Microeconomia II - Gabarito Lista 3 - Monopólio

Tiago Ferraz

21 de outubro de 2015

1. Nicholson - Questão 14.5

   (a) Se $A = 0$, a demanda inversa será

   $$Q = 20 - P \Rightarrow P = 20 - Q$$

   E a função custo

   $$C = 10Q + 15$$

   O problema do monopolista é escolher a quantidade Q^m que irá maximizar o seu lucro

   $$\max_Q \ (20 - Q)Q - 10Q - 15 = \max_Q \ 10Q - Q^2 - 15$$

   $$CPO: \ 10 - 2Q = 0 \Rightarrow \boxed{Q^m = 5}$$

   Substituindo na demanda inversa:

   $$P = 20 - Q^m = 20 - 5 \Rightarrow \boxed{P^m = 15}$$

   O lucro desta firma será

   $$\pi = 10.5 - 5^2 - 15 \Rightarrow \boxed{\pi^m = 10}$$

   (b) Agora, o problema da firma será escolher Q e A que maximizam o seu lucro.
   A demanda inversa é

   $$P = 20 - \frac{Q}{1 + 0,1A - 0,01A^2}$$

   Portanto, o problema da firma é

   $$\max_{Q,A} 20Q - \frac{Q^2}{1 + 0,1A - 0,01A^2} - 10Q - 15 - A$$

   $$\max_{Q,A} 10Q - \frac{Q^2}{1 + 0,1A - 0,01A^2} - 15 - A$$

   Note que agora são duas variáveis de escolha, portanto precisamos de duas condições de primeira ordem:

$$(Q): 10 - \frac{2Q}{1+0,1A-0,01A^2} = 0 \Rightarrow (1+0,1A-0,01A^2) = \frac{2Q}{10} \tag{1}$$

$$(A): -(-1).\frac{Q^2.(0,1-0,02A)}{(1-0,1A-0,01A^2)^2} - 1 = 0 \tag{2}$$

Substituindo a equação (1) em (2)

$$\frac{Q^2.(0,1-0,02A)}{\frac{4Q^2}{100}} = \frac{100\cancel{Q^2}}{4\cancel{Q^2}}.(0,1-0,02A) - 1 = 0$$

$$2,5 - 0,5A - 1 = 0$$

$$A = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

Substituindo o valor de A na equação (1)

$$\frac{2Q}{10} = 1 + 0,3 - 0,09 \Rightarrow Q = 5.1,21 \Rightarrow \boxed{Q = 6,05}$$

Substituindo estes valores na demanda inversa e na função lucro encontramos

$$\boxed{P = 15 \quad | \quad \pi = 12,25}$$

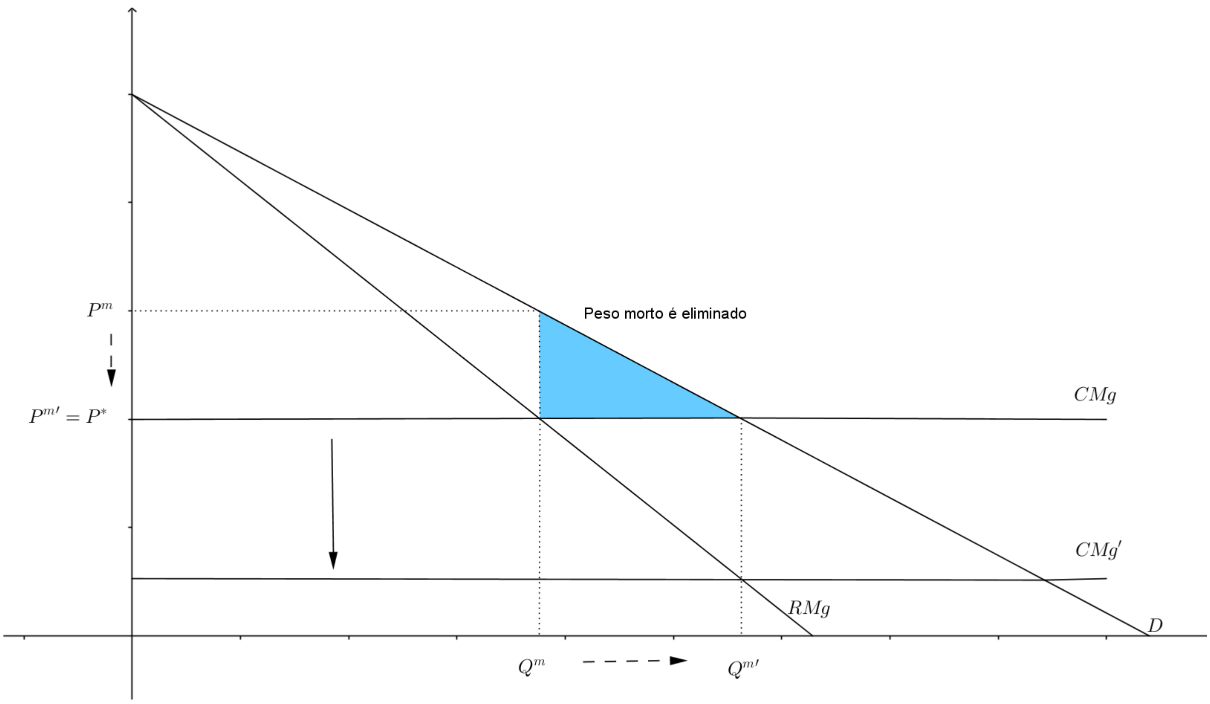
2. (a) Um subsídio lump sum não afeta a escolha ótima do monopolista, pois estamos simplesmente adicionando uma constante ao problema.

$$\max_q \; p(q).q + T - c(q)$$

A condição de primeira ordem deste problema é a mesma do caso em que não existe o subsídio

$$CPO: \; \underbrace{\frac{\partial p(q)}{\partial q}.q + p(q)}_{RMg} - \underbrace{\frac{\partial c(q)}{\partial q}}_{CMg} = 0$$

(b) O subsídio por unidade de produto equivale a um deslocamento para baixo da curva de oferta. O exemplo abaixo é para uma demanda linear. Mas a ideia pode ser generalizada para qualquer formato.



