Microeconomia II - 2015/2

Lista 1

27 de setembro de 2015

Questão 1

Sabemos que a curva de contrato é o locus das alocações Pareto eficientes, ou seja, é o conjunto de todas as cestas que resolve simultaneamente o problema de maximização de utilidade de ambos os indivíduos. Assim, em qualquer ponto sob a curva de contrato $TMS_A = TMS_B$. Nesta questão, ambos os indivíduos têm utilidade Cobb-Douglas, portanto:

$$TMS_A = \frac{\alpha}{1-\alpha}.\frac{x_{2A}}{x_{1A}}$$
$$TMS_B = \frac{\beta}{1-\beta}.\frac{x_{2B}}{x_{1B}}$$

Além disto, sabemos que a dotação total de ambos os bens na economia é dada por:

$$w_1 = x_{1A} + x_{1B}$$
$$w_2 = x_{2A} + x_{2B}$$

Vamos usar esta relação para escrever a curva de contrato em função apenas de x_{1B} e x_{2B}:

Curva de Contrato: $TMS_A = TMS_B$

$$\frac{x_{2B}}{x_{1B}} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}.\frac{(w_2 - x_{2B})}{(w_1 - x_{1B})}$$

$$(w_1 - x_{1B})x_{2B} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}.(w_2 - x_{2B})x_{1B}$$

$$w_1 x_{2B} - x_{1B}x_{2B} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}w_2 x_{1B} - \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}x_{1B}x_{2B}$$

$$x_{2B} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\frac{w_2}{w_1}x_{1B} + \frac{1}{w_1}\left[1 + \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right]x_{1B}x_{2B}$$

$$x_{2B} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\frac{w_2}{w_1}x_{1B} + \frac{1}{w_1}\left[\frac{\beta-\alpha}{\beta(1-\alpha)}\right]x_{1B}x_{2B}$$

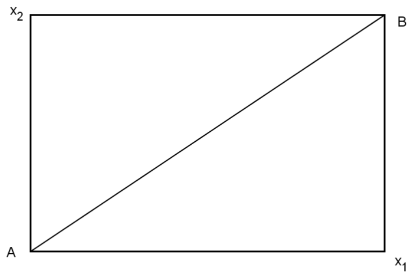
Toda esta álgebra serve para podermos ver a inclinação da curva de contrato como função dos parâmetros das utilidades. Assim, numa caixa de Edgeworth com x_1 na horizontal e x_2 na vertical temos:

a. $\alpha = \beta$

Neste caso, o segundo termo da expressão anterior desaparece e o primeiro termo se resume a uma relação linear entre x_{2b} e x_{1B}:

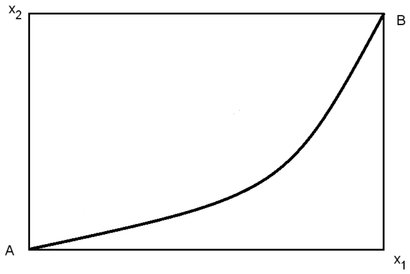
$$x_{2B} = \frac{w_2}{w_1} x_{1B}$$

A curva de contrato é simplesmente a diagonal da caixa de Edgeworth.



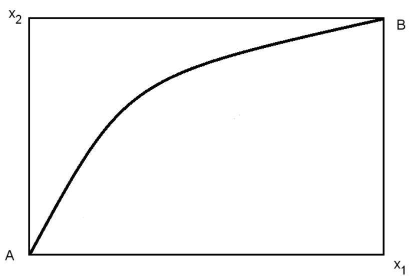
b: $\alpha > \beta$

Neste caso o indivíduo A gosta mais do bem x_1 do que o indivíduo B. A curva de contrato é convexa:



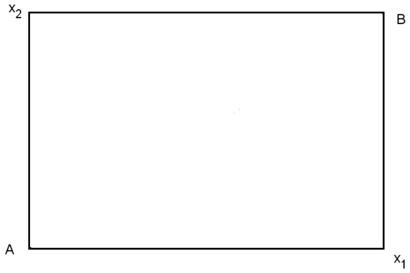
c: $\alpha < \beta$

É o problema simétrico do anterior. O indivíduo B gosta mais de x_1 do que A. A curva de contrato é côncava:



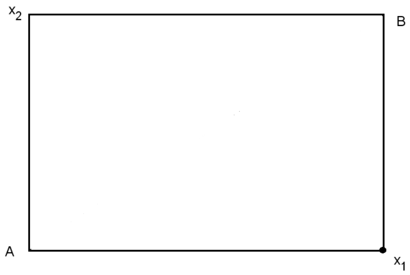
d: $\alpha = 0 < \beta < 1$

Neste caso, o indivíduo A não consome nada de x_1. Não há equilíbrio, pois como $\beta < 1$ o indivíduo B deseja uma cesta balanceada, ou seja, algum ponto no interior da caixa. Mas qualquer ponto interior viola a condição do indivíduo A.



e: $\alpha = 1, \beta = 0$

A curva de contrato é um ponto, com o indivíduo B consumindo toda a dotação de x_2 e o indivíduo A toda a dotação de x_1.



