade da energia?

Energia Dissipada no Resistor

Carga

$$dU = RI(t)^2\,dt$$

$$I = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U = \int RI(t)^2\,dt$$

$$= \int_0^\infty R\left(\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}(0-1)\right] = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

Descarga

$$dU = RI(t)^2\,dt$$

$$I = \left(-\frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

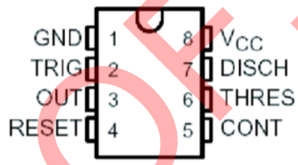
$$U = \int RI(t)^2\,dt$$

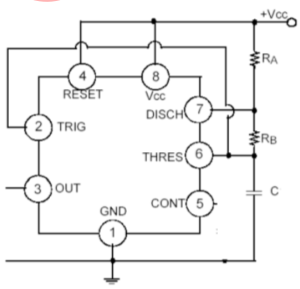
$$= \int_0^\infty R\left(-\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 dt$$

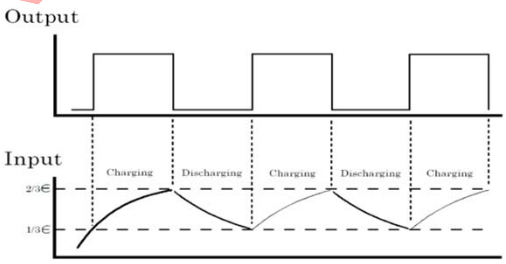
$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}(0-1)\right] = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

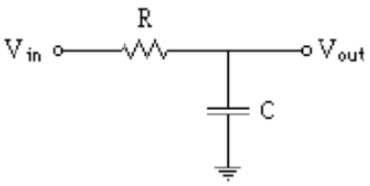
Aplicação: Temporizador RC







Filtro "Passa baixa"

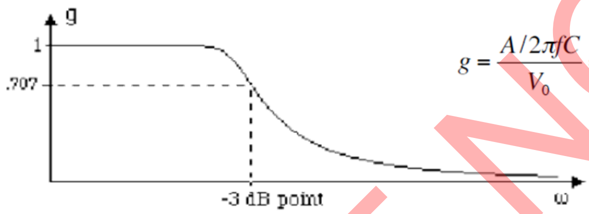


$$V_0 \sin[2\pi f t] = IR + \frac{Q}{C}$$

$$2\pi f V_0 \cos[2\pi f t] = \frac{dI}{dt}R + \frac{I}{C}$$

$$I[t] = A\cos[2\pi f t - \alpha]$$

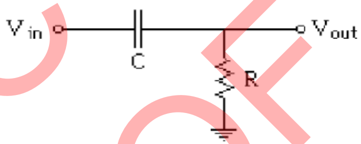
$$V[t] = Q[t]/C = \frac{\int I[t]dt}{C} = \frac{A\sin[2\pi f t - \alpha]}{2\pi f C}$$



$$g = \frac{A/2\pi f C}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC2\pi f)^2}}$$

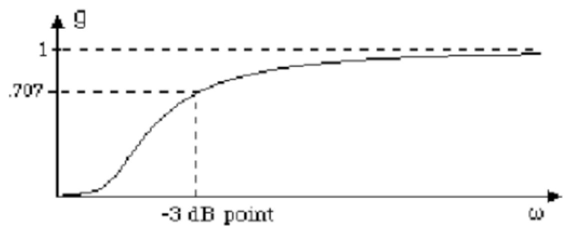
$$f_{-3dB} = \frac{1}{2\pi RC}$$

Filtro "Passa Alta"



$$V[t] = RA\cos[2\pi f t - \alpha]$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{1/(RC2\pi f)^2 + 1}}$$



Solução Alternativa : Carga do Capacitor

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\varepsilon$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}-\frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{C\varepsilon-q}{RC}$$

$$\frac{dq}{C\varepsilon-q}=\frac{1}{RC}dt$$

$$\int_0^q\frac{dq}{C\varepsilon-q}=\int_0^t\frac{1}{RC}dt$$

$$-\ln(C\varepsilon-q)\Big|_0^q=\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln(C\varepsilon)-\ln(C\varepsilon-q)=\frac{t}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{C\varepsilon}{C\varepsilon-q}\right)=\frac{t}{RC}\quad,\ln(x)=a\Rightarrow x=e^a$$

$$\frac{C\varepsilon}{C\varepsilon-q}=e^{\frac{t}{RC}}$$

$$C\varepsilon-q=C\varepsilon\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q=C\varepsilon-C\varepsilon\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{q=C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

Solução Alternativa: Descarga do Capacitor

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{q}=-\frac{1}{RC}dt$$

$$\int_Q^q\frac{dq}{q}=-\int_0^t\frac{1}{RC}dt$$

$$\ln(q)\Big|_Q^q=-\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln(q)-\ln(Q)=-\frac{t}{RC}\quad,\ln(x)=a\Rightarrow x=e^a$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right)=-\frac{t}{RC}$$

$$\frac{q}{Q}=e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{q=Q\,e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$Q=C\varepsilon$,
quando a carga do capacitor tiver sido completa