(c) Com o subsídio por unidade, o problema do monopolista é

$$\max_q \ (p(q) + t).q - c(q)$$

A condição de primeira ordem neste caso é

$$CPO: \ \frac{\partial p(q)}{\partial q}.q + p(q) + t - \frac{\partial c(q)}{\partial q} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial p(q)}{\partial q}.q + p(q)}_{RMg} = \underbrace{\frac{\partial c(q)}{\partial q}}_{CMg} - t$$

Note que podemos reescrever a receita marginal como

$$RMg = p(q).\left[1 + \frac{\partial p(q)}{\partial q}.\frac{q}{p}\right]$$

O segundo termo da soma é simplesmente o inverso da elasticidade-preço:

$$\frac{1}{\varepsilon_{q,p}} = \frac{\partial p(q)}{\partial q}$$

Portanto,

$$RMg = p(q).\left[1 + \frac{1}{\varepsilon_{q,p}}\right]$$

Substituindo na expressão da CPO:

$$p(q).\left[1 + \frac{1}{\varepsilon_{q,p}}\right] = CMg - t$$

Sabemos que na escolha socialmente ótima $p = CMg$. Portanto,

$$\cancel{p} + \frac{p}{\varepsilon_{q,}} = \cancel{p} - t \Rightarrow \boxed{\frac{t}{p} = -\frac{1}{\varepsilon_{q,p}}}$$

3. (a) O problema do monopolista é escolher a quantidade q^m que maximiza o seu lucro

$$\max_q \ (a - bq)q - cq - F = \max_q \ (a - c)q - bq^2 - F$$

$$CPO: \ (a - c) - 2bq = 0 \Rightarrow \boxed{q^m = \frac{a - c}{2b}}$$

Substituindo na demanda

$$p = a - b.\frac{a - c}{2b} \Rightarrow \boxed{p^m = \frac{a + c}{2}}$$

Portanto, o lucro do monopolista será

$$\pi(q^m) = (a - c)\,\frac{a - c}{2b} - b\left(\frac{a - c}{2b}\right)^2 - F \Rightarrow \boxed{\pi(q^m) = \frac{(a - c)^2}{4b} - F}$$

(b) Podemos usar o gráfico da questão anterior para analisa esta questão. A perda de peso morto é dada pela área do triângulo destacado.

A área do triângulo é dada por

$$DW = \frac{1}{2}.(p^m - p^*)(q^* - q^m)$$

Já encontramos os valores para p^m e q^m e sabemos que no equilíbrio competitivo $p^* = CMg$. Portanto, só precisamos encontrar uma expressão para a quantidade de equilíbrio competitivo q^*. Como $p = Cmg$, temos

$$a - bq = c \Rightarrow \boxed{q^* = \frac{a - c}{b}}$$

Portanto, a perda de peso morto deverá ser

$$DW = \frac{1}{2}.\left(\frac{a + c}{2} - c\right).\left(\frac{a - c}{b} - \frac{a - c}{2b}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{a - c}{2}\right).\left(\frac{a - c}{2b}\right)$$

$$\boxed{DW = \frac{1}{2b}.\left(\frac{a - c}{2}\right)^2}$$

Como o enunciado nos diz que $b > 0$ e $a > c$, sabemos que o peso morto será necessariamente positivo.

(c) No caso em que $p^m = p^* = CMg$, o lucro do monopolista será

$$\pi(q) = (p - c)q - F = (p - p)q - F = -F$$

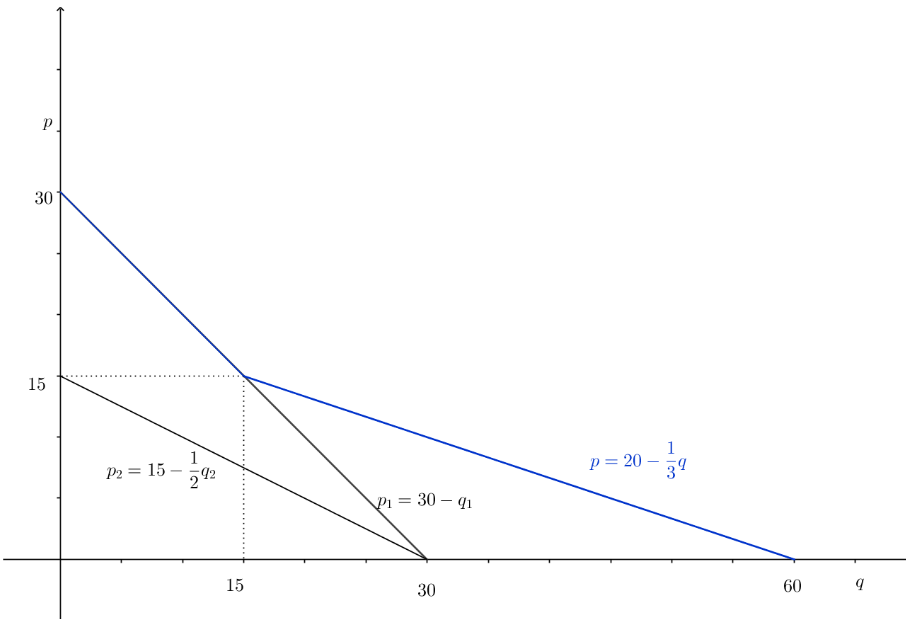
No longo prazo, se a firma opera com retornos constantes de escala, o custo fixo F deixa de existir (porque no longo prazo todos os fatores são variáveis). Neste caso, a firma teria lucro econômico $\pi = 0$ e a política poderia ser sustentada. Mas, se a firma operar com retornos crescentes de escala, sabemos que ela terá custo marginal decrescente, o que significa que o custo médio será também decrescente. Neste caso, no longo prazo a firma passa a ter prejuízo e deixará de operar.