Questão 2

Se as preferências são diferenciáveis, sabemos que as curvas de indiferença são contínuas e não são do tipo complementares perfeitos. Assumindo convexidade estrita, podemos excluir também a possibilidade de solulões de canto, o que significa que podemos tomar um ponto arbitrário da diagonal da caixa de Edgeworth. Ainda, como as preferências são homotéticas, sabemos que as curvas de indiferença são projeções radiais umas das outras. Assim, suponha que um ponto (x_1^*, x_2^*) qualquer da diagonal é Pareto-eficiente. Neste caso, sabemos que $TMS_A(x_1^*, x_2^*) = TMS_B(x_1^*, x_2^*)$. Mas, se as preferências são homotéticas, então $TMS_A(\lambda x_1^*, \lambda x_2^*) = TMS_B(\lambda x_1, *, \lambda x_2^*), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 3

$$u_A = \frac{1}{4} ln x_{1A} + \frac{1}{4} ln x_{2A} + \frac{1}{2} ln x_{3A}$$

$$u_B = \frac{1}{2} ln x_{1B} + \frac{1}{3} ln x_{2B} + \frac{1}{6} ln x_{3B}$$

$$p_1 = 1$$

Começamos encontrando as demandas marshallianas. Como ambas as utilidades são Cobb-Douglas, temos:

$$\begin{aligned}
x_{1A}^* &= \frac{m_A}{4p_1} = \frac{1}{4}(3 + 4p_2 + 2p_3) \\
x_{2A}^* &= \frac{m_A}{4p_2} = \frac{1}{4p_2}(3 + 4p_2 + 2p_3) \\
x_{3A}^* &= \frac{m_A}{2p_3} = \frac{1}{2p_3}(3 + 4p_2 + 2p_3) \\
x_{1B}^* &= \frac{m_B}{2p_1} = \frac{1}{2}(1 + 5p_2 + 3p_3) \\
x_{2B}^* &= \frac{m_B}{3p_2} = \frac{1}{3p_2}(1 + 5p_2 + 3p_3) \\
x_{3B}^* &= \frac{m_B}{6p_3} = \frac{1}{6p-3}(1 + 5p_2 + 3p_3)
\end{aligned}$$

a)

Lei de Walras: O valor do excesso de demanda agregada na economia é zero.

$$p_1(x_{1A}^* - w_{1A} + x_{1B}^* - w_{1B}) + p_2(x_{2A}^* - w_{2A} + x_{2B}^* - w_{2B}) + p_3(x_{3A}^* - w_{3A} + x_{3B}^* - w_{3B}) = 0$$

Vamos calcular primeiro o excesso de demanda em cada mercado:

Bem 1: $\frac{1}{4}(3 + 4p_2 + 2p_3) - 3 + \frac{1}{2}(1 + 5p_2 + 3p_3) - 1 = \frac{14p_2 + 8p_3 - 11}{4}$

Bem 2: $\frac{1}{4p_2}(3 + 4p_2 + 2p_3) - 4 + \frac{1}{3p_2}(1 + 5p_2 + 3p_3) - 5 = \frac{13p_2 + 32p_3 + 18p_3}{12p_2} - 9$

Bem 3: $\frac{1}{2p_3}(3 + 4p_2 + 2p_3) - 2 + \frac{1}{6p_3}(1 + 5p_2 + 3p_3) - 3 = \frac{10 + 17p_2 + 9p_3}{6p_3} - 5$

Agora, basta multiplicar pelo vetor de preços e somar os 3 mercados:

$$\begin{aligned}
\frac{14p_2 + 8p_3 - 11}{4} + p_2\left(\frac{13p_2 + 32p_3 + 18p_3}{12p_2} - 9\right) + p_3\left(\frac{10 + 17p_2 + 9p_3}{6p_3} - 5\right) = \\
\frac{14p_2 + 8p_3 - 11}{4} + \frac{13p_2 + 32p_3 + 18p_3}{12} - 9p_2) + \frac{10 + 17p_2 + 9p_3}{6} - 5p_3 = \\
\left(\frac{13}{12} + \frac{10}{6} - \frac{11}{4}\right) + p_2\left(\frac{14}{4} + \frac{32}{12} - 9 + \frac{17}{6}\right) + p_3\left(2 + \frac{18}{12} + \frac{9}{6} - 5\right) = 0
\end{aligned}$$

b)

