Notas de Aula - Micro 2

Prof Gabriel Madeira

FEA-USP

Segundo Semestre de 2017

Equilíbrio Geral e Bem-Estar - Introdução

- Equilíbrio parcial trata de mercados específicos.
- Na prática, mercados são interdependentes.
- Bens podem ser complementares ou substitutos ($x_i = x_i(p_1, ..., p_N, m)$).
- Alguns bens servem tanto para consumo quanto para a produção.
- Choques em um mercado têm efeito renda que afeta outros mercados.

Equilíbrio Geral e Bem-Estar - Introdução

- Equilíbrio geral trata simultaneamente do conjunto de bens em uma economia.
- Isso tem implições positivas e normativas: interdependências entre mercados tem efeitos sobre variáveis objetivas mensuráveis mas também sobre bem-estar e escolhas sociais ótimas.

Equilíbrio Geral e Bem-Estar - Introdução: Alocações Eficientes

Primeiro Passo para Tratar de Bem-Estar e Eficiência: Definir o ambiente econômico. os ingredientes são:

1. Preferências
2. Tecnologia.
3. Disponibilidade de recursos.

Análise de bem-estar não necessariamente diz respeito a economias de mercado.

Equilíbrio Geral e Bem-Estar - Introdução:Alocações Eficientes

Definição - Alocações: quantidades consumidas de cada bem por cada indivíduo, montantes produzidos de cada bem, e montantes de insumos usados na produção de cada bem.

Definição - Alocações são eficientes no sentido de Pareto se é impossível melhorar a situação de um agente sem piorar a situação de algum outro agente.

Equilíbrio Geral e Bem-Estar - Introdução: Equilíbrio Competitivo

Refere-se a uma economia de mercado. Equilíbrio competitivo é composto por preços (de bens e insumos) e alocações. Num equilíbrio competitivo, firmas e indivíduos são otimizadoras dados os preços.

- Sob algumas hipóteses, equilíbrio competitivo gera alocações eficientes (1º teorema do bem-estar) e alocações eficientes podem ser derivadas a partir de um equilíbrio competitivo (2º teorema do bem-estar).

Economia de Trocas

Economia de trocas oferece uma caracterização mais simples do ambiente econômico:

- Não há produção, apenas consumo de recursos disponíveis (pre-existentes) na forma de dotações. Não há caracterização de tecnologias produtivas.
- A princípio dotações podem estar associadas a indivíduos.
- Além de dotações, economia é caracterizada por preferências.

Economia de Trocas

Economia com dois consumidores, A e B e dois bens 1e 2.
Caracterização da economia (ou do ambiente):

- Dotações de fatores: $\omega_A^1, \omega_A^2, \omega_B^1$ e ω_B^2, sendo que ω_i^j é a dotação do bem j pelo indivíduo i.
- Preferências: $u_A(x_A^1, x_A^2)$ e $u_B(x_B^1, x_B^2)$, sendo que x_i^j é o consumo do bem j pelo indivíduo i.

O vetor $\mathbf{x} \equiv (x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2)$ é usualmente chamado de alocação de consumo. Requer-se que as dotações sejam factíveis, ou seja, que o total consumido de cada bem não supere a disponibilidade dos bens na forma de dotação.

Alocações factíveis:

- Alocações são factíveis se satisfazem $x_A^1 + x_B^1 \leq \omega_A^1 + \omega_B^1 \equiv \omega^1$ e $x_A^2 + x_B^2 \leq \omega_A^2 + \omega_B^2 \equiv \omega^2$. Os elementos ω^1 e ω^2 são chamados de dotações agregadas dos bens 1 e 2.
- Normalmente (na presença de monotonicidade forte), precisamos considerar apenas as alocações do tipo $x_A^1 + x_B^1 = \omega_A^1 + \omega_B^1 \equiv \omega^1$ e $x_A^2 + x_B^2 = \omega_A^2 + \omega_B^2 \equiv \omega^2$. É comum referir se a estas alocações como as alocações factíveis.
- Estas alocações podem ser expressas como pontos em uma caixa de dimensões dadas pelas dotações agregadas, a caixa de Edgeworth.

Economia de Trocas

A caixa de Edgeworth:

- Eixo horizontal representa a dotação do bem 1, ω^1.
- Eixo vertical representa a dotação do bem 2, ω^2.
- Um ponto na caixa representa uma alocação factível. Vértice sudoeste é orígem de gráfico representando o consumo do indivíduo A. Vértice nordeste é orígem de gráfico representando o consumo do indivíduo 2.
- Curvas de indiferença são representadas nestes diagramas de preferências associados a cada um dos agentes.

Economia de Trocas

Resultados fácilmente observados na caixa de edgeworth:

- Alocações eficientes no interior da caixa devem ser tais que as curvas de indiferença dos 2 agentes se tangenciam.
- Há infinitas alocações eficientes na caixa de Edgeworth. O conjunto das alocações eficientes no sentido de Pareto é chamado de "curva de contrato".
- Conjunto de pontos eficientes não equivale a conjunto de pontos justos socialmente.

Economia de Trocas

Caracterização formal das alocações eficientes. Toda alocação eficiente resolve um problema do tipo:

$$\max_{\mathbf{x}} u_B(x_B^1, x_B^2)$$

sujeito a

$$u_A(x_A^1, x_A^2) \geq \bar{u},$$

$$x_A^1 \geq 0, x_A^2 \geq 0, x_B^1 \geq 0, x_B^2 \geq 0.$$

$$x_A^1 + x_B^1 \leq \omega^1$$

$$x_A^2 + x_B^2 \leq \omega^2$$

Este problema pode ser caracterizado pelo lagrangeano:

$$\mathscr{L} = u_B(x_B^1, x_B^2) + \lambda(u_A(x_A^1, x_A^2) - \bar{u}) + \lambda_A^1 x_A^1 + \lambda_A^2 x_A^2 + \lambda_B^1 x_B^1 + \lambda_B^2 x_B^2 +$$

$$+\mu^1\left(\omega^1 - x_A^1 - x_B^1\right) + \mu^2\left(\omega^2 - x_A^2 - x_B^2\right).$$

Em uma solução interior temos: $\lambda_A^1 = \lambda_A^2 = \lambda_B^1 = \lambda_B^2 = 0$.

Economia de Trocas

Com solução interior temos as seguintes condições de primeira ordem:

- x_B^1: $u_{B1} = \mu^1$.
- x_A^1: $\lambda u_{A1} = \mu^1$.
- x_B^2: $u_{B2} = \mu^2$.
- x_A^2: $\lambda u_{A2} = \mu^2$.

em que $u_{ji} \equiv \frac{\partial u_j(x_j^1, x_j^2)}{\partial x_j^i}$.

- Estas condições de primeira ordem geram $\frac{u_{A1}}{u_{A2}} = \frac{u_{B1}}{u_{B2}}$, ou seja, curvas de indiferença devem ser tangentes.

