Formas Quadráticas

<u>FUNÇÕES QUADRÁTICAS</u>: denominação de uma função especial, definida genericamente por:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_n$$

ou $$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \le j}}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Exemplos:

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 5x_1x_2 + 8x_2^2$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

Em termos matriciais, a função quadrática pode ser representada por:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^T A\, x$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por exemplo:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \frac{a_{12}}{2}x_2 & \frac{a_{12}}{2}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + \frac{a_{12}}{2}x_2x_1 + \frac{a_{12}}{2}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

ou

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

<u>FUNÇÕES QUADRÁTICAS DEFINIDAS</u>: Diz-se que uma função quadrática é definida, se para todo $x \in R^n$, tal que $x \neq 0$, ela apresentar os seguintes resultados:

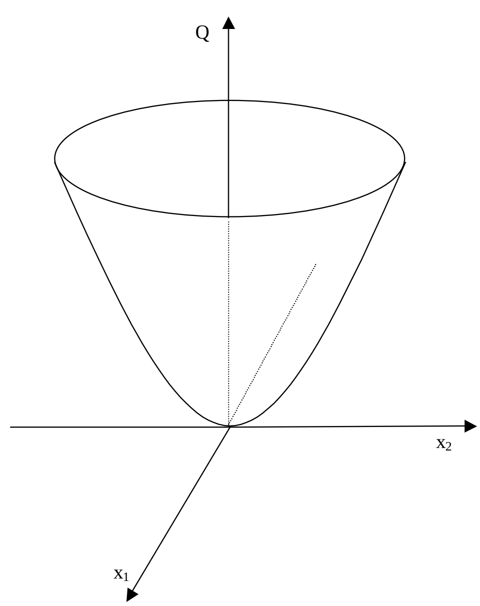
- $Q(x) > 0$, caso em que a função é **Definida Positiva;**
- $Q(x) < 0$, caso em que a função é **Definida Negativa;**

Se admitirmos a possibilidade da função quadrática assumir o valor zero para pelo menos um $x \in R^n$, tal que $x \neq 0$, então dizemos que essa função é **Semi-definida**:

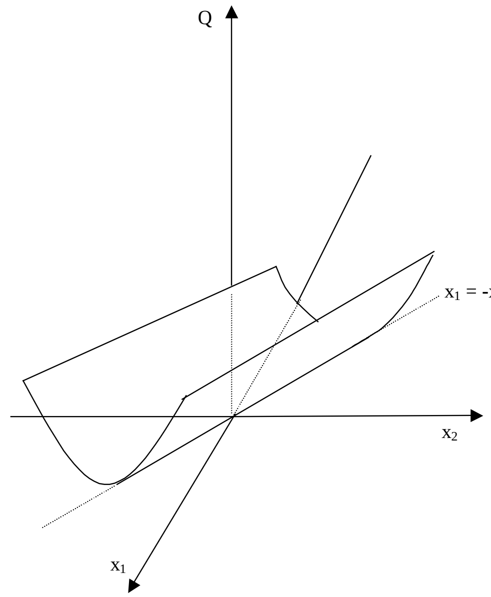
- $Q(x) \geq 0$, caso em que a função é **Semi-definida Positiva;**
- $Q(x) \leq 0$, caso em que a função é **Semi-definida Negativa.**

OBS.: Se Q(x) é tal que, dependendo do x, ela pode assumir valores positivos e negativos, então diz-se que ela é do tipo **indefinido**.