Um equilíbrio competitivo nesta economia é composto por uma alocação $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ e um vetor de preços $p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ que a sustente. Para encontrar o vetor de preços de equilíbrio, fazemos o market-clearing da economia:

$$
\begin{aligned}
x_{1A}^* + x_{1B}^* &= p_1(w_{1A} + w_{1B}) \\
x_{2A}^* + x_{2B}^* &= p_2(w_{2A} + w_{2B}) \\
x_{3A}^* + x_{3B}^* &= p_3(w_{3A} + w_{3B})
\end{aligned}
$$

Deste modo, temos <u>Mercado do bem 1</u>:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4} + p_2 + \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}p_2 + \frac{3}{2}p_3 &= 4 \\
3 + 4p_2 + 2p_3 + 2 + 10p_2 + 6p_3 &= 16 \\
\boxed{14p_2 + 8p_3 = 11}
\end{aligned}
$$

<u>Mercado do bem 2</u>:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4} + p_2 + \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}p_2 + p_3 &= 9p_2 \\
9 + 12p_2 + 6p_3 + 4 + 20p_2 + 12p_3 &= 108p_2 \\
\boxed{76p_2 - 18p_3 = 13}
\end{aligned}
$$

<u>Mercado do bem 3</u>:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2} + 2p_2 + p_3 + \frac{1}{6} + \frac{5}{6}p_2 + \frac{1}{2}p_3 &= 5p_3 \\
9 + 12p_2 + 6p_3 + 1 + 5p_2 + 3p_3 &= 30p_3 \\
\boxed{21p_3 - 17p_2 = 10}
\end{aligned}
$$

Para determinar o vetor de preços de equilíbrio, basta resolver o sistema:

$$
\begin{cases}
14p_2 + 8p_3 = 11 \\
76p_2 - 18p_3 = 13 \\
21p_3 - 17p_2 = 10
\end{cases}
$$

$$
\boxed{(p_1, p_2, p_3) = \left(1, \frac{151}{430}, \frac{327}{430}\right)}
$$

Basta substituir estes preços nas equações de demanda para encontrar as alocações de equilíbrio.

$$
\begin{aligned}
x_{1A}^* &= \frac{3}{4} + \frac{151}{430} + \frac{1}{2}.\frac{327}{430} \approx 1,48 \\
x_{2A}^* &= \frac{3}{4}.\frac{430}{151} + 4 + \frac{1}{2}.\frac{327}{151} \approx 7,22 \\
x_{3A}^* &= \frac{3}{2}.\frac{430}{327} + 2.\frac{151}{327} + 1 \approx 3,90
\end{aligned}
$$

$$x_{1B}^* = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}.\frac{151}{430} + \frac{3}{2}.\frac{327}{430} \approx 2,76$$

$$x_{2B}^* = \frac{1}{3}.\frac{430}{151} + \frac{5}{3} + \frac{327}{151} \approx 4,78$$

$$x_{3B}^* = \frac{1}{6}.\frac{430}{327} + \frac{5}{6}.\frac{151}{327} + \frac{1}{2} \approx 1,10$$

Questão 4

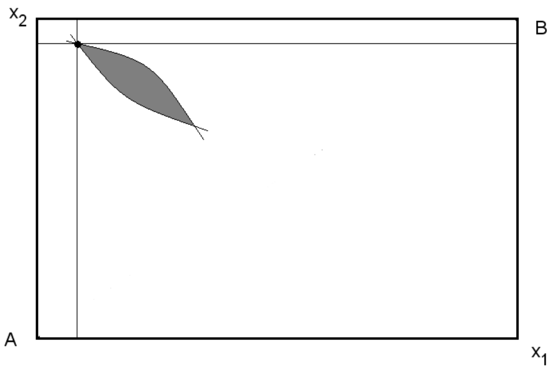
$$u^A(x_1^A, x_2^A) = \frac{2}{3}lnx_1^A + \frac{1}{3}x_2^A$$

$$u^B(x_1^B, x_2^B) = \frac{1}{3}lnx_1^B + \frac{2}{3}x_2^B$$

$$w^A = (1, 4)$$

$$w^B = (3, 1)$$

a)



b)

$$\frac{\frac{2}{3x_1^A}}{\frac{1}{3x_2^A}} = \frac{\frac{1}{3x_1^B}}{\frac{2}{3x_2^B}}$$

$$\frac{2x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{2x_1^B} = \frac{w_2 - x_2^A}{2(w_2 - x_2^A)}$$

$$4x_2^A(w_1 - x_1^A) = x_1^A(w_2 - x_2^A)$$

$$\boxed{\frac{x_2^A}{5 - x_2^A} = \frac{x_1^A}{4(4 - x_1^A)}}$$

c)