Economia de Trocas

Outra especificação, que normalmente (sob condições a serem discutidas mais adiante) é equivalente é:

$$\max_{\mathbf{x}} \lambda_A u_A(x_A^1, x_A^2) + \lambda_B u_B(x_B^1, x_B^2)$$

sujeito a

$$u_A(x_A^1, x_A^2) \geq \bar{u},$$

$$x_A^1 \geq 0, x_A^2 \geq 0, x_B^1 \geq 0, x_B^2 \geq 0.$$

$$x_A^1 + x_B^1 \leq \omega^1; \; x_A^2 + x_B^2 \leq \omega^2$$

- Normalmente supomos que $\lambda_A + \lambda_B = 1$. Os parâmetros λ_Ae λ_B são chamados de "pesos de Pareto".

Digressão Técnica - Otimização restrita

Considere o problema, em que em cada uma das restrições consegue-se isolar uma variável.

$$\max_{x_1,\ldots,x_N} f(x_1,\ldots,x_N)$$

s.a.

$$x_1 = g_1(x_2,\ldots,x_N)$$

$$x_2 = g_2(x_1,x_3,\ldots,x_N)$$

$$\vdots$$

$$x_K = g_K(x_1,\ldots,x_{K-1},x_{K+1}\ldots,x_N)$$

Digressão Técnica - Otimização restrita

O problema pode ser resolvido de duas formas:

- Utiliza-se o lagrangeano

$$\mathscr{L} = f(x_1, ..., x_N) + \lambda_1(x_1 - g_1(x_2, ..., x_N)) + ...$$

$$... + \lambda_K(x_K - g_K(x_1, ..., x_{K-1}, x_{K+1} ..., x_N)).$$

- Procede-se fazendo substituições, eliminando restrições. Por exemplo pode-se substituir x_1 por $g_1(x_1, ..., x_N)$ em todas as outras restrições em que x_1 aparece e também na função objetivo. Note-se que isso gera uma reformulação do problema, e no novo problema x_1 não mais aparece.

Digressão Técnica - Otimização restrita

Assim, por exemplo, o problema pode ser reformulado como:

$$\max_{x_2,\ldots,x_N} f(g_1(x_2,\ldots,x_N),x_2,\ldots,x_N)$$

s.a.

$$x_2 = g_2(g_1(x_2,\ldots,x_N)_1,x_3,\ldots,x_N)$$

$$\vdots$$

$$x_K = g_K(g_1(x_2,\ldots,x_N),\ldots,x_{K-1},x_{K+1}\ldots,x_N)$$

Note-se que uma restrição foi eliminada. Pode-se proceder de maneira análoga para se eliminar outra restrição (por exemplo $x_2 = g_2(g_1(x_2,\ldots,x_N)_1,x_3,\ldots,x_N)$). Neste caso a variável $x_2$também será excluída do problema.

Digressão Técnica - Otimização restrita

Exemplo - considere o problema:

$$\max_{\mathbf{x}} \left[\alpha \ln x_A^1 + (1-\alpha) \ln x_A^2\right]$$

sujeito a

$$\beta \ln x_B^1 + (1-\beta) \ln x_B^2 = \bar{u},$$

$$x_A^1 + x_B^1 = \omega^1$$

$$x_A^2 + x_B^2 = \omega^2$$

O problema pode ser sucessivamente resolvido como:

Digressão Técnica - Otimização restrita

Passo 1:

$$\max_{(\mathbf{x}_A^1, \mathbf{x}_A^2, \mathbf{x}_B^2)} \left[\alpha \ln x_A^1 + (1-\alpha) \ln x_A^2\right]$$

sujeito a

$$\beta \ln\left(\omega^1 - x_A^1\right) + (1-\beta) \ln x_B^2 = \bar{u},$$

$$x_A^2 + x_B^2 = \omega^2$$

Digressão Técnica - Otimização restrita

Passo 2:

$$\max_{(\mathbf{x}_A^1, \mathbf{x}_A^2, \mathbf{x}_B^2)} \left[\alpha \ln x_A^1 + (1-\alpha) \ln x_A^2\right]$$

sujeito a

$$\beta \ln\left(\omega^1 - x_A^1\right) + (1-\beta) \ln\left(\omega^2 - x_A^2\right) = \bar{u}$$

Digressão Técnica - Otimização restrita

Pode-se então usar o lagrangeano:

$$\mathscr{L} = \alpha \ln x_A^1 + (1-\alpha) \ln x_A^2 - \lambda \left(\bar{u} - \beta \ln \left(\omega^1 - x_A^1 \right) - (1-\beta) \ln \left(\omega^2 - x_A^2 \right) \right).$$

As condições de primeira ordem são:

- $x_A^1 : \frac{\alpha}{x_A^1} = \lambda \frac{\beta}{\omega^1 - x_A^1}$
- $x_A^2 : \frac{1-\alpha}{x_A^2} = \lambda \frac{1-\beta}{\omega^2 - x_A^2}$.

Digressão Técnica - Otimização restrita

Essas condições geram:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_A^2}{x_A^1} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\omega^2 - x_A^2}{\omega^1 - x_A^1}.$$

Definindo $a \equiv \frac{\alpha}{1-\alpha}$ e $b \equiv \frac{\beta}{1-\beta}$ temos
$ax_A^2(\omega^1 - x_A^1) = bx_A^1(\omega^2 - x_A^2) \Longrightarrow ax_A^2\omega^1 - ax_A^2x_A^1 = bx_A^1\omega^2 - bx_A^1x_A^2$
$\Longrightarrow ax_A^2\omega^1 + (b-a)x_A^2x_A^1 = bx_A^1\omega^2 \Longrightarrow x_A^2 = \frac{bx_A^1\omega^2}{a\omega^1 + (b-a)x_A^1}$.
Esta última equação descreve a curva de contratos.

Digressão Técnica - Otimização restrita

Por outro lado, usando as restrições $x_A^1 + x_B^1 = \omega^1$ e $x_A^2 + x_B^2 = \omega^2$, as C.P.O.s ficam:

- $\frac{\alpha}{x_A^1} = \lambda \frac{\beta}{x_B^1}$
- $\frac{1-\alpha}{x_A^2} = \lambda \frac{1-\beta}{x_B^2}$

$\Longrightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x_A^2}{x_A^1} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{x_B^2}{x_B^1}$. Ou seja, taxas marginais de substituição são iguais entre a e b.