4. (a) Como existem 100 indivíduos de cada tipo, podemos escrever as demandas inversas como

$$q_1 = 30 - p_1 \Rightarrow p_1 = 30 - q_1$$

$$q_2 = 3 - 2p_2 \Rightarrow p_2 = 15 - \frac{1}{2}q_2$$

Para obter a demanda total de mercado, precisamos somar as duas demandas dadas. Mas, note que como os interceptos são diferentes, teremos um caso especial em que a demanda total é "quebrada"



Note que como o intercepto do mercado 2 é $p_2 = 15$, para qualquer preço acima deste nível a demanda total será dada somente pela demanda do mercado 1. Para qualquer preço menor ou igual a 15, a demanda agregada é a soma das demandas nos dois mercados. Assim, a função demanda inversa é definida por

$$p = \begin{cases} 30 - q \quad , \text{ se } q \leq 15 \\ 20 - \frac{1}{3}q, \text{ se } q \geq 15 \end{cases}$$

Portanto, a receita total da firma é dada por

$$RT = \begin{cases} 30q - q^2 \quad , \text{ se } q \leq 15 \\ 20q - \frac{1}{3}q^2, \text{ se } q \geq 15 \end{cases}$$

E, portanto, a receita marginal é

$$RMg = \begin{cases} 30 - 2q, \text{ se } q < 15 \\ 20 - \frac{2}{3}q, \text{ se } q > 15 \end{cases}$$

Note que em $q = 15$ a receita marginal sequer está definida (nem poderia, já que a demanda inversa não é diferenciável neste ponto).

Sabemos que para maximizar o lucro, a firma monopolista irá escolher a quantidade q^m tal que $RMg = CMg$. Portanto,

$$30 - 2q = 12 \Rightarrow q^m = \frac{18}{2} = 9 < 15$$

$$20 - \frac{2}{3}q = 12 \Rightarrow q^m = \frac{24}{2} = 12 < 15$$

Note que na primeira equação, a quantidade encontrada q^m respeita a restrição, mas na segunda não. Portanto, a quantidade ótima para o monopolista é $q^m = 9$, o que implica que o preço cobrado será $p^m = 21$.

(b) Se o monopolista puder discriminar preços, seu problema será escolher as quantidades que irá ofertar em cada mercado para maximizar o seu lucro total:

$$\max_{q_1, q_2} \pi(q_1, q_2) = (30 - q_1)q_1 + \left(15 - \frac{1}{2}q_2\right) q_2 - 12(q_1 + q_2)$$

$$\max_{q_1, q_2} 18q_1 - q_1^2 + 3q_2 - \frac{1}{2}q_2^2$$

Como são duas variáveis de escolha, temos duas condições de primeira ordem:

$$(q_1) : 18 - 2q_1 = 0 \Rightarrow \boxed{q_1^m = 9}$$

$$(q_2) : 3 - q_2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{q_2^m = 3}$$

Portanto, os preços cobrados em cada mercado serão

$$p_1 = 30 - 9 = 21$$

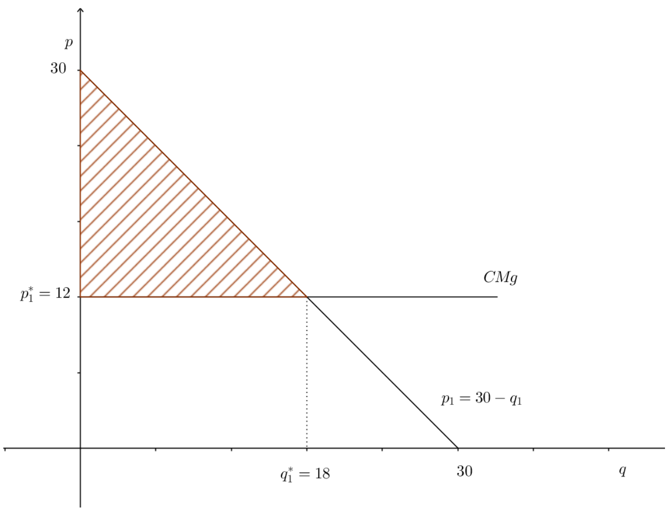
$$p_2 = 15 - \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$$

(c) No caso da tarifa em duas partes o monopolista irá cobrar em cada mercado um preço por unidade, p_i, mais uma parcela fixa, a_i. Para que consiga extrair o máximo de excedente do consumidor, EC, ele irá cobrar $p_i = CMg$ e como parcela fixa, $a_i = EC_i$. Sabemos que em cada mercado, $p_i = 12$. Para calcular EC_i precisamos encontrar em cada mercado a quantidade q_i^* que maximiza o excedente total, ou seja, a quantidade de equilíbrio competitivo. Para isto, basta igualar as demandas inversas ao custo marginal e resolver para q_i