Demandas marshalianas:

$$\begin{aligned}
x_{1A}^* &= \frac{2m_A}{3p_1} = \frac{2}{3p_1}(p_1 + 4p_2) \\
x_{2A}^* &= \frac{m_A}{3p_2} = \frac{1}{3p_2}(p_1 + 4p_2) \\
x_{1B}^* &= \frac{m_B}{3p_1} = \frac{1}{3p_1}(3p_1 + p_2) \\
x_{2B}^* &= \frac{2m_B}{3p_2} = \frac{2}{3p_2}(3p_1 + p_2) \\
& \qquad\qquad\qquad p_1 = 1
\end{aligned}$$

Lei de Walras:

$$\underbrace{\frac{2}{3} + \frac{8}{3}p_2}_{x_{1A}^*} - \underbrace{1}_{w_{1A}} + \underbrace{1 + \frac{1}{3}p_2}_{x_{1B}^*} - \underbrace{3}_{w_{1B}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}p_2}_{p_2 x_{2A}^*} - \underbrace{4p_2}_{p_2 w_{2A}} + \underbrace{2 + \frac{2}{3}p_2}_{p_2 x_{2B}^*} - \underbrace{p_2}_{p_2 w_{2B}} =$$

$$\underbrace{\frac{2}{3} - 1 + 1 - 3 + \frac{1}{3} + 2}_{0} + p_2 \underbrace{\left[\frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 4 + \frac{2}{3} - 1\right]}_{0} = 0$$

d)

Equilíbrio no mercado do bem 1: $x_{1A}^* + x_{1B}^* = w_{1A} + w_{1B}$

$$x_{1A}^* + x_{1B}^* = \frac{2}{3} + \frac{8p_2}{3p_1} + 1 + \frac{p_2}{3p_1} = \frac{5}{3} + 3\frac{p_2}{p_1}$$

$$w_{1A} + w_{1B} = 1 + 3 = 4$$

$$\frac{5}{3} + 3\frac{p_2}{p_1} = 4$$

$$3\frac{p_2}{p_1} = \frac{7}{3}$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{7}{9}}$$

Agora que encontramos o vetor de preços, basta substituir nas funções de demanda para encontrar a alocação de equilíbrio:

$$x_{1A}^* = \frac{2}{3} + \frac{8}{3}.\frac{7}{9} \approx 2,74$$

$$x_{2A}^* = \frac{1}{3}.\frac{9}{7} + \frac{4}{3} \approx 1,76$$

$$x_{1B}^* = 1 + \frac{1}{3}.\frac{7}{9} \approx 1,26$$

$$x_{2B}^* = 2.\frac{9}{7} + \frac{2}{3} \approx 3,24$$

Assim, um equilíbrio competitivo para esta economia é:

$$\{(p_1^*, p_2^*); (x_{1A}^*; x_{2A}^*); (x_{1B}^*; x_{2B}^*)\} = \left\{ \left(\frac{9}{7} p_2; \frac{7}{9} p_1 \right); (2,74; 1,76); (1,26; 3,23) \right\}$$

Questão 5

$$u_1(x, y) = 100 + 7x^{\frac{30}{50}} y^{\frac{6}{10}}$$

$$u_2(x, y) = 3x^5 y^5$$

$$w_1 = (6, 1)$$

$$w_2 = (4, 9)$$

a)

Numa economia com planejador central, não existe sistema de preços. O planejador conhece tudo o que precisa para fazer a alocação ótima dos recursos da economia. O planejador vai escolher a combinação (x_1, y_1) que dará ao indivíduo 1 a maior utilidade possível, de modo que a utilidade do indivíduo 2 seja constante no nível 18. Note que nesta questão ambas as funções utilidade representam a mesma preferência. Basta aplicar uma transformação monotônica apropriada.

$$\underset{x_1, y_1}{max}\, 100 + 7x_1^{\frac{30}{50}} y_1^{\frac{6}{10}}$$

$$s.a. \begin{cases} 3x_2^{0.5} y_2^{0.5} = 18 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ y_1 + y_2 = 10 \end{cases}$$

(i) Transformações monotônicas em u_1:

$$\hat{u_1} = \left(\frac{u_1 - 100}{7} \right)^{\frac{5}{3}} = x_1 y_1$$

(ii) Temos um problema mais complicado do que fazemos usualmente, pois são 3 restrições que devem ser respeitadas simultaneamente. Mas, podemos simplificar este problema usando as restrições de recursos:

$$x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 10 - x_1$$

$$y_1 + y_2 = 10 \Rightarrow y_2 = 10 - y_1$$

Agora, basta usar estas relações na restrição de utilidade do indivíduo 2:

$$u_2 = 3(10 - x_1)^{0.5} (10 - y_1)^{0.5} = 18$$

Repare que o que fizemos foi reduzir o número de variáveis na solução do sistema. Como as restrições de recursos valem com igualdade, ao determinar as quantidades ótimas de x_1 e y_1 estaremos simultaneamente determinando x_2 e y_2.

