AUTOVALORES E AUTOVETORES

Caracterização geral de Autovalor:

Parâmetro associado a matrizes quadradas e que são importantes para caracterizar a natureza destas, principalmente no contexto de:

- **Sistemas de equações dinâmicas a diferenças ou diferenciais** (auxilia na obtenção das suas soluções explicitas e na determinação da estabilidade ou não desses sistemas);
- **Classificação de matrizes simétricas e de formas quadráticas** (para análise das condições de 2ª ordem de problemas de otimização)

OBS.: os autovalores são também conhecidos por valores **característicos** ou **próprios** de matrizes quadradas

Definição de Autovalor:

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem (n x n). Um **Autovalor** de **A** é um número real r, tal que, subtraído de todos os elementos da sua diagonal, converte **A** numa matriz singular, ou seja:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{pmatrix}$$

ou

$A' = A - r.I$ com $|A'| = 0$

Exemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $r = 2$ dado que $A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $r_1 = 2$ dado que $A' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$r_2 = 3$ dado que $A' = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Teorema 1: Os elementos da diagonal de qualquer matriz diagonal são seus autovalores

Teorema 2: Uma matriz quadrada é singular se e somente se o valor O é um dos seus autovalores.

Forma geral p/encontrar autovalores: Equação Característica

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $|A - rI| = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = 0$

ou

$$(a_{11} - r)(a_{22} - r) - a_{12}a_{21} = 0$$

ou

$$a_{11}a_{22} - a_{11}r - a_{22}r + r^2 - a_{12}a_{21} = 0$$

ou

$$r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

Sabemos que essa equação ou polinômio característico possui, no máximo, duas raízes reais.

Em geral, matrizes quadradas de ordem (n x n) tem no máximo **n** autovalores reais. Contando as raízes repetidas e complexas do polinômio característico, tem-se que matrizes de ordem (n x n) possuem exatamente **n** autovalores.

Definição de Autovetores:

Seja **r** um autovalor qualquer de uma matriz quadrada **A**. Um vetor $\mathbf{v} \neq 0$, tal que $(A - rI)v = 0$, denomina-se o **<u>Autovetor</u>** correspondente ao autovalor r.

<u>OBS.</u>: Sabemos que se B é uma matriz quadrada singular, então Bx = 0 possui infinitas soluções para o vetor x. Portanto, para qualquer matriz quadrada A, se r é um dos seus autovalores, sempre existe um autovetor correspondente a esse autovalor (na realidade, para cada autovalor existem infinitos autovetores corrspondentes)

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

com equação característica dada por:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 1-r & 0 & 2 \\ 0 & 5-r & 0 \\ 3 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = (1-r)(5-r)(2-r) - 6(5-r) = 0$$

$$(5-r)\left[(1-r)(2-r) - 6\right] = 0$$

ou

$$(5-r)\left[r^2 - 3r - 4\right] = 0$$

Autovalores:

$r_1 = 5 \quad$ e $\quad r = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} \quad$ ou $\quad r_2 = 4 \quad$ e $\quad r_3 = -1$

Autovetores correspondentes: $(A - rI)v$ ou $Av = rv$

Para $r_1 = 5$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v_1^1 \\ 5v_2^1 \\ 5v_3^1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} v_1^1 + 2v_3^1 & = & 5v_1^1 \\ 5v_2^1 & = & 5v_2^1 \\ 3v_1^1 + 2v_3^1 & = & 5v_3^1 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{rcl} 4v_1^1 & = & 2v_3^1 \\ v_2^1 & = & v_2^1 \\ 3v_1^1 & = & 3v_3^1 \end{array}$$

Soluções: $v_1^1 = v_3^1 = 0$ e $v_2^1 = \text{qualquer nº real}$. $v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $r_2 = 4$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1^1 \\ 4v_2^1 \\ 4v_3^1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} v_1^2 + 2v_3^2 & = & 4v_1^2 \\ 5v_2^2 & = & 4v_2^2 \\ 3v_1^2 + 2v_3^2 & = & 4v_3^2 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{rcl} 3v_1^2 & = & 2v_3^2 \\ 5v_2^2 & = & 4v_2^2 \\ 3v_1^2 & = & 2v_3^2 \end{array}$$

Soluções: $v_2^2 = 0$ v_1^2 e v_3^2 tais que $v_3^2 = 1{,}5v_1^2$. $v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Para r_3 = -1
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1^3 \\ -v_2^3 \\ -v_3^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1^3 + 2v_3^3 &= -v_1^3 \\ 5v_2^3 &= -v_2^3 \\ 3v_1^3 + 2v_3^3 &= -v_3^3 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} -v_1^3 &= v_3^3 \\ 6v_2^3 &= 0 \\ v_1^3 &= -v_3^3 \end{aligned}$$

Soluções: $v_2^3 = 0$ $\quad v_1^3$ e v_3^3 tais que $v_3^3 = -v_1^3$. $\quad v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Uso dos Autovalores e Autovetores: Diagonalização de Matrizes

Teorema: Seja **A** uma matriz quadrada de ordem (k x k) e sejam $\mathbf{r_1, r_2, ..., r_k}$ os seus autovalores, com correspondentes autovetores $\mathbf{v_1, v_2, ..., v_k}$. Formando-se a matriz quadrada $P = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_k]$, se **P** for não singular ou seja invertível, então:

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_k \end{bmatrix}$$

Reciprocamente, se $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, então os elementos da diagonal dessa matriz são os autovalores de A, com as colunas de P sendo os respectivos autovetores correspondentes.

Esboço de parte da Prova:

De

$$P^{-1}AP = D \quad \Rightarrow \quad AP = PD$$

ou

$$A\begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_k \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} Av^1 & Av^2 & \cdots & Av^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 v^1 & r_2 v^2 & \cdots & r_k v^k \end{bmatrix}$$

ou

$$Av^i = r_i v^i \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, k$$

Teorema: Sejam $\mathbf{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ k distintos autovalores de uma matriz quadrada **A** de ordem (k x k) e $\mathbf{v_1, v_2, \ldots, v_k}$ os correspondentes autovetores. Então esses **k** autovetores são linearmente independentes e essa matriz **A** é diagonalizável.

Fim