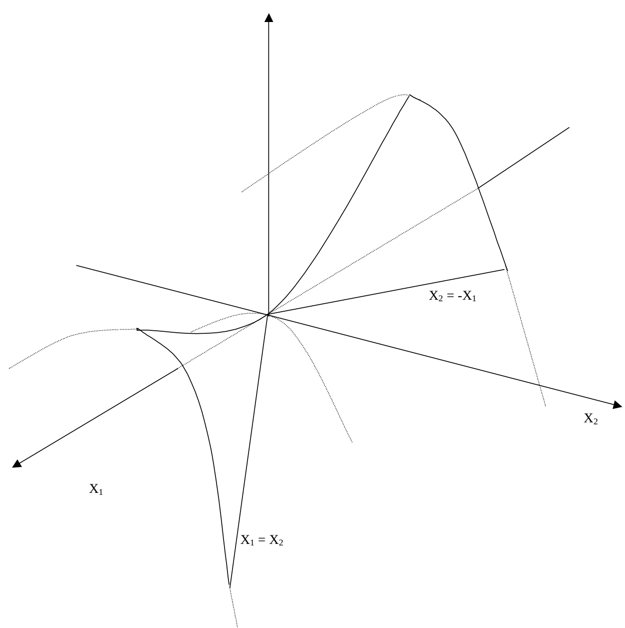
1) Definida Positiva: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$



2) Semi-definida Positiva: $Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$



3) Indefinida: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$



Como toda matriz quadrada e simétrica pode ser utilizada para se obter uma função quadrática, pode-se então utilizar a tipologia desta apresentada acima, para a seguinte definição:

MATRIZES (quadradas e simétricas) DEFINIDAS: Diz-se que uma matriz simétrica, de ordem (n x n), é definida, se para todo $x \in R^n$, tal que $x \neq 0$, ela é tal que:

- $x^T A x > 0$, caso em que a matriz é **Definida Positiva;**
- $x^T A x \geq 0$, caso em que a matriz é **Semi-definida Positiva;**
- $x^T A x < 0$, caso em que a matriz é **Definida Negativa;**
- $x^T A x \leq 0$, caso em que a matriz é **Semi-definida Negativa;**

Como verificar se uma matriz quadrada e simétrica é definida?

Como não é possível fazer isso por experimentação em relação aos valores de $x \in R^n$, o processo envolve a análise de algumas características dessas matrizes

Caso simplificado de matrizes de ordem (2x2):

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \qquad (1)$$

ou seja

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

<u>Primeira Característica</u>: Se a = 0, então para qualquer par $(x_1,0)$ temos que $Q(x_1, x_2 = 0) = 0$. Logo, para que essa forma quadrática possa ser Definida Positiva ou Definida Negativa é necessário então que $a \neq 0$.

Por outro lado, somando-se e subtraindo o termo $\frac{b^2x_2^2}{a}$ na expressão (1) acima, temos que:

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + \frac{b^2x_2^2}{a} - \frac{b^2x_2^2}{a}$$

ou

$$Q(x_1, x_2) = a\left(x_1^2 + \frac{2bx_1x_2}{a} + \frac{b^2x_2^2}{a^2}\right) + cx_2^2 - \frac{b^2x_2^2}{a}$$

ou

$$Q(x_1, x_2) = a\left(x_1 + \frac{bx_2}{a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{ac - b^2}{a}\right)$$

Portanto, para quaisquer valores de x_1 e x_2, com pelo menos um deles diferente de zero, temos que:

- $Q(x_1, x_2) > 0$ se e somente se $a > 0$ e $ac - b^2 > 0$
- $Q(x_1, x_2) < 0$ se e somente se $a < 0$ e $ac - b^2 > 0$

Mas, podemos observar que:

$$ac - b^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad a = |a|$$

Portanto, aqueles dois resultados podem ser reescritos como:

- $Q(x_1, x_2) > 0$, se e somente se $|a| > 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$
- $Q(x_1, x_2) < 0$, se e somente se $|a| < 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$

Ou seja, a matriz será definida positiva ou negativa dependendo da combinação de sinais do seu próprio determinante e do determinante da sub-matriz resultante da eliminação da sua última linha e última coluna.

Mas esses determinantes são conhecidos e denominados de Menores Principais de ordem 2 e 1, respectivamente.

Para conhecer isso, vamos considerar os seguintes conceitos associados a qualquer matriz quadrada.