(iii) Montar o Lagrangeano:

$$\mathscr{L} = x_1 y_1 + \lambda[18 - 3(10-x_1)^{0.5}(10-y_1)^{0.5}]$$

$$\text{C.P.O.:}\begin{cases} (x_1) \quad y_1 + \lambda\left[\dfrac{-3(10-y_1)^{0.5}}{2(10-x_1)^{0.5}}\right] = 0 \\ \\ (y_1) \quad x_1 + \lambda\left[\dfrac{-3(10-y_1)^{0.5}}{2(10-x_1)^{0.5}}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{y_1}{10-y_1} = \frac{x_1}{10-x_1}}_{\text{o problema é simétrico:} \boxed{x_1 = y_1}}$$

Substituindo em u_2:

$$3(10-x_1)^{0.5}(10-y_1)^{0.5} = 18$$

$$3(10-x_1) = 18$$

$$(10-x_1) = 6$$

$$x_1 = 4$$

$$\boxed{x_1^* = y_1* = 4}$$

$$\boxed{x_2* = y_2* = 6}$$

b)

Quando falamos em equilíbrio competitivo estamos falando claramente de uma economia de mercado, em que o sistema de preços determina as alocações de equilíbrio. Primeiro encontramos as demandas marshallianas:

$$x_1^* = \frac{m_1}{2p_x} = \frac{6p_x + p_y}{2p_x}$$
$$x_2^* = \frac{m_2}{2p_x} = \frac{4p_x + 9p_y}{2p_x}$$

Agora, basta fazer o market-clearing. Como temos apenas dois bens, usando a Lei de Walras, sabemos que basta encontrar o equilíbrio em um dos mercados.

<u>Equilíbrio no mercado do bem x</u>: $x_1^* + x_2^* = 10$

$$\frac{10p_x + 10p_y}{2p_x} = 10$$

$$10p_x + 10p_y = 20p_x$$

$$10p_x = 10_p y$$

$$\boxed{p_x = p_y}$$

$$\boxed{(x_1^*, y_1^*) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)}$$

$$\boxed{(x_2^*, y_2^*) = \left(\frac{13}{2}, \frac{13}{2}\right)}$$

Note que como ambos os indivíduos têm a mesma preferência, no equilíbrio competitivo os preços de ambos os bens são iguais. Isto é o que deveríamos esperar, pois ambos os indivíduos atribuem o mesmo valor subjetivo a ambos os bens.

c)

O consumo de ambos os bens pelo consumidor 2 é maior em (b) do que em (a). Como sua função utilidade é monotônica, ele certamente estará em melhor situação em (b).

Questão 6

$$u^A = (x_1^A, x_2^A) = \min\{x_1^A, x_2^A\}$$
$$u^B = (x_1^B, x_2^B) = \min\{x_1^B, \beta x_2^B\}$$

a) $\beta = 1$

$$u^A = u^B$$

b) $\beta = \frac{1}{2}$

$$A : x_1^A = x_2^A$$
$$B : x_1^B = \frac{1}{2} x_2^B$$

c)

Se $\beta = 1$ e $w_A = w_B = (5,5)$, então $(x_A, x_B) = (5,5,5,5)$ é o equlíbrio competitivo para qualquer vetor de preços.

Questão 7

Para começar, repare que as funções de produção são equivalentes. A produtividade marginal de ostras é a mesma que a de tamarindos. Então, Robinson produtor deve alocar a mesma quantidade de tempo para cada um dos produtos. Como a restrição de recursos está normalizada para $T = T^o + T^t = 1$, sabemos que $T^o = T^t = \frac{1}{2}$. Portanto, a oferta agregada desta economia será

$$o^s = t^s = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Note ainda que o problema é simétrico. Robinson consumidor atribui o mesmo valor subjetivo para cada um dos bens. Em equilíbrio, não haverá excesso de demanda por nenhum dos bens, de modo que

$$o^d = t^d = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Sabemos da teoria do consumidor que $TMS_{o,t} = \dfrac{p_o}{p_t}$. Se avaliarmos a $TMS_{o,t}$ no equilíbrio, temos

$$\frac{p_o}{p_t} = 1 \Rightarrow p_o = p_t$$

Assim, usando p_t como numerário, sabemos que o vetor de preços $(p_o, p_t) = (1, 1)$ sustenta a alocação de equilíbrio.