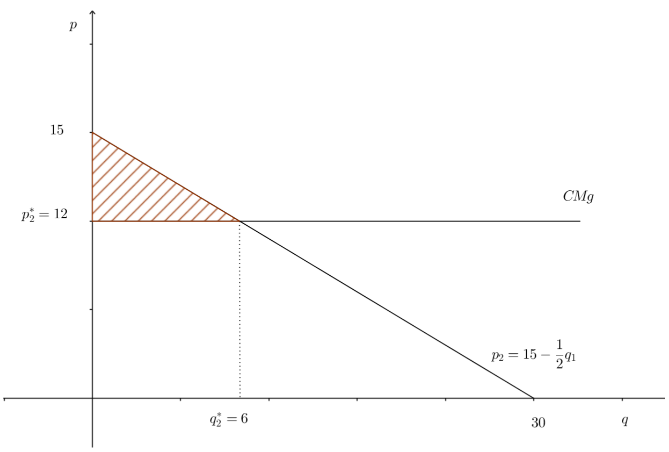
$$p_1 = 12 \Rightarrow 30 - q_1 = 12 \Rightarrow \boxed{q_1^* = 18}$$

$$p_2 = 12 \Rightarrow 15 - \frac{1}{2}q_2 = 12 \Rightarrow \boxed{q_2^* = 6}$$

Sabemos então que a parte fixa da tarifa será, para cada consumidor, o seu excedente. Isto é, a área de cada triângulo:



$$a_1 = \frac{1}{2}(30 - 12)18 = 162$$



$$a_2 = \frac{1}{2}(15 - 12)6 = 9$$

Como cada mercado é composto por 100 indivíduos, a parcela fixa é dividida igualmente entre eles. Portanto, as tarifas cobradas serão:

$$T_1(q_1) = a_1 + p_1 q_1 = 1,62 + 12q_1$$

$$T_2(q_2) = a_2 + p_2 q_2 = 0,09 + 12q_2$$

Note que este resultado é eficiente, porque o monopolista irá extrair todo o excedente.

(d) Para que possa extrair todo o excedente dos consumidores o monopolista continua cobrando $p = CMg$. O que ele precisa decidir agora é qual será a parcela fixa que irá cobrar de cada consumidor. O que restringe o valor que ele pode cobrar é o tamanho do excedente do consumidor com maior elasticidade-preço da demanda. Se o monopolista cobra uma parcela fixa muito alta ele irá expulsar estes consumidores do mercado. Mas, note que isto não é necessariamente um problema, desde que o excedente dos consumidores que permanecem no mercado, aqueles de tipo 1, for suficientemente grande para compensar a perda do tipo 2.

O monopolista irá decidir pela tarifa que permita que seu lucro seja o mais alto possível. Como ele define $p = CMg$, sabemos que seu lucro será

$$\pi^m = a + (p - c)q_m = a$$

Se definir uma taxa de entrada que atenda a ambos os consumidores, o máximo que ele poderá cobrar é o excedente do consumidor de tipo 2. Como são 200 consumidores pagando a mesma parcela fixa, seu lucro será

$$\pi_m = 200.0,09 = 18$$

Por outro lado, se ele decidir por uma taxa de entrada mais alta, ele deve cobrar o excedente dos consumidores do tipo 1. Neste caso, como a tarifa expulsa do mercado os consumidores de tipo 2, restam apenas 100 indivíduos consumindo. Neste caso, seu lucro será

$$\pi^m = 100.1,62 = 162$$

Como esta situação permite que ele obtenha um lucro mais alto, a tarifa que ele irá cobrar é

$$T(q) = 1,62 + 12q$$

Este resultado não é eficiente, pois está expulsando do mercado os consumidores do tipo 2, que gostariam de consumir o bem se a tarifa fosse mais baixa.

5. Em primeiro lugar, sabemos que em equilíbrio demanda é igual à oferta, portanto:

$$y_1 = x_1(p_1, p_2)$$
$$y_2 = x_2(p_1, p_2)$$

Como a função custo é separável, temos que

$$c_1(y_1) = c_1(x_1)$$
$$c_2(y_2) = c_2(x_2)$$

Derivando as funções custo em relação a x_i, obtemos os custos marginais:

$$CMg_1 = \frac{\partial c_1(x_1)}{\partial x_1}$$
$$CMg_2 = \frac{\partial c_2(x_2)}{\partial x_2}$$

Sabemos que o problema do monopolista é

$$\max_{p_1, p_2} p_1 x_1(p_1, p_2) + p_2 x_2(p_1, p_2) - c_1(x_1(p_1, p_2)) - c_2(x_2(p_1, p_2))$$

Como são duas variáveis de escolha, precisamos de duas condições de primeira ordem (não se esqueça da regra da cadeia!):

$$(p_1) : x_1(p_1, p_2) + p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} - \frac{\partial c_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} - \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$$

$$x_1(p_1, p_2) + \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\left[p_1 - \frac{\partial c_1}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\left[p_2 - \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\right] = 0 \qquad (1)$$

$$(p_2) : x_2(p_1, p_2) + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_1}{\partial p_2} - \frac{\partial c_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_2} - \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = 0$$

$$x_2(p_1, p_2) + \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\left[p_1 - \frac{\partial c_1}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\left[p_2 - \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\right] = 0 \qquad (2)$$

Podemos reescrever a equação (2) como:

$$p_2 - \underbrace{\frac{\partial c_2}{\partial x_2}}_{CMg_2} = \underbrace{-\frac{x_2(p_1, p_2)}{\frac{\partial x_2}{\partial p_2}}}_{a} \underbrace{-\frac{\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\left[p_1 - \frac{\partial c_1}{\partial x_1}\right]}{\frac{\partial x_2}{\partial p_2}}}_{b} \qquad (3)$$

A questão nos pede para verificar em que condições a firma pode escolher operar abaixo do custo marginal na produção do bem 2. Neste caso, o lado esquerdo da equação (3) deve ser negativo. Em primeiro lugar, sabemos que na escolha ótima da firma $x_2 \geq 0$ e que, como os bens são comuns, $\frac{\partial x_2}{\partial p_2} < 0$, o termo a será não negativo. Isto significa que o termo b deve ser negativo e maior (em módulo) do que a.

Para ver que isto é verdade, note que $\left[p_1 - \frac{\partial c_1}{\partial x_1}\right] > 0$, do contrário a firma estaria operando com prejuízo em ambos os bens. Como já falamos antes, o denominador desta fração é negativo (bem comum), portanto, para que o termo b seja negativo é preciso que $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} < 0$. Ou seja, a demanda pelo bem 1 deve cair quando aumentar o preço do bem 2. Em outras palavras, os bens 1 e 2 devem ser complementares.