Economia de Trocas

Caracterização geral de alocações eficientes em uma economia de trocas, com I agentes, N bens.

$$\max u^1(x_1^1, ..., x_1^N)$$

s.a.

$$u^2(x_1^2, ..., x_N^2) \geq \bar{u}^2, ..., u^I(x_1^I, ..., x_N^I) \geq \bar{u}^I$$

$$\omega_n \geq \sum_{i=1}^{I} x_n^i, \text{ para qualquer } n = 1, ..., N$$

$$x_n^i \geq 0 \text{ para qualquer } n = 1, ..., N i = 1, ..., I.$$

Economia de Trocas

É fácil verificar que, em soluções interiores (com todos os consumos positivos), as taxas marginais de substituição entre dois bens quaisquer devem ser iguais para todos os indivíduos. Formalmente, dados os bens i e j e os indivíduos k e h vale:

$$\frac{u_i^k}{u_j^k} = \frac{u_i^h}{u_j^h}.$$

- Prova: exercício.

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

Soluções ineficientes geram possibilidade ganhos de troca.
Suponha que trocas sejam possíveis, dadas a partir de um preço p_1 para o bem 1 e $p_2$para o bem 2. Então cada indivíduo terá restrição orçamentária dada or uma reta que passa sobre a dotação inicial na caixa de Edgeworth, com inclinação $-\frac{p_1}{p_2}$.
Equilíbrio competitivo: vetor de preços e alocação de consumo tais que:

- Indivíduos maximizam utilidade dados os preços e a restrição orçamentária resultante.
- Alocação é factível (cabe na restrição de recursos).

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

Definição formal - Equilíbrio competitivo: em equilíbrio competitivo é um vetor de preços $(p_1, ..., p_N)$ e um vetor de alocações de consumo $(x_1^1, ..., x_N^1, ..., x_1^I, ..., x_N^I)$ tais que:

- Consumidores maximizam utilidade dados os preços. Ou seja, para todo $i \in (1, ..., I)$, o vetor $(x_1^i, ..., x_N^i)$ resolve o problema:

$$\max_{x_1^I, ..., x_N^I} u^i(x_1^i, ..., x_N^i)$$

s.a.

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^i p_n \leq \sum_{n=1}^{N} \omega_n^i p_n.$$

- Alocação é factível, ou seja, para todo $n \in (1, ..., N)$

$$\sum_{i=1}^{I} x_n^i = \sum_{i=1}^{I} \omega_n^i.$$

Definições:

- a demanda excedente do bem n pelo agente i é:

$$e_n^i(p_1, ..., p_N) = x_n^i(p_1, ..., p_N) - \omega_n^i.$$

- a demanda excedente agregada do bem n é:

$$z_n(p_1, ..., p_N) = \sum_{i=1}^{I} e_n^i(p_1, ..., p_N) = \sum_{i=1}^{I} \left(x_n^i(p_1, ..., p_N) - \omega_n^i\right)$$

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

Como resolver o equilíbrio competitivo:

- Primeiro passo: derivar as demandas $x_n^i(p_1, ..., p_N)$ e, a partir delas as funções excesso de demanda, $z_n(p_1, ..., p_N)$.
- Igualar demandas excedentes agregadas a zero, ou seja, $z_n(p_1, ..., p_N) = 0$.
- Temos então N equações (as demandas excedentes agregadas) e N incógnitas, os preços.
- Questão: é possível desta maneira obter todos os preços? Resposta: não, pois uma das equações do tipo $z_n(p_1, ..., p_N) = 0$ é redundante, ou seja, é implicada pelas demais. Isto é uma consequência da lei de walras.

Lei de Walras: dado um vetor de preços qualquer, o valor de todas as demandas excedentes agragadas é zero, ou seja:

$$p_1 z_1(p_1, ..., p_N) + ... + p_N z_N(p_1, ..., p_N) = 0.$$

- Prova: com monotonicidade de preferências (ou não saciedade local), vale

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^i p_n = \sum_{n=1}^{N} \omega_n^i p_n.$$

Somando para todos os indivíduos, vale

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} x_n^i p_n = \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} \omega_n^i p_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{I} x_n^i p_n - \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{I} \omega_n^i p_n = 0$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{N} p_n \left(\sum_{i=1}^{I} x_n^i - \sum_{i=1}^{I} \omega_n^i \right) = 0.$$

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

- Dada a lei de Walras, o fato de que para $(p_1, ..., p_N)$ vale $z_1(p_1, ..., p_N) = z_2(p_1, ..., p_N) = ... = z_{N-1}(p_1, ..., p_N) = 0$ implica em $z_N(p_1, ..., p_N) = 0$.
- Isso significa que uma equação é redundante, e não é possível determinar todos os preços.
- O que importa são preços relativos. Isso pode ser visto na caixa de edgeworth. Intuitivamente, equilíbrio pode ser definido a partir de preços relativos, independentemente de unidades monetárias.
- Procedimento usual para obtenção do equilíbrio: normaliza-se o preço de um dos bens para 1. Este bem é chamado de bem numerário.

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

Procedimento para obtenção de equilíbrio competitivo:

1. Obtém-se as demandas $x_n^i(p_1, ..., p_N)$ e, a partir delas as funções excesso de demanda, $z_n(p_1, ..., p_N)$.
2. Elege-se um bem numerário, por exemplo, o bem 1, e adota-se $p_1 = 1$.
3. Usa-se $N-1$ equações de demanda excedente $z_n(p_1, ..., p_N) = 0$ (chamadas condições de Market Clearing) para obter os preços $(p_1, ..., p_N)$.
4. Dados $(p_1, ..., p_N)$, alocações de equilíbrio podem ser obtidas a partir das demandas.

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

- Questão: este equilíbrio existe?
- Resposta (Arrow e Debreu): sim, existe, se as demandas forem contínuas (ou até am casos mais gerais, se elas forem correspondências superiormente semi-contínuas).
- Prova: utiliza-se o teorema do ponto fixo de Kakutani.

Primeiro teorema fundamental do bem-estar:

- Toda alocação competitiva é eficiente.
- Prova: suponha que $(p_1, ..., p_N)$ e $(x^1, ..., x^i)$compõem um equilíbrio competitivo. Suponha que haja uma alocação $(\widetilde{x}^1, ..., \tilde{x}^I)$ preferida a $(x^1, ..., x^i)$ para um indivído (por exemplo o indivíduo 1) e ao menos tão boa quanto $(x^1, ..., x^i)$ para os demais (sendo que $\tilde{x}^i \equiv (\tilde{x}_1^i, ..., \tilde{x}_N^i))$. Então, havendo monotonicidade, necessariamente deve ser o caso em que:

$$\sum_{n=1}^{N} \tilde{x}_n^1 p_n > \sum_{n=1}^{N} \omega_n^1 p_n \text{ e } \sum_{n=1}^{N} \tilde{x}_n^i p_n \geq \sum_{n=1}^{N} \omega_n^i p_n$$

para $i = 1, ..., I$. Somando para todos os indivíduos, temos que

$$\sum_{n=1}^{N} p_n \left(\tilde{x}_n^1 + ... + \tilde{x}_n^I \right) > \sum_{n=1}^{N} p_n \left(\omega_n^1 + ... + \omega_n^I \right),$$

o que implica que $(\tilde{x}_1^i, ..., \tilde{x}_N^i)$não é factível. Assim, não há "ganhos de Pareto" sobre $(x^1, ..., x^i)$ que sejam factíveis.