Questão 8

a)

$$\begin{aligned} x_A^* &= \frac{m_A}{4p_x} = \frac{p_x}{4p_x} = \frac{1}{4} \\ y_A^* &= \frac{3m_A}{4p_x} = \frac{3p_x}{4p_y} \\ x_B^* &= \frac{m_B}{2p_x} = \frac{1p_y}{2p_x} \\ y_B^* &= \frac{m_B}{2p_y} = \frac{p_y}{2p_y} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Em equilíbrio, $y_A^* = \frac{1}{2}$:

$$y_A^* = \frac{3p_x}{4p_y} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{p_x}{p_y} = \frac{2}{3}}$$

Conferindo:

$$x_B^*\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{(x_A^*, y_A^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}$$

$$\boxed{(x_B^*, y_B^*) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)}$$

b)

$$TMS_A = \frac{y_A}{3x_A}$$

$$TMS_B = \frac{y_B}{x_B}$$

$$\text{Curva de contrato: } \frac{y_A}{x_A} = \frac{3(1-y_A)}{1-x_A}$$

$$\boxed{\frac{y_A}{1-y_A} = \frac{3x_A}{1-x_A}}$$

c)

$$p_y = 1$$

$$m_A = p_x + w_{Ay}$$

$$m_B = 1 - w_{Ay}$$

Demanda de A pelo bem x:

$$x_A^* = \frac{m_A}{4p_x} = \frac{1}{4} + \frac{w_{Ay}}{4p_x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{w_{Ay}}{4p_x} = \frac{1}{4}$$

$$w_{Ay} = p_y$$

Demanda de B pelo bem x:

$$x_B^* = \frac{1-w_{Ay}}{2p_x} = \frac{1}{2}$$

$$1 - w_{Ay} = p_x$$

$$p_x = w_{Ay} = \frac{1}{2}$$

Conferindo:

$$y_A^* = \frac{3}{4}m_A = \frac{3}{4}(p_x + w_{Ay}) = \frac{3}{4}$$

$$y_B^* = \frac{1}{2}m_B = \frac{1}{2}(1 - w_{Ay}) = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{É preciso transferir } \frac{1}{2} \text{ unidade do bem y de B para A.}}$$

d)

Note que B gosta igualmente dos dois bens, mas A prefere y a x. Logo, x será usado para produzir y.

Firma:

$$\max_x \; p_y x^d - p_x x^d$$

$$\boxed{p_y = p_x}$$

Consumidor A:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} & x_A^{\frac{1}{4}} y_A^{\frac{3}{4}} \\ \text{s.a.} & x + y = p_x + 0,5\pi \end{cases}$$

$$x_A^* = \frac{1}{4p_x}(p_x + 0,5\pi) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8p_x}$$

$$y_A^* = \frac{3}{4p_y}(p_x + 0,5\pi) = \frac{3p_x}{4p_y} + \frac{3\pi}{8p_y}$$

Consumidor B:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} & xy \\ \text{s.a.} & x + y = p_y + 0,5\pi \end{cases}$$

$$x_B^* = \frac{1}{2p_x}(p_y + 0,5\pi) = \frac{p_y}{2p_x} + \frac{\pi}{4p_x}$$

$$y_B^* = \frac{1}{2p_y}(p_x + 0,5\pi) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4p_y}$$

Equilíbrio:

$$\boxed{p_x = p_y = 1}$$

$$x_A^* + x_B^* + x^d = 1$$

$$y_A^* + y_B^* = 1 + y^s$$

$$x^d + y^s$$

$$\pi = p_y y^s - p_x x^d = 0$$

$$\boxed{(x_A^*, y_A^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)}$$

$$\boxed{(x_B^*, y_B^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

e)

$x^s = x^d = \frac{1}{4}$

f)

Sem firma:

$$u_A = \frac{1}{4}^{0,25}\frac{2}{3}^{0,75} \approx 0,521$$

$$u_B = \frac{3}{4}^{0,5}\frac{1}{3}^{0,5} \approx 0,5$$

Com firma:

$$u_A = \frac{1}{4}^{0,25}\frac{3}{4}^{0,75} \approx 0,569$$

$$u_B = \frac{1}{2}^{0,5}\frac{1}{2}^{0,5} \approx 0,5$$

Questão 9

$$x = 3l_x$$

$$y = 2l_y$$

$$l_x + l_y = 1$$

$$u(x, y) = x^2y^8$$

a)

$$\max_{x,y} \; x^2y^8$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} x = 3l_x \\ y = 2l_y \\ l_x + l_y = 1 \end{cases}$$

Note que podemos simplificar o problema de modo a eliminar as restrições:

$$x = 3l_x$$

$$l_x + l_y = 1 \Rightarrow l_y = 1 - l_x$$

$$y = 2l_y \Rightarrow y = 2(1 - l_x)$$

Agora, podemos resolver o problema usando apenas uma variável de escolha: l_x

$$\max_{l_x} \; (3l_x)^2[2(1 - l_x)]^8$$

C.P.O.:

$$2(3l_x).3[2(1 - l_x)]^8 + 8[2(1 - l_x)]^7(-2)(3l_x)^2 = 0$$

$$18l_x[2(1 - l_x)]^8 = 144[2(1 - l_x)]^7l_x^2$$

$$36(1 - l_x) = 144l_x$$

$$1 - l_x = 4l_x \rightarrow \boxed{l_x = \frac{1}{5}}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{5}}$$

$$\boxed{l_y = \frac{4}{5}}$$

$$\boxed{y = \frac{8}{5}}$$

b)