Definição 1: Seja A uma matriz de ordem (n x n). Uma sub-matriz desta, de ordem (k x k), formada pela eliminação de quaisquer **n-k** colunas e linhas de mesmas posições, é chamada de **Sub-matriz Principal de ordem k de A**

Definição 2: O determinante de uma sub-matriz principal de ordem **k** de A é chamado de **Menor Principal de ordem k de A.**

<u>Exemplo</u>: Considere a matriz de ordem (3 x 3):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Essa matriz possui os seguintes menores principais:

- um menor principal de ordem 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- três menores principais de ordem 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- três menores principais de ordem 1

$$a_{11} \quad ; \quad a_{22} \quad ; \quad a_{33}$$

<u>Definição 3</u>: Se a sub-matriz principal de ordem k de A é obtida pela eliminação das <u>últimas</u> **n-k** colunas e linhas de mesmas posições, então a mesma é denominada especificamente de **<u>Sub-matriz Principal Líder de ordem k de A</u>**, ou simplesmente de **<u>k-ésima Sub-matriz Principal de A</u>**

<u>Definição 4</u>: O determinante da k-ésima sub-matriz principal de A (ou sub-matriz principal líder de ordem k de A) é denominado de **<u>k-ésimo Menor Principal de A</u>**, (ou também por Menor Principal Líder de ordem k de A).

Exemplo: Uma matriz A de ordem (4 x 4) apresenta os seguintes k-ésimos menores principais:

- Primeiro menor principal: a_{11}
- Segundo menor principal: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- Terceiro menor principal: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
- Quarto menor principal: $|A|$

TEOREMA: Seja A uma matriz simétrica de ordem (n x n). Então A é:

DEFINIDA POSITIVA (SEMI-DEFINIDA POSITIVA) se e somente se todos os seus **n** k-ésimos menores principais são positivos (não negativos), ou seja, se

- $a_{11} > 0 \ \ (\geq 0)$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ \ (\geq 0)$

$\vdots$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \ \ (\geq 0)$

DEFINIDA NEGATIVA (SEMI-DEFINIDA NEGATIVA) se e somente se os seus k-ésimos menores principais são negativos (não positivos) para todos os **k** impares e positivos (não negativos) para todos os **k** pares, ou seja, se

- $a_{11} < 0 \ \ (\leq 0)$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ \ (\geq 0)$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \ \ (\leq 0)$

$$\vdots$$

a. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 \ \ (\geq 0) \text{ se n e' par} \\ < 0 \ \ (\leq 0) \text{ se n e' impar} \end{cases}$

<u>Exemplos:</u>

1. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

dado que $|2| > 0$ e $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, temos que essa matriz é definida positiva.

2. No caso da matriz $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

dado que $|-1| \le 0$; $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ge 0$ e $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 0 \le 0$, temos

que essa matriz é semi-definida negativa.

<u>RESTRIÇÕES LINEARES E MATRIZES ORLADAS</u>

Mais adiante veremos que num problema de otimização condicionada, as condições de segunda ordem envolverão a análise da natureza de formas quadráticas que estarão sujeitas a restrições lineares.

Um exemplo desse tipo de análise pode ser dado pela função quadrática

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

onde deseja-se determinar se $Q(x_1, x_2)$ apresenta um único sinal (positivo ou negativo) para todo $(x_1 \quad x_2) \in R^2$, que atende à seguinte restrição: $Ax_1 + Bx_2 = 0$

Para isso vamos isolar a variável x_1 na última equação de restrição e substituí-la na primeira:

$$Q(x_2) = a\left(-\frac{B}{A}x_2\right)^2 + 2b\left(-\frac{B}{A}x_2\right)x_2 + cx_2^2$$

ou

$$Q(x_2) = a\frac{B^2}{A^2}x_2^2 - \frac{2bBx_2^2}{A}2b + cx_2^2$$

ou

$$Q(x_2) = \left(aB^2 - 2bAB + cA^2\right)\frac{x_2^2}{A^2}$$

Portanto, para qualquer valor de x_2, temos que:

- $Q(x_2) > 0$ se e somente se $aB^2 - 2bAB + cA^2 > 0$
- $Q(x_2) < 0$ se e somente se $aB^2 - 2bAB + cA^2 < 0$