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

Definição - redistribuição de dotações: $(\tilde{\omega}_1^1, ..., \tilde{\omega}_N^1, ..., \tilde{\omega}_1^I, ..., \tilde{\omega}_N^I)$ tal que, para todo $n \in (1, ..., N)$, vale $\sum_{i=1}^{I} \tilde{\omega}_n^i = \sum_{i=1}^{I} \omega_n^i$.
Segundo teorema fundamental do bem-estar:

- Considere uma alocação eficiente qualquer $(x_1^1, ..., x_N^1, ..., x_1^I, ..., x_N^I)$. Existe uma redistribuição $(\tilde{\omega}_1^1, ..., \tilde{\omega}_N^1, ..., \tilde{\omega}_1^I, ..., \tilde{\omega}_N^I)$tal que $(x_1^1, ..., x_N^1, ..., x_1^I, ..., x_N^I)$ é obtida em um equilíbrio competitivo.
- É necessário mais hipóteses para o segundo teorema. Alem de monotonicidade (usada no primeiro teorema) é necessário que preferências sejam convexas (curvas de indiferença convexas).

Mostramos que, em soluções interiores, eficiência requer que $\frac{u_i^k}{u_j^k} = \frac{u_i^h}{u_j^h}$ para quaisquer pares de indivíduos k e h e de bens i e j.
Esta condição também é satisfeita em um equilíbrio competitivo.
Com efeito, o lagrangeano do problema de otimização do indivíduo k é:

$$\mathscr{L} = u^k(x_1^k, ..., x_N^k) + \lambda^k \left(\sum_{n=1}^{N} p_n \omega_n^k - \sum_{n=1}^{N} p_n x_n^k \right).$$

A condição de primeira ordem do indivído k para o bem i é $u_i^k = \lambda^k p_i$. Procedendo similarmente para o bem j e o indivíduo h temos:

$$\frac{u_i^k}{u_j^k} = \frac{\lambda^k p_i}{\lambda^k p_J} = \frac{p_i}{p_J} = \frac{\lambda^h p_i}{\lambda^h p_J} = \frac{u_i^h}{u_j^h}.$$

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

Exemplo em que solução não necessariamente é interior: $u^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A - \frac{1}{x_2^A}$ e $u^B(x_1^B, x_2^B) = x_1^B - \frac{1}{x_2^B}$, supondo $\omega_1 = \omega_2 = 2$.

- Em soluções no interior da Caixa de Edgeworth, deveríamos ter: $\frac{u_1^A}{u_2^A} = \left(x_2^A\right)^2 = \left(x_2^B\right)^2 = \frac{u_1^B}{u_2^B}$. Isso implicaria (dada a restrição de recursos) em $x_2^A = x_2^B = 1$.
- Em um equilíbrio competitivo consistente com esta condição, teríamos $\frac{p_1}{p_2} = 1$. No entanto, se a dotação de um indivíduo for muito baixa, ele não será capaz de adquiri uma unidade do bem 2. Com muita desigualdade, a solução será no canto da caixa. De fato, há alocações eficientes no interior e nos cantos da caixa.
- Estas alocações também correspondem a um equilíbrio competitivo, em que apenas um indivíduo consome uma quantidade positiva dos dois bens. O outro está sujeito a uma condição de canto. Preço é determinado para que o indivíduo com solução interior otimize

No exemplo anterior, considere uma alocação (factível) em que $x_2^A = \frac{1}{2}$, $x_1^A = 0$, $x_2^B = \frac{3}{2}$ e $x_1^B = 2$.

- Pelo segundo teorema do bem estar, existe uma distribuição de dotação e preços que geram esta alocação em equilíbrio.
- Podemos normalizar $p_2 = 1$. Como o indivíduo 2 maximiza em uma solução interior, temos: $p_1 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{u_1^B}{u_2^B} = \frac{9}{4}$.
- Neste caso, a renda nominal do indivíduo A será $m^A = p_2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Já a renda nominal do indivíduo B será $m^B = \frac{3}{2} + 2\frac{9}{4} = 6$. Na prática teremos a renda nominal total será $m = 6.5$ e $\frac{m^B}{m^A} = 12$.

Um economista inconformado com a desigualdade propõe que a renda seja redistribuída de maneira a tornar-se igualitária (ou, analogamente, as dotações são distribuídas de maneira igualitária).

- Um economista ingênuo poderia imaginar que o novo nível de bem-estar de A seria aquele em que simplesmente a renda é aumentada de 0.5 para 3.25, ou seja, seria a utilidade indireta $v(p_1, p_2, m) = v\left(\frac{9}{4}, 1, 3.25\right)$.
- Neste caso teríamos $\frac{u_1^A}{u_2^A} = \left(x_2^A\right)^2 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{9}{4} \Longrightarrow x_2^A = \frac{3}{2}$. Por outro lado, a restrição orçamentária gera $\frac{9}{4}x_A^1 + \frac{3}{2} = 3.25 = \frac{13}{4}$ $\Longrightarrow x_A^1 = \frac{7}{9}$. Assim, teríamos $v\left(\frac{9}{4}, 1, 3.25\right) = \frac{7}{9} - \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{3}$.

Economia de Trocas - Equilíbrio Competitivo

- Sabemos que com as dotações totalmente redistribuídas teríamos $x_A^1 = x_A^2 = 1 \Longrightarrow u^A = 0$.
- Aos preços de mercado, que nível de renda geraria $u^A = 0$(ou seja, qual o valor de $e(p_1, p_2, u) = e(\frac{9}{5}, 1, 1)$)? Resposta: x_1^A deveria ser menor em cerca de $\frac{1}{3}$, o que requer uma queda de renda de $\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0.75$.
- Ou seja, bem estar equivale a um ganho de renda de 0.5 para 2.5.
- Sem considerar efeitos de equilíbrio geral, imaginamos um ganho de renda para 3.25, mas o ganho de bem-estar a A equivale a um aumento de renda para 2.5. Há uma superestimativa de 30% caso não se considere efeitos de equilíbrio geral.

Economia de Trocas - Considerações Finais

Problema de eficiência de pareto pode ser formulado de duas maneiras:

- Como

$$\max_{x} u^A(x^A)$$

$$s.a.\ u^B(x^B) \geq \bar{u}^B$$

$$x^A + x^B = \omega$$

$$x^A \geq 0 \ x^B \geq 0 \ .$$

Economia de Trocas - Considerações Finais

Alternativamente, pode ser formulado como:

$$\max_{x} \lambda^A u^A(x^A) + \lambda^B u^B(x^B)$$

$$x^A + x^B = \omega$$

$$x^A \geq 0 \; x^B \geq 0 \; .$$

Nesta última formulação, λ^Ae λ^Bsão chamados de pesos de pareto.