Firma x:

$$\max_{l_x} p_x 3l_x - wl_x$$

$$\text{C.P.O: } 3p_x - w = 0$$

$$\boxed{p_x = \frac{w}{3}}$$

Firma y:

$$\max_{l_y} 2l_y - wl_y$$

$$\text{C.P.O: } 2 - w = 0$$

$$\boxed{w = 2}$$

Consumidor:

$$\max_{x,y} x^2y^8 \text{ s.a. } p_x x + y = w$$

$$\mathscr{L} = x^2y^8 + \lambda[w - y - p_x x]$$

$$\text{C.P.O.:} \begin{cases} (x) & 2xy^8 - \lambda p_x = 0 \\ (y) & 8x^2y^7 - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{2xy^8}{p_x} = 8x^2y^7 \rightarrow \boxed{x = \frac{y}{4p_x}}$$

Substituindo na restrição orçamentária:

$$p_x x + y = \frac{y}{4} + y = w$$

$$y = \frac{4}{5}w$$

$$\boxed{y = \frac{8}{5}}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{5}}$$

c)

Questão 10

$$u^A = lnx_1^A + 3lnx_2^A$$

$$u^B = 3lnx_1^B + 5x_2^B$$

$$w^A = (2, 0)$$

$$w^B = (1, 4)$$

a)

$$\begin{aligned}
TMS_A &= TMS_B \\
\frac{\frac{1}{x_1^A}}{\frac{3}{x_2^A}} &= \frac{\frac{3}{x_1^B}}{5} \\
\frac{x_2^A}{3x_1^A} &= \frac{3}{5x_1^B} \\
&= \frac{3}{5(w_1^B - x_1^A)} \\
&= \frac{3}{15 - 5x_1^A}
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_2^A = \frac{9x_1^A}{15 - 5x_1^A}}$$

b)

Demandas marshalianas:

$$\begin{aligned}
x_1^{A^*} &= \frac{m^A}{4p_1} = \frac{1}{2} \\
x_2^{A^*} &= \frac{3m^A}{4p_1} = \frac{3}{4}\frac{2p_1}{p_2} = \frac{3p_1}{2p_2} \\
x_1^{B^*} &= \begin{cases} \frac{m^B}{p_1}, & \text{se } m^B < \frac{3}{5}p_2 \\ \frac{3p_2}{5p_1}, & \text{se } m^B \geq \frac{3}{5}p_2 \end{cases} \\
x_2^{B^*} &= \begin{cases} 0, & \text{se } m^B < \frac{3}{5}p_2 \\ \frac{m^B - \frac{3}{5}p_2}{p_2}, & \text{se } m^B \geq \frac{3}{5}p_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$m^B = p_1 + 4p_2 > \frac{3}{5}p_2$$

Equilíbrio no mercado do bem 2:

$$\frac{17}{5} + \frac{p_1}{p_2} + \frac{3p_1}{2p_2} = 4$$

$$\frac{3}{5} = \frac{5p_1}{2p_2} \rightarrow \boxed{\frac{p_1}{p_2} = \frac{6}{25}}$$

$$\boxed{x_2^{A^*} = \frac{9}{25}}$$

$$\boxed{x_2^{B^*} = \frac{91}{25}}$$

Conferindo:

$$\frac{1}{2} + \frac{3p_2}{5p_1} = \frac{1}{2} + \frac{25}{10} = 3$$

$$\boxed{x_1^{A^*} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{x_1^{B^*} = \frac{5}{2}}$$

c)

Como $(x_1^B, x_2^B) \gg (x_1^A, x_2^A)$ e u^A é crescente em (x_1^A, x_2^A), A inveja B.

d)

Se $w^A = w^B$, todas as cestas factíveis para A também são factíveis para B. Logo, se B escolhe $(x_1^B, x_2^B) \neq (x_1^A, x_2^A)$, é porque B prefere (x_1^B, x_2^B) a (x_1^A, x_2^A). [E vice-versa].