Mas podemos observar que

$$\begin{vmatrix} 0 & A & B \\ A & a & b \\ B & b & c \end{vmatrix} = 2bAB - aB^2 - cA^2 = -\left(aB^2 - 2bAB + cA^2\right)$$

Concluindo, temos então que a forma quadrática

$$Q\left(x_1, x_2\right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sujeita à restrição linear $Ax_1 + Bx_2 = 0$ é:

- Definida Positiva, se o determinante da matriz orlada $\begin{vmatrix} 0 & A & B \\ A & a & b \\ B & b & c \end{vmatrix} < 0$

- Definida Negativa, se o determinante da matriz orlada $\begin{vmatrix} 0 & A & B \\ A & a & b \\ B & b & c \end{vmatrix} > 0$

<u>TEOREMA</u>: Seja a função quadrática $Q\left(x\right) = x^T A\, x$, sujeita à restrição linear Bx = 0, onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$$

Definindo-se a matriz orlada $H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{bmatrix}$, tem-se que:

a) **Q(x) é Definida Positiva**, para todo $x \in R^n$ tal que Bx = 0, se os últimos (n – 1) k-ésimos menores principais de H são negativos;

b) **Q(x) é Definida Negativa**, para todo $x \in R^n$ tal que Bx = 0, se os últimos (n – 1) k-ésimos menores principais de H alternarem os seus respectivos sinais;

c) **Q(x) é Indefinida** se ambas as condições (a) e (b) acima não são atendidas pelos últimos (n – 1) k-ésimos menores principais de H, com valores diferentes de zero.

<u>Exemplos</u>:

1. $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ sujeito a $x_1 + x_2 = 0$

ou seja, $Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

sujeito a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

Portanto $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

o seu último k-ésimo menor principal, (dado que n – 1 = 1) é:

- $|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 4 + 1 = -1 < 0$

Portanto, a forma quadrática acima, sujeita à restrição linear, é <u>Definida Positiva</u>.

Obs.: Note que o penúltimo k-ésimo menor principal não é considerado, pois o seu sinal é sempre negativo:

2. $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3 - x_3^2$

sujeito a $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

ou seja,

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

sujeito a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

Nesse caso, $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

os seus (n – 1 = 2) últimos k-ésimos menores principais são:

- $|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 > 0$
- $|H_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0$

Portanto, a forma quadrática acima, sujeita à restrição, é indefinida.

O último teorema pode ser generalizado para o caso de formas quadráticas sujeitas à restrição de mais de uma equação linear.

Ou seja, para o seguinte problema: seja a função quadrática com **n** variáveis $Q(x) = x^T A x$, sujeita às **m** restrições lineares Bx = 0, com n > m, onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

Nesse caso, a matriz orlada H é de ordem [(m +n)x(m+n)] e definida da seguinte forma:

$$H = \begin{pmatrix} O & B \\ B^T & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_{m1} & \cdots & B_{mn} \\ B_{11} & \cdots & B_{m1} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n} & \cdots & B_{mn} & a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

E o resultado geral é especificado no seguinte teorema:

<u>TEOREMA</u>: Seja a função quadrática com n variáveis $Q(x) = x^T A\, x$, sujeita à restrição de m equações lineares Bx = 0, onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;;\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

Definindo-se a matriz orlada de ordem (m +n) x (m+n) $H = \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & A \end{bmatrix}$, tem-se que:

a) Se o determinante de H tem o <u>mesmo</u> sinal de $(-1)^m$ e se os últimos (n – m) k-ésimos menores principais de H também apresentam esse <u>mesmo</u> sinal, então **Q(x) é Definida Positiva**, para todo $x \in R^n$ tal que Bx = 0;

b) Se o determinante de H tem o mesmo sinal de $(-1)^n$ e se os últimos (n – m) k-ésimos menores principais de H <u>alternam</u> o seu sinal, então **Q(x) é Definida Negativa**, para todo $x \in R^n$ tal que Bx = 0;

c) **Q(x) é Indefinida** se ambas as condições (a) e (b) acima não são atendidas pelos últimos n – 1 k-ésimos menores principais de H, com valores diferentes de zero.

Fim