- No primeiro caso, o lagrangeano fica:

$$\mathscr{L} = u^A(x^A) + \left(\lambda(u^B(x^B) - \bar{u}^B\right) + \mu_1\left(\omega_1 - x_1^A - x_1^B\right)$$

$$+\mu_2\left(\omega_2 - x_2^A - x_2^B\right) + \gamma_1^A x_2^A + \gamma_2^A x_1^A + \gamma_1^B x_1^B + \gamma_1^B x_2^B.$$

- No segundo caso, o lagrangeano fica:

$$\mathscr{L} = \lambda^A u^A(x^A) + \lambda^B u^B(x^B) + \mu_1\left(\omega_1 - x_1^A - x_1^B\right)$$

$$+\mu_2\left(\omega_2 - x_2^A - x_2^B\right) + \gamma_1^A x_2^A + \gamma_2^A x_1^A + \gamma_1^B x_1^B + \gamma_1^B x_2^B.$$

Economia de Trocas - Considerações Finais

Note que, com solução interior, no primeiro caso teremos:

$$\frac{u_1^A}{u_1^B} = \frac{u_2^A}{u_2^B} = \lambda.$$

Neste caso, cada valor de $\bar{u}^B$ gerará um valor diferente de λ (quanto maior $\bar{u}^B$ maior será λ).
Note que, com solução interior, no segundo caso teremos:

$$\frac{u_1^A}{u_1^B} = \frac{u_1^A}{u_1^B} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Pode-se passar de uma formulação a outra relacionando-se λ e $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.
Ambas formulações são cabíveis e relevantes.

Economia de Trocas - Considerações Finais

- Hipótese de tomador de preço em geral está associada à idéia de que há muitos indivíduos.
- No entanto, estamos muitas vezes trabalhando com 2 indivíduos.
- Pode-se imaginar que há 2 típos de indivíduo, com um grande número de indivíduos em cada tipo.

Economia de Trocas - Considerações Finais

Instrumental pode ser extendido para 2 casos importantes:

1. Escolha sob incerteza.
2. Escolha ao longo do tempo.

Economia com Produção

Caracterização completa de uma economia:

- Dotações de bens e também de fatores de produção.
- Preferências de indivíduos.
- Tecnologias produtivas, que transformam insumos em bens de consumo ou outros insumos (bens intermediários).

Economia com Produção

Alocações eficientes (ou alocações ótimas no sentido de Pareto): dado o volume de recursos disponíveis na forma de dotações e as tecnologias disponíveis, é impossível aumentar o bem-estar (ou a utilidade) de um indivíduo sem diminuir o bem-estar de algum outro indivíduo.

Condições necessárias para eficiência no sentido de pareto:

1. Deve haver eficiência na produção: é impossível aumentar a quantidade produzida de um bem sem reduzir a quantidade produzida de outros bens.
2. Deve haver eficiência na alocação dos bens produzidos: dada a quantidade produzida de bens é impossível aumentar o bem-estar de um indivíduo sem diminuir o de outro indivíduo.
3. Não é possível gerar ganhos de bem estar ao se substituir a produção de um bem pela produção de outros bens.

Economia com Produção - Eficiência Proidutiva

Eficiência produtiva: considere o caso de 2 bens e 2 fatores de produção, por exemplo capital e trabalho.

- Pode-se montar uma caixa de Edgeworth, com tamanho dado pelas dotações de capital e trabalho.
- O extremo sudoeste representa o uso total dos fatores no bem 1, e o extremo nordeste o uso total no bem 2.
- Nesta caixa de edgeworth pode-se representar isoquantas das produções de ambos os bens.
- Com eficiência produtiva, sempre que houver uso positivo de ambos fatores na produção de cada bem, deve haver tangência entre as isoquantas. Taxas marginais de substituição técnica devem ser iguais.
- Curva de eficiência produtiva (análoga a curva de contrato) demarca estes pontos de tangência entre as isoquantas.

Economia com Produção - Eficiência Produtiva

A cada ponto nas curva de eficiência produtiva corresponde uma combinação de quantidades produzidas de cada um dos bens.

- Estas combinações de quantidades eficientes produzidas compõem, no plano das quantidades produzidas, a chamada "Fronteira de Possibilidades de Produção".
- Normalmente supõe-se que a Fronteira de Possibilidade de Produções é decrescente e côncava. A concavidade segue de:
  1. Retornos decrescentes.
  2. Insumos especializados.
  3. Intensidades fatoriais distintas.
- Inclinação da curva de indiferença é chamada de taxa marginal de transformação.

Economia com Produção - Eficiência Produtiva

Mais formalmente, considere 2 bens, 1 e 2, e 2 fatores, capital e trabalho (k e l). Considere funções de produção $y_1 = f_1(k_1, l_1)$ e $y_2 = f_2(k_2, l_2)$. Considere dotações totais de capital e trabalho $\bar{k}$ e $\bar{l}$. Cada alocação produtiva resolve um problema do tipo:

$$\max_{k_1, k_2, l_1, l_2} f_1(k_1, l_1)$$

sujeito a:

$$f_2(k_2, l_2) \geq y_2$$

$$k_1 + k_2 = \bar{k}$$

$$l_1 + l_2 = \bar{l}$$

O Lagrangeano do problema é:

$$\mathscr{L} = f_1(k_1, l_1) + \lambda\left(f_2(k_2, l_2) - y_2\right) +$$

$$+\mu_k\left(\bar{k} - k_1 - k_2\right) + \mu_l\left(\bar{l} - l_1 - l_2\right)$$

As condições de primeira ordem geram:

$$f_{1k} = \mu_k,\ \lambda f_{2k} = \mu_k,\ f_{1l} = \mu_l,\ \lambda f_{2l} = \mu_l$$

Estas condições de primeira ordem geram:

- $\frac{f_{1k}}{f_{1l}} = \frac{f_{2k}}{f_{2l}} \Longrightarrow$taxas marginais de substituição são iguais nos dois setores (o que produz o bem 1 e o que produz o bem 2).
- $\lambda = \frac{f_{1k}}{f_{2k}} = \frac{f_{1l}}{f_{2l}}$.

Por outro lado, a inclinação da Fronteira de Possibilidades de Utilidade é dada pelo quanto a função objetivo (ou seja, a produção do bem 1) responde a mudanças na quantidade produzida do bem 2 (ou seja, y_2). Pelo teorema do envelope temos:

- TMT$=-\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_2} = \lambda = \frac{f_{1k}}{f_{2k}} = \frac{f_{1l}}{f_{2l}}$.

Economia com Produção - Eficiência nas Alocações de Consumo

Dadas as quantidades produzidas, não é possível melhorar o bem-estar de um indivíduo sem piorar o do outro. Uma vez que toma-se a produção como dada, temos um problema semelhante ao de uma economia de trocas.
Em soluções interiores, com dois indivíduos, A e B, isto requer que:

- $\frac{u_1^A(x_1^A,x_2^A)}{u_2^A(x_1^A,x_2^A)} = \frac{u_1^B(x_1^B,x_2^B)}{u_2^B(x_1^B,x_2^B)}$.
- $y_1 = x_1^A + x_1^B$ e $y_2 = x_2^A + x_2^B$.