Questão 11

$$u_A(x_A, y_A) = x_A^2 y_A$$

$$m_A = 10 + 0,25\pi_F + 0,75\pi_G$$

$$u_B(x_B, y_B) = x_B y_B^2$$

$$m_B = 10 + 0,75\pi_F + 0,25\pi_G$$

$$w_A = w_B = 10$$

$$x = f(l_F) = \sqrt{l_F}$$

$$y = f(l_G) = 2\sqrt{l_G}$$

Consumidor A:

$$x_A = \frac{2}{3p_x}(10 + 0,25\pi_F + 0,75\pi_G)$$

$$y_A = \frac{1}{3p_y}(10 + 0,25\pi_F + 0,75\pi_G)$$

Consumidor B:

$$x_B = \frac{1}{3p_x}(10 + 0,75\pi_F + 0,25\pi_G)$$

$$y_B = \frac{2}{3p_y}(10 + 0,75\pi_F + 0,25\pi_G)$$

Firma F:

$$\max_{l_F} p_x\sqrt{l_F} - l_F$$

$$\text{C.P.O.: } \frac{p_x}{2\sqrt{l_F}} - 1 = 0 \rightarrow \boxed{l_F^* = \frac{p_x^2}{4}}$$

Firma G:

$$\max_{l_G} \; p_y 2\sqrt{l_G} - l_G$$

$$\text{C.P.O.: } \frac{p_y}{\sqrt{l_G}} - 1 = 0 \rightarrow \boxed{l_G^* = p_x^2}$$

$$\boxed{x^s = \frac{p_x}{2}} \rightarrow \pi_F^* = \frac{2p_x^2}{2} - \frac{p_x^2}{4} = \frac{p_x^2}{4}$$

$$\boxed{y^s = 2p_y} \rightarrow \pi_G^* = 2p_y^2 - p_y^2 = p_y^2$$

Market-clearing:

(i) $l_F + l_G = 20$

$$\frac{p_x^2}{4} + p_y^2 = 20 \rightarrow \boxed{p_y^2 = 20 - \frac{p_x^2}{4}}$$

(ii) $x_A + x_B = x$

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= \frac{2}{3p_x}(10 + 0,25\pi_F + 0,75\pi_G) + \frac{1}{3p_x}(10 + 0,75\pi_F + 0,25\pi_G) \\ &= \frac{10}{p_x} + \frac{5p_x}{18} + \frac{7p_y^2}{12p_x} \end{aligned}$$

$$\frac{p_x}{2} = \frac{10}{p_x} + \frac{5p_x}{18} + \frac{7p_y^2}{12p_x}$$

$$\boxed{10 + \frac{7}{12}p_y^2 = \frac{37}{48}p_x^2}$$

De (i) e (ii),

$$\boxed{(p_x^*, p_y^*) = \left(\sqrt{\frac{260}{11}}, \sqrt{\frac{155}{11}}\right)}$$

Logo,

$$\boxed{l_G^* = \pi_G^* = \frac{155}{11}}$$

$$\boxed{l_F^* = \pi_F^* = \frac{65}{11}}$$

Questão 12

a)

Trabalhadores:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} & x_t - l^2 \\ \text{s.a.} & px_t = l \end{cases}$$

O que equivale a

$$\max_{x_t} x_t - (px_t)^2$$

$$\text{C.P.O.: } 1 - 2p^2 x_t = 0 \rightarrow \boxed{(x_t^*, l^*) = \left(\frac{1}{p^2}, \frac{1}{2p}\right)}$$

Empresário: $\boxed{x_e^* = \pi}$

Firma: $\max_L pAL^{\frac{1}{2}} - L$

$$\text{C.P.O.: } pA\frac{1}{2\sqrt{L}} - 1 = 0 \rightarrow \boxed{L^* = \left(\frac{pA}{2}\right)^2}$$

$$\pi = pA\frac{pA}{2} - \left(\frac{pA}{2}\right)^2 = \frac{(pA)^2}{4}$$

Equilíbrio:

$$L^* = nl^*\text{: } \frac{p^2 A^2}{4} = \frac{n}{2p} \rightarrow \boxed{p = \left(\frac{2n}{A^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\boxed{l^* = \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{A^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\pi = \frac{1}{4}(2n)^{\frac{1}{3}} A^{\frac{4}{3}} = x_e = u_e}$$

$$x_t^* = \frac{1}{2}\left(\frac{A^2}{2n}\right)^{\frac{2}{3}}$$

b)

$u_e = \frac{1}{4}(2n)^{\frac{1}{3}} A^{\frac{4}{3}}$: se n aumenta, o preço relativo do bem e a quantidade de consumidores também aumentam, de forma que a queda na demanda individual é compensanda pelo aumento no tatal de consumidores na economia, o que aumenta o lucro e, logo, o bem-estar do empresário.

$u_t = \frac{1}{4}\left(\frac{A^2}{2n}\right)^{\frac{1}{3}}$: se n aumenta, aumenta o preço relativo do bem, logo diminui a utilidade do trabalhador.

c)

Um aumento na produtividade diminui o preço relativo do bem, aumentando o consumo e a utilidade do trabalhador. Por outro lado, a queda no preço do bem é compensada pelo aumento na demanda, de forma que os lucros - e, logo, a utilidade do empresário - aumentam.