A intuição por trás deste resultado é que, como os bens são complementares, ao reduzir o preço do bem 2, mesmo operando com prejuízo neste produto, o monopolista irá ser compensado pelo aumento na demanda do bem 2.

6. (a) O problema do monopolista é

$$\max_y \, (70-y)y - 6y$$

$$\max_y \, 64y - y^2$$

$$CPO: \; 64 - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y^m = 32}$$

$$p = 70 - y^m = 70 - 32 \Rightarrow \boxed{p^m = 38}$$

(b) O novo problema do monopolista é

$$\max_y \, 70y - y^2 - 0,25y^2 + 5y - 300$$

$$\max_y \, 75y - \frac{5}{4}y^2 - 300$$

$$CPO: 75 - \frac{5}{2}y = 0 \Rightarrow \boxed{y^m = 30}$$

$$p = 70 - y^m = 70 - 30 \Rightarrow \boxed{p^m = 40}$$

(c) Agora, o problema do monopolista é

$$\max_y \, 70y - y^2 - 0,0133y^3 + 5y - 250$$

$$\max_y \, 75y - y^2 - 0,0133y^3 - 250$$

$$CPO: 75 - 2y - 0,04y^2 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-0,08} = -\frac{2 \pm 4}{0,08}$$

Como não faz sentido pensar em quantidades negativas, podemos descartar uma das raízes desta equação. Portanto,

$$y = \frac{2}{\frac{8}{100}} \Rightarrow \boxed{y^m = 25}$$

$$p = 70 - 25 \Rightarrow \boxed{p^m = 45}$$

7. O objetivo desta questão é mostrar o que acontece com a decisão do monopolista se for relaxada a hipótese de não arbitragem.

(a) Neste item estamos supondo que é válida a hipótese de não arbitragem. Ou seja, o monopolista estabelece preços distintos em cada mercado e não se preocupa com possibilidade de que alguém possa comprar no mercado com preço mais baixo e vender no mercado com preço mais alto.

As funções demanda inversa deste monopolista são

$$p_a = 55 - y_A$$

$$p_B = 35 - \frac{1}{2}y_B$$

O problema deste monopolista é escolher as quantidades y_A e y_B que maximizam o seu lucro

$$\max_{y_A \cdot y_B} (55 - y_A)y_A + \left(35 - \frac{1}{2}y_B\right) y_B - 5(y_A + y_B)$$

$$\max_{y_A, y_B} 50y_A - y_A^2 + 30y_B - \frac{1}{2}y_B^2$$

Como são duas variáveis de escolha, precisamos de duas condições de primeira ordem

$$(y_A):\ 50 - 2y_A = 0 \Rightarrow \boxed{y_A^m = 25}$$

$$(y_B):\ 30 - y_B = 0 \Rightarrow \boxed{y_B^m = 30}$$

Substituindo nas demandas:

$$p_A = 55 - 25 = 30$$

$$p_B = 35 - \frac{30}{2} = 20$$

$$\pi^m = 50.25 - 25^2 + 30.30 - \frac{1}{2}30^2 \Rightarrow \boxed{\pi^m = 1075}$$

(b) Agora, começamos a relaxar a hipótese de não arbitragem. Supondo que haja apenas um custo de transporte de R$ 5,00 entre ambas as cidades, o monopolista já não será mais livre para estabelecer o preço que quiser, porque se a diferença de preços for suficientemente alta, os consumidores do mercado que tem preço mais alto podem se deslocar ao mercado com preço mais baixo. Neste caso, o equilíbrio seria o monopolista suprir a demanda de ambos os mercados, mas ao preço mais baixo. Para resolver este problema, o que fazemos é adicionar uma restrição ao problema do monopolista. Sabemos que o monopolista irá cobrar um preço mais alto no mercado que for mais inelástico, ou seja, naquele em que os consumidores são menos sensíveis a variações nos preços. É fácil ver que neste caso, trata-se do mercado A (a curva de demanda inversa no mercado A tem inclinação maior do que a do mercado B). Assim, sabemos que nossa restrição deverá ser

$$p_A \leq p_B + 5$$

Como a função lucro é crescente no preço, a restrição irá valer com igualdade

$$p_A = p_B + 5$$

Portanto, o problema do monopolista será

$$\max_{y_A, y_B} (p_A - c)y_A + (p_B - c)y_B$$
$$s.t.\ p_A = 5 + p_B$$

Usando as demandas inversas nesta restrição, vamos estabelecer uma relação entre y_A e y_B e simplificar o problema:

$$p_A = 5 + p_B \Rightarrow 55 - y_A = 40 - \frac{1}{2}y_B \Rightarrow \boxed{y_A = 15 + \frac{1}{2}y_B}$$

Portanto, podemos resolver o problema do monopolista como

$$\max_{y_B} \left(35 - \frac{1}{2}y_B\right)\left(15 + \frac{1}{2}y_B\right) + \left(30 - \frac{1}{2}y_B\right)y_B$$
$$\max_{y_B}\ -\frac{3}{4}y_B^2 + 40y_B + 525$$

$$CPO:\ -\frac{3}{2}y_B + 40 = 0 \Rightarrow \boxed{y_B^m = \frac{80}{3}}$$

$$p_B = 35 - \frac{1}{2}\frac{80}{3} \Rightarrow \boxed{p_B^m = \frac{65}{3}}$$

$$p_A = 5 + \frac{65}{3} \Rightarrow \boxed{p_A^m = \frac{80}{3}}$$

$$q_A = 55 - \frac{80}{3} \Rightarrow \boxed{q_A^m = \frac{85}{3}}$$

Neste caso o lucro do monopolista será

$$\pi^m = -\frac{3}{4}\left(\frac{80}{3}\right)^2 + 40\frac{80}{3} + 525 \Rightarrow \boxed{\pi^m = 1058,33}$$

Note que o lucro do monopolista diminuiu em relação ao item anterior, como seria de se esperar uma vez que ele perde a liberdade de escolher o preço que quiser.