Alocação eficiente de recursos entre setores: em aloções eficientes, não é possível gerar ganhos de bem-estar a ambos realocando recursos entre setores.
Isso requer que as taxas marginais de substituição sejam iguais à taxa marginal de transformação. Portanto devemos ter:

$$\frac{u_2^A}{u_1^A} = \frac{u_2^B}{u_1^B} = \frac{f_{1k}}{f_{2k}} = \frac{f_{1l}}{f_{2l}}.$$

Economia com Produção - Alocação Eficiente

- As condições acima (eficiência produtiva, eficiêcia nas alocações de consumo e eficiência na alocação entre setores) caracterizam completamente as alocações eficientes.
- Novamente, há infinitas alocações eficientes, dependendo do "peso de Pareto" que se dá a cada indivíduo.
- Esta caracterização, para 2 bens, 2 fatores e 2 indivíduos pode ser caracterizada graficamente, mas estes conceitos podem ser extendidos para N bens, M fatores e I indivíduos.

Economia com Produção - Alocação Eficiente: Caracterização Formal

Problema que define alocações eficientes:

$$\max_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B, y_1, y_2, k_1, k_2, l_1, l_2} u^A(x_1^A, x_2^A),$$

sujeito a:

$$u^B(x_1^B, x_2^B) \geq \bar{u}^B,$$

$$y_1 = x_1^A + x_1^B, \; y_2 = x_2^A + x_2^B,$$

$$y_1 = f_1(k_1, l_1), \; y_2 = f_2(k_2, l_2)$$

$$k_1 + k_2 = \bar{k}, \; l_1 + l_2 = \bar{l}$$

$$x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B, y_1, y_2, k_1, k_2, l_1, l_2 \geq 0.$$

Economia com Produção - Alocação Eficiente: Caracterização Formal

Suponso solução interior (e portanto que a última restrição não é ativa), após substituições sucessivas, chegamos a:

$$\max_{x_1^A, x_2^A, k_1, l_1} u^A(x_1^A, x_2^A),$$

sujeito a:

$$u^B\left(f_1(k_1, l_1) - x_1^A, f_2(\bar{k} - k_1, \bar{l} - l_1) - x_2^A\right) \geq \bar{u}^B.$$

Temos então o seguinte lagrangeano:

$$\mathscr{L} = u^A(x_1^A, x_2^A) + \lambda\left[u^B\left(f_1(k_1, l_1) - x_1^A, f_2(\bar{k} - k_1, \bar{l} - l_1) - x_2^A\right) - \bar{u}^B\right].$$

Economia com Produção - Alocação Eficiente: Caracterização Formal

As condições de primeira ordem ficam:

$$x_1^A: \; u_1^A = \lambda u_1^B; \; x_2^A: \; u_2^A = \lambda u_2^B$$

$$k_1: \; u_1^B f_{1k} = u_2^B f_{2k}; \; l_1: u_1^B f_{1l} = u_2^B f_{2l}.$$

Estas condições implicam em:

- $\frac{u_1^A}{u_1^A} = \frac{u_1^B}{u_1^B}$, ou seja, taxas marginais de substituição iguais entre indivíduos.
- $\frac{f_{1k}}{f_{1l}} = \frac{f_{2k}}{f_{2l}}$, ou seja, taxas marginais de substituição técnica são iguais nos dois setores.
- $\frac{u_1^B}{u_2^B} = \frac{f_{k2}}{f_{k1}} = \frac{f_{l2}}{f_{l1}}$, ou seja, taxa marginal de transformação igual à taxa marginal de substituição.

Economia com Produção - Equilíbrio Competitivo

Equilíbrio competitivo: à caracterização da economia (dotações, tecnologias e preferências) deve-se acescentar dotações individuais de bens e insumos e de participações (ou ações) nas firmas. Assim, a economia é caracterizada por:

- Dotações de fatores, bens e participação nas firmas (normalmente denota-se ψ_n^ia participação do indivíduo i na firma n, sendo que $\sum_{i=1}^{I} \psi_n^i = 1$).
- Preferências dos indivíduos, caracterizadas por suas funções utilidade.
- Tecnologias produtivas das firmas, caracterizadas por funções de produção.

Economia com Produção - Equilíbrio Competitivo

Definição de equilíbrio competitivo - economia com produção. Um equilíbrio competitivo é caracterizado por preços de bens e fatores e alocações de bens e fatores tais que:

- Firmas maximizam lucro dados preços de bens e fatores.
- Consumidores maximizam utilidade dados preços e sua renda, derivada da venda de dotação e participação no lucro das firmas.
- Restrição de recursos são atendidas, tanto para bens de consumo como para insumos ou bens intermediários, caso eles existam.

Economia com Produção - Equilíbrio Competitivo

Equilíbrio competitivo em uma economia com 2 bens (1 e 2), 2 farores (capital, k, e trabalho, l), e dois consumidores (A e B). Equilíbrio competitivo é :

- Preços de insumos e produtos: (p_1, p_2, w, r) sendo p_n o preço do bem , w o preço do trabalho e r o preço do capital.
- Alocações de consumo: $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$.
- Alocações de insumos: (k_1, k_2, l_1, l_2).

Problema de maximização de lucro das firmas (1 e 2):

$$\max_{k_n, l_n} \Pi_n = p_n f_n(k_n, l_n) - rk_n - wl_n.$$

As condições de primeira ordem geram:

$$p_n f_{nk} = r, \; p_n f_{nl} = w.$$

Isso vale para $i = 1, 2$, o que implica que $\frac{f_{1k}}{f_{1l}} = \frac{r}{w} = \frac{f_{2k}}{f_{2l}}$. Ou seja, taxas marginais de substituição técnica são iguais entre setores. Também implica em: $\frac{f_{2k}}{f_{1k}} = \frac{f_{2l}}{f_{1l}} = \frac{p_1}{p_2}$.

Economia com Produção - Equilíbrio Competitivo: Consumidores

Problema de escolha dos consumidores (A e B):

$$\max_{x_1^i, x_2^i} u_1^i(x_1^i, x_2^i)$$

sujeito a:

$$p_1 x_1^i + p_2 x_2^i = w\omega_l^i + r\omega_k^i + \psi_1^i \Pi_1 + \psi_2^i \Pi_2,$$

sendo ω_l^i e ω_k^i as dotações de trabalho e capital do indivíduo i. A condições de primeira ordem geram:

$$u_n^i = \lambda p_n.$$

Isso implica em igualdade das taxas marginais de substituição: $\frac{u_1^A}{u_2^A} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{u_1^B}{u_2^B}$. Pelo problema das firmas, isso também faz com que as taxas marginais de substituição sejam iguais à taxa marginal de transformação, ou seja, $\frac{u_1^A}{u_2^A} = \frac{u_1^B}{u_2^B} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{f_{2k}}{f_{1k}} = \frac{f_{2l}}{f_{1l}}$.