(c) Neste item a lógica é exatamente a mesma do item anterior. Ao zerar o custo de transporte, estamos obrigando o monopolista a cobrar o mesmo preço em ambos os mercados. Caso contrário, alguém poderia se aproveitar da diferença de preços para arbitrar. Assim, o problema do monopolista agora é

$$\max_{y_A, y_B} (p_A - c)y_A + (p_B - c)y_B$$
$$s.t.\ p_A = p_B$$

Resolveremos exatamente da mesma forma anterior:

$$p_A = p_B \Rightarrow 55 - q_A = 35 - \frac{1}{2}q_B \Rightarrow \boxed{q_A = 20 + \frac{1}{2}q_B}$$

Assim, o problema do monopolista é

$$\max_{y_A, y_B} \left(30 - \frac{1}{2}y_B\right)\left(20 + \frac{1}{2}y_B\right) + \left(30 - \frac{1}{2}y_B\right) y_B$$

$$\max_{y_B} \; -\frac{3}{4}y_B^2 + 35y_B + 600$$

$$CPO: \; -\frac{3}{2}y_B + 35 = 0 \Rightarrow \boxed{y_B^m = \frac{70}{3}}$$

$$p_B = 35 - \frac{1}{2}\frac{70}{3} \Rightarrow \boxed{p_B^m = p_A^m = \frac{70}{3}}$$

$$q_A = 55 - \frac{70}{3} \Rightarrow \boxed{q_A^m = \frac{95}{3}}$$

$$\pi^m = -\frac{3}{4}\left(\frac{70}{3}\right)^2 + 35\frac{70}{3} + 600 \Rightarrow \pi^m = 1008{,}33$$

Como era esperado, sem custos de transporte o lucro do monopolista cai ainda mais, porque agora ele já não pode discriminar preços entre os mercados.

8. Com a discriminação de segundo grau, o monopolista irá oferecer dois pacotes diferentes. Para o consumidor do tipo 1, ele oferece um pacote com x_1^* unidades por um preço p_1^*. Para o consumidor do tipo 2, um pacote com x_2^* unidades por um preço p_2^*. Assim, o problema deste monopolista é

$$\max_{p_1, p_2} p_1(x_1) + p_2(x_2) - c(x_1 + x_2)$$

Como as demandas inversas são contínuas e diferenciáveis, sabemos que elas também são integráveis. Portanto, podemos reescrever o problema do monopolista como

$$\max_{x_1, x_2} \underbrace{\int_0^{x_1} p_1(q)dq}_{p_1^*} + \underbrace{\int_0^{x_1} p_1(q)dq + \int_{x_1}^{x_2} p_2(q)dq}_{p_2^*} - c(x_1 + x_2)$$

Note que, como $p_1(q) < p_2(q) \; \forall q$, o pacote do consumidor tipo 2 vai custar mais caro do que o pacote do consumidor tipo 1.

Agora, precisamos encontrar as condições de primeira ordem. A Regra de Leibniz nos diz que a derivada da integral é simplesmente o integrando avaliado no limite superior menos o integrando avaliado no limite inferior (não esqueça a Regra da Cadeia). Ou seja, derivando a função lucro em relação a x_1 e x_2 temos

$$(x_1): \; p_1(x_1) - 0.p_1(0) + p_1(x_1) - 0.p_1(0) - p_2(x_1) - c'(x_1 + x_2) = 0$$

$$p_1(x_1^*) - c'(x_1^* + x_2^*) = p_2(x_1^*) - p_1(x_1^*) \qquad (1)$$

$$(x_2): \;\; p_2(x_2) - c'(x_1 + x_2) = 0$$

$$p_2(x_2^*) = c'(x_1^* + x_2^*) \tag{2}$$

A equação (2) nos mostra que o preço por unidade que o monopolista irá cobrar é igual ao custo marginal de produção. Já a equação (1) mostra a relação que é pedida pela questão: a diferença entre o preço do pacote do tipo 1 e o custo marginal é igual à diferença entre as demandas dos dois tipos.

9. (a) O problema deste monopolista é

$$\max_p \; p(\alpha - \beta p) - c(\alpha - \beta p)$$

$$\max_p \; \alpha p - \beta p^2 - \alpha c + \beta c p$$

$$CPO: \;\; \alpha + \beta c - 2\beta p = 0 \Rightarrow \boxed{p^m = \frac{\alpha + \beta c}{2\beta}}$$

$$x^m = \alpha - \beta . \frac{\alpha + \beta c}{2\beta} \Rightarrow \boxed{x^m = \frac{\alpha - \beta c}{2}}$$

O índice de Lerner é dado por $L = -\frac{1}{\eta}$, onde η é a elasticidade-preço da demanda. Lembrando que a elasticidade é

$$\eta = -\frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = -\cancel{\beta} . \frac{\frac{\alpha + \beta c}{\cancel{2}\cancel{\beta}}}{\frac{\alpha - \beta c}{\cancel{2}}} = -\frac{\alpha + \beta c}{\alpha - \beta c}$$

O índice de Lerner será

$$L = -\frac{1}{\eta} = \boxed{\frac{\alpha - \beta c}{\alpha + \beta c}}$$

Para calcular o peso morto, como já temos os preços e quantidades de monopólio, precisamos apenas encontrar a quantidade de equilíbrio competitivo, x^*. Como o preço competitivo é $p^* = CMg$, sabemos que

$$x^* = \alpha - \beta p^* \Rightarrow \boxed{x^* = \alpha - \beta c}$$

Assim, como a demanda é linear, sabemos que o peso morto será a área do triângulo

$$DW = \frac{1}{2}(p^m - p^*)(x^* - x^m) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha + \beta c}{2\beta} - c\right]\left[\alpha - \beta c - \frac{\alpha - \beta c}{2}\right]$$

$$DW = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha - \beta c}{2\beta}\right]\left[\frac{\alpha - \beta c}{2}\right] \Rightarrow \boxed{DW = \frac{(\alpha - \beta c)^2}{8\beta}}$$