O último requisito para o equilíbrio competitivo é que as restrições de recurso sejam atendidas, ou seja.

- $l_1 + l_2 = \bar{l}$.
- $k_1 + k_2 = \bar{k}$.
- $x_1^A + x_1^B = f_1(k_1, l_1)$.
- $x_2^A + x_2^B = f_2(k_2, l_2)$.

Economia com Produção - Equilíbrio Competitivo: Bem-Estar

- Note-se que as condições para alocações eficientes são atendidas em um equilíbrio competitivo.
- De fato, os dois teoremas fundamentais do bem-estar são atendidos em uma economia com produção.
  1. Primeiro Teorema: todo equilíbrio competitivo é eficiente.
  2. Segundo Teorema: toda alocação eficiente pode ser obtida em um equilíbrio competitivo dada alguma redistribuição de dotações.

Economia com Produção - Computando o Equilíbrio Competitivo

- Lei de Walras também vale.
- Não é possível obter todos os preços. Um deles (que pode ser de fator ou de produto) deve ser normalizado para 1.
- Quando é possível definir demanda dos fatores, procede-se como no caso de trocas. Usa-se as equações determinando que as demandas excedentes agregadas são nulas.
- Com retornos constantes de escala, a demanda de fatores é indeterminadas. Neste caso usa-se as condições de primeira ordem de maximização de lucros das firmas combinadas com uma condição de lucro zero (sem a qual haveria demanda infinita ou zero por fatores) e as restrições de recursos.
- Importante: ao se calcular o equilíbrio NUNCA deve-se substituir preços usando condições de equilíbrio antes de resolver os problemas da firma e do consumidor. Estes, são tomadores de preços.

Economia com Produção - Exemplo I

1 fator l, 2 bens, 1 e 2, e 2 indivíduos A e B.

- Preferências:
  $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \left(x_1^A\right)^{\alpha}\left(x_2^A\right)^{1-\alpha}; u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \left(x_1^A\right)^{\beta}\left(x_2^A\right)^{1-\beta}$.
- Produção: $f_1(l_1) = al_1; f_2(l_2) = bl_2$.
- Dotações: $l_1 + l_2 = \bar{l} = l^A + l^B$;
- Como há retornos constantes de escala, lucro é zero, e não há necessídade de se determinar distribuição de lucro das firmas.

Economia com Produção - Exemplo I

- Max de utilidade: $u_{A1} = \alpha \left(x_1^A\right)^{\alpha-1} \left(x_2^A\right)^{1-\alpha} = \lambda_A p_1; u_{A2} = (1-\alpha) \left(x_1^A\right)^{\alpha} \left(x_2^A\right)^{-\alpha} = \lambda_A p_2$, $u_{B1} = \beta \left(x_1^B\right)^{\beta-1} \left(x_2^B\right)^{1-\beta} = \lambda_B p_1; u_{B2} = (1-\beta) \left(x_1^B\right)^{\beta} \left(x_2^B\right)^{-\beta} = \lambda_B p_2 \Longrightarrow \frac{u_{A1}}{u_{A2}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{u_{B1}}{u_{B2}} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{p_1}{p_2}$.
- Max de lucros: $\Pi_1 = al_1 p_1 - wl_1$, $\Pi_2 = al_2 p_2 - wl_2 \Longrightarrow p_1 = \frac{w}{a}, p_2 = \frac{w}{b}$.
- Normalizando w para 1 temos que: $p_1 = \frac{1}{a}, p_2 = \frac{1}{b}$.

Economia com Produção - Exemplo I

- Max de utilidade gera as demandas:
  $p_1 x_1^A = \alpha w l^A, p_2 x_2^A = (1-\alpha) w l^A$,
  $p_1 x_1^B = \beta w l^B, p_2 x_2^B = (1-\beta) w l^B$.
- Max de lucros: $\Pi_1 = a l_1 p_1 - w l_1$,
  $\Pi_2 = a l_2 p_2 - w l_2 \Longrightarrow p_1 = \frac{w}{a}, p_2 = \frac{w}{b}$.
- Normalizando w para 1 temos que: $p_1 = \frac{1}{a}, p_2 = \frac{1}{b}$.
- Assim temos que: $x_1^A = a\alpha l^A, x_2^A = b(1-\alpha) l^A$,
  $x_1^B = a\beta l^B, x_2^B = b(1-\beta) l^B$.

Economia com Produção - Exemplo II

1 fator, l, um bem de consumo, c, um insumo intermediário, energia, e e um consumidor.

- Preferências: $u(c) = c$. (como só há um bem, trivialmente tuda a renda é gasta nele).
- Produção de energia: $y_e = (l_e)^{0.5}$.
- Produção do bem de consumo: $y_c = (l_c e_c)^{0.5}$, sendo e_c a quantidade de energia usada como insumo.
- Dotação de trabalho $\bar{l} = l_e + l_c$.
- Trivialmente, o consumidor é o único acionista da firma.

Economia com Produção - Exemplo II

- Problema da firma produtora de energia: $\max_{l_e} p_e (l_e)^{0.5} - wl_e \Longrightarrow 0.5 p_e (l_e)^{-0.5} = w$.
- Problema da firma produtora do bem de consumo: $\max_{l_c, e_c} p_c (l_c e_c)^{0.5} - wl_e - p_e e_c \Longrightarrow p_c 0.5 \left(\frac{e_c}{l_c}\right)^{0.5} = w$, $p_c 0.5 \left(\frac{l_c}{e_c}\right)^{0.5} = p_e$.
- Normalizando w para 1 temos: $2(l_e)^{0.5} = p_e$(da condição sobre a produtora de energia)
- Dividindo as condições da outra firma: $p_e = \frac{l_c}{e_c} \Longrightarrow 2(l_e)^{0.5} = \frac{l_c}{e_c}$.
- Mas pela função de produção $e_c = (l_e)^{0.5}$.
- Das duas últimas condições:$2l_e = l_c \Longrightarrow 2l_e = \bar{l} - l_e \Longrightarrow l_e = \frac{\bar{l}}{3}$, $l_c = 2\frac{\bar{l}}{3}$. Trivialmente pode-se determinar p_e e p_c.