(b) Agora, o problema do monopolista é

$$\max_p \; (p-t)(\alpha-\beta p) - c(\alpha-\beta p)$$

$$\max_p \; p(\alpha+\beta t+\beta c) - \beta p^2 - \alpha(c+t)$$

$$CPO: \;\; \alpha+\beta(t+c)-2\beta p = 0 \Rightarrow \boxed{p^m = \frac{\alpha+\beta(t+c)}{2\beta}}$$

$$x = \alpha - \beta.\frac{\alpha+\beta(t+c)}{2\beta} \Rightarrow \boxed{x^m = \frac{\alpha-\beta(t+c)}{2}}$$

A elasticidade-preço da demanda é

$$\eta = \frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = -\cancel{\beta}.\frac{\dfrac{\alpha+\beta(t+c)}{2\cancel{\beta}}}{\dfrac{\alpha-\beta(t+c)}{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{\eta = -\frac{\alpha+\beta(t+c)}{\alpha-\beta(t+c)}}$$

E o índice de Lerner

$$L = -\frac{1}{\eta} \Rightarrow L = \frac{\alpha-\beta(t+c)}{\alpha+\beta(t+c)}$$

As condições de equilíbrio competitivo não mudam, portanto o peso morto é

$$DW = \frac{1}{2}.(p^m - p^*)(x^* - x^m) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha+\beta(t+c)}{2\beta} - c\right]\left[\alpha - \beta c - \frac{\alpha-\beta(t+c)}{2}\right]$$

$$DW = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha-\beta c+}{2\beta} + \frac{t}{2}\right]\left[\frac{\alpha-\beta c}{2} + \frac{t}{2}\right] \Rightarrow \boxed{DW = \frac{(\alpha-\beta c)^2}{8\beta}} + \frac{t}{8}$$

Como era de se esperar, agora o peso morto é maior, porque o monopolista não consegue repassar todo o imposto para o consumidor.

A fração do imposto que é repassada é simplesmente a diferença no preço do monopolista nas situações com e sem imposto:

$$p^m - p^m_t = \frac{\alpha+\beta c}{2\beta} - \frac{\alpha+\beta(t+c)}{2\beta} = \boxed{\frac{t}{2}}$$

10. (a) O problema do monopolista é

$$\max_p \; p.\alpha p^{-\varepsilon} - c.\alpha p^{-\varepsilon}$$

$$\max_p \; \alpha p^{1-\varepsilon} - c.\alpha p^{-\varepsilon}$$

$$CPO: \;\; (1-\varepsilon)\cancel{\alpha p^{-\varepsilon}} + \varepsilon c.\cancel{\alpha p^{-\varepsilon-1}} = 0$$

$$(1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon c}{p} = 0 \Rightarrow \boxed{p^m = c.\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}}$$

Note que $\lim\limits_{\varepsilon\to 1-} p^m < 0$ e $\lim\limits_{\varepsilon\to 1+} p^m = +\infty$. Como os limites laterais são diferentes, o preço não está bem definido para $\varepsilon \leq 1$. Esta é a formalização matemática, para este caso em particular, de um conceito que nos é familiar: o monopolista não produz no trecho inelástico da demanda.

(b) No item anterior, encontramos o preço cobrado pelo monopolista, p^m. Para encontrar a quantidade produzida, basta substituir na curva de demanda:

$$x(p) = \alpha p^{-\varepsilon} \Rightarrow x(p^m) = \alpha \left(c \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right)^{-\varepsilon}$$

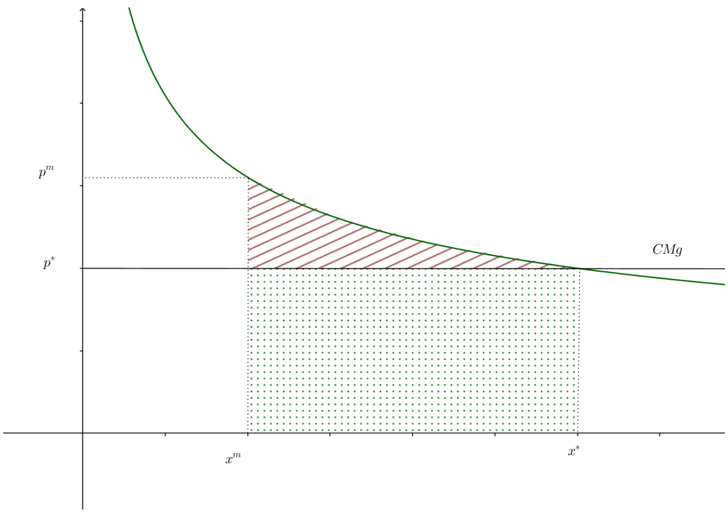
A elasticidade-preço desta demanda é

$$\eta = \frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = -\varepsilon \cancel{\alpha} p^{-\varepsilon-1} \frac{p}{\cancel{\alpha} p^{-\varepsilon}} = -\varepsilon \cancel{p^{-\varepsilon-1}} \cancel{p^{-(-\varepsilon-1)}} = -\varepsilon$$

Portanto, o índice de Lerner é

$$L = -\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\varepsilon}$$

A perda de peso morto é a ineficiência causada pelo monopólio, ao produzir uma quantidade diferente daquela que seria produzida em equilíbrio competitivo. Ou seja, é a área abaixo da curva de demanda e acima do custo marginal, entre a quantidade de monopólio e a quantidade competitiva.



Como esta demanda não é linear, não podemos mais calcular a área de um triângulo. Temos que integrar a função demanda inversa, entre estes dois intervalos e subtrair a área do retângulo de base $(x^* - x^m)$ e altura p^*. A área sob a curva de demanda é

$$\int_{x_m}^{x_*} p(x)dx = \int_{x_m}^{x_*} \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} dx = \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{x_m}^{x_*} x^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} \left[\frac{x^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]_{x_m}^{x_*} \tag{1}$$

Sabemos que no equilíbrio, $p = CMg$, portanto

$$x^* = \alpha c^{-\varepsilon}$$

E como já vimos no item anterior

$$x^m = \alpha \left(\frac{c\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right)^{-\varepsilon}$$

Basta substituir estes valores na equação (1) para obter

$$\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \left[(\alpha c^{-\varepsilon})^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} - \left(\alpha \left[\frac{c\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} \right] = \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \left[(\alpha c^{-\varepsilon})^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} . \left(1 - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon} \right) \right]$$

$$\alpha \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)} \left(c^{-\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} \left(1 - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon} \right) \tag{2}$$

Esta é a medida de toda a área abaixo da curva de demanda. Agora, vamos calcular a área do retângulo.

$$(x_* - x_m)p_* = \left[\alpha c^{-\varepsilon} - \alpha \left(\frac{c\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right)^{-\varepsilon} \right] c = \left[\alpha c^{-\varepsilon} \left(1 - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon} \right) \right] c =$$

$$\alpha c^{1-\varepsilon} \left(1 - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon} \right) \tag{3}$$

Portanto, a perda de peso morto é dada pela diferença entre as equações (2) e (3):

$$DW = \alpha \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)} \left(c^{-\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} \left(1 - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon} \right) - \alpha c^{1-\varepsilon} \left(1 - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon} \right) = \boxed{\alpha \left(1 - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon} \right) \left[\frac{1}{c(\varepsilon + 1)} - c^{1-}\right.}$$

(c) Com o imposto, o problema do monopolista é

$$\max_p \ (p - t).\alpha p^{-\varepsilon} - c.\alpha p^{-\varepsilon}$$

$$\max_p \ \alpha p^{1-\varepsilon} - \alpha p^{-\varepsilon}(c + t)$$

$$CPO: \ (1 - \varepsilon)\cancel{\alpha p^{-\varepsilon}} + \varepsilon \cancel{\alpha p^{-\varepsilon - 1}}(c + t) = 0$$

$$(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon(c + t)}{p} = 0 \Rightarrow \boxed{p_m = (c + t)\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}}$$

Note a semelhança com o item (a) acima. A única diferença é que estamos acrescentando ao custo, c, o imposto, t. Assim, temos que a quantidade produzida será

$$x_m = \alpha p_m^{-\varepsilon} = \boxed{\alpha \left[(c + t)\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^{-\varepsilon}}$$

A perda de peso morto também se resolve de maneira semelhante, apenas acrescentando ao custo, c, o imposto, t. Deste modo,

$$DW = \boxed{\alpha\left(1-\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right]^{-\varepsilon}\right)\left[\frac{1}{(c+t)(\varepsilon+1)}-(c+t)^{1-\varepsilon}\right]}$$

A elasticidade-preço da demanda não muda, o que significa que o índice de Lerner também não vai mudar.

$$\eta = \frac{dx}{dp_m}\frac{p_m}{x} = -\varepsilon\cancel{\alpha}p_m^{-\varepsilon-1}\frac{p_m}{\cancel{\alpha}p_m^{-\varepsilon}} = -\varepsilon\cancel{p_m^{-\varepsilon-1}p_m^{-(-\varepsilon-1)}} = -\varepsilon$$

$$L = -\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Este resultado não tem nada de surpreendente. Não há nenhuma razão para esperar que a introdução do imposto afete o poder de mercado do monopolista.

Para ver qual a fração do imposto que o monopolista repassa ao consumidor, vamos simplesmente fazer a diferença de preços nas duas situações, dividida pelo imposto, t.

$$F_m = \frac{(c+t)\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} - c\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}{t} = \frac{\cancel{t}\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}{\cancel{t}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}$$

Como vimos no item (a), para que o preço esteja definido, $\varepsilon > 1$, portanto, a fração repassada pelo monopolista, F_m é necessariamente maior do que 1. Ou seja, o monopolista se aproveita do imposto para aumentar seu preço ainda mais. No caso do equilíbrio competitivo, como $p = CMg$, a introdução do imposto faz com que o custo marginal aumente em t. Portanto, a fração repassada ao consumidor será

$$F_c = \frac{c+t-c}{t} = 1$$

11. Sabemos que a função lucro do monopolista é

$$\pi(x_m) = (p_m - c)x_m$$

Já vimos na questão anterior que o preço escolhido pelo monopolista é

$$p^m = c.\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}$$

Para um dado valor de $x_m = x$, temos que o lucro depende de ε somente através do efeito que este parâmetro tem no preço. Logo,

$$\frac{\partial\pi}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial p}{\partial\varepsilon} = \frac{c}{(\varepsilon-1)^2}$$

Isto significa que quanto maior for o parâmetro ε, ou seja quanto mais preço-elástica for a demanda, menor o preço que o monopolista pode cobrar e, portanto, menor o seu lucro.

12. O problema do monopolista deste monopolista é

$$\max_{q \geq 0} p(q).q - c(q) - t.q$$

Como a função lucro é côncava em q, sabemos que a condição de primeira ordem é uma condição suficiente para maximizar a função. Assim,

$$CPO: \ p'(q).q + p(q) - c'(q) - t = 0$$

Queremos encontrar o imposto ótimo t^* tal que a quantidade produzida pelo monopolista seja a quantidade eficiente q^*. Como sabemos, a quantidade eficiente é tal que $p = CMg$, ou seja, tal que $p(q^*) = c'(q^*)$. Portanto,

$$p'(q^*).q^* + \cancel{\underbrace{p(q^*) - c'(q^*)}_{0}} - t^* = 0 \Rightarrow t^* = p'(q^*).q*$$