Economia com Produção - Exemplo II

Alocações eficientes:

$$\max u(c)$$

s.a.

$$c = y_c$$

$$y_c = (l_c e_c)^{0.5}$$

$$y_e = (l_e)^{0.5}$$

$$e_c = y_e$$

$$l_c + l_e = \bar{l}$$

Economia com Produção - Exemplo II

Alocações eficientes - Por sucessivas substituições, simplesmente resolve-se:

$$\max_{l_c} (l_c)^{0.5} \left(\bar{l} - l_c\right)^{0.25}$$

Isso é equivalente a maximizar

$$0.5 \ln l_c + 0.25 \ln \left(\bar{l} - l_c\right)$$

$\Longrightarrow$CPO $\frac{0.5}{l_c} = \frac{0.25}{\bar{l} - l_c} \Longrightarrow l_c = 2\frac{\bar{l}}{3}$.
A alocação competitiva é eficiente.

Economia com Produção - Exemplo II

Subsídio a energia.

- Cobra-se um imposto do agente e subsidia-se energia. Assim, o lucro para o produtor de energia é:

$$\Pi_e = p_e(1+\tau)\left(l_e\right)^{0.5} - wl_e \Longrightarrow$$

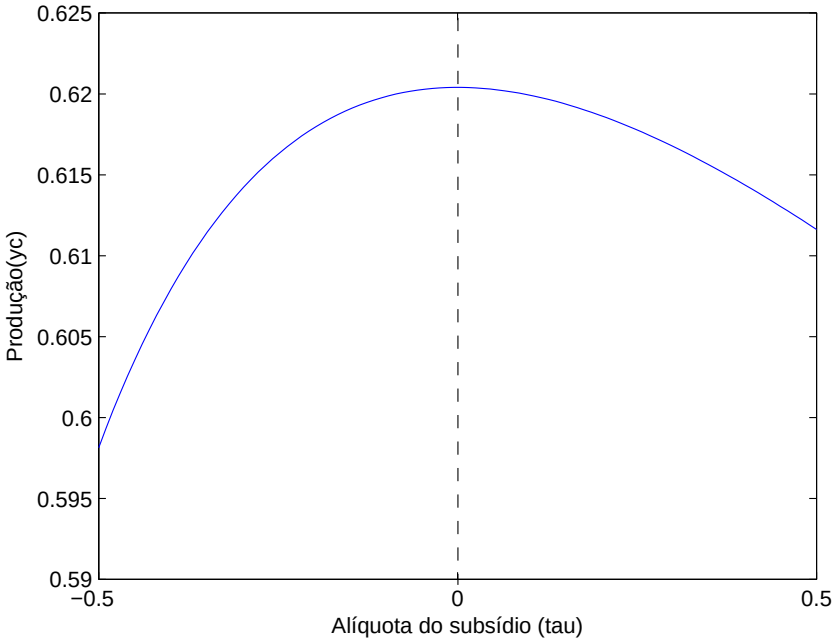
C.P.O:

$$0.5(1+\tau)p_e\left(l_e\right)^{-0.5} = w$$

- O problema da outra firma não muda, o que gera: $p_e = \frac{l_c}{e_c}$. Substituindo-se na condição da outra firma e normalizando w para 1.
- $0.5\left(1+\tau\right)\frac{l_c}{e_c}\left(l_e\right)^{-0.5} = 1$. Pelas restrições de recurso: $0.5\left(1+\tau\right)\frac{l_c}{\left(l_e\right)^{0.5}}\left(l_e\right)^{-0.5} = 1 \Longrightarrow 2l_e = (1+\tau)(\bar{l} - l_e). \Longrightarrow l_e = \frac{(1+\tau)\bar{l}}{3+\tau} \geq \frac{\bar{l}}{3}$.
- Não há eficiência. Na prática, sem o subsídio y_c será menor.

Economia com Produção - Exemplo II

Efeito de subsídio é redução da produção



Economia com Produção - Exemplo II

Note-se que:

- A renda do indivíduo, neste caso, é derivada da venda do trabalho, mas também da firma que produz energia, que tem lucro positivo.
- O financiamento do subsídio é dado por um imosto que é subtraído da renda do indivíduo. Assim sua renda (igual ao consumo c) será:

$$w\bar{l} + \Pi_e - T,$$

  sendo T o imposto, que deves ser obtido a de maneira a que $T = \tau p_e y_e$.
- Tributação distorsiva será melhor explorada no próximo tópico, externalidades.

Externalidades

Ação de um agente afeta outro de modo não refletido em trasações de mercado.

- Agente gerador de externalidade pode ser firma ou consumidor.
- Agente afetado pela externalidade pode ser firma ou consumidor.
- Externalidades podem ser positivas ou negativas.
- Positivas: polinização, tecnologia.
- Negativas: Poluição, trânsito.

Externalidades em uma economia de trocas.

Exemplo: 2 bens e 2 indivíduos. Consumo do bem 1 pelo indivíduo A afeta o indivíduo B.

- Utilidade de A : $u^A(x_1^A, x_2^A)$.
- Utilidade de B : $u^B(x_1^B, x_2^B, x_1^A)$.
- B, no entanto, não pode negociar o valor de x_1^A (neste sentido há mercados incompletos).

Externalidades em uma economia de trocas.

Problema que determina as alocações eficientes:

$$\max_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B} \lambda^A u^A(x_1^A, x_2^A) + \lambda^B u^B(x_1^B, x_2^B, x_1^A)$$

$$s.a.\ x_1^A + x_1^B = \omega_1,$$

$$x_2^A + x_2^B = \omega_2.$$

O problema pode ser redefinido como:

$$\max_{x_1^A, x_2^A} \lambda^A u^A(x_1^A, x_2^A) + \lambda^B u^B(\omega_1 - x_1^A, \omega_2 - x_2^A, x_1^A).$$

CPOs:

$$x_1^A:\ \lambda^A u_1^A + \lambda^B u_3^B = \lambda^B u_1^B;$$

$$x_2^A:\ \lambda^A u_2^A = \lambda^B u_2^B;$$

Externalidades em uma economia de trocas.

Dividindo a primeira CPO pela segunda:

$$\frac{u_1^A}{u_2^A} + \frac{\lambda^B u_3^B}{\lambda^A u_2^A} = \frac{u_1^A}{u_2^A} + \frac{u_3^B}{u_2^B} = \frac{u_1^B}{u_2^B}.$$

Note-se que no equilíbrio competitivo a solução fica inalterada pela presenças de externalidade (uma vez que o efeito de x_1^A sobre u^B não afeta nenhuma decisão). Portanto teremos:

$$\frac{u_1^A}{u_2^A} = \frac{u_1^B}{u_2^B}.$$

Note portanto que a solução competiva é diferente da solução eficiente.

Externalidades em uma economia de trocas.

Considere o exemplo:

$$u^A(x_1^A, x_2^A) = \ln x_1^A + \ln x_2^A,$$

$$u^B(x_1^B, x_2^B, x_1^A) = \ln x_1^B + \ln x_2^B + a.x_1^A.$$

Neste caso, nas alocações eficientes teremos:

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} + \frac{\lambda^B}{\lambda^A} a.x_2^A = \frac{x_2^B}{x_1^B}.$$

No equilíbrio competitivo:

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B}.$$

Se a for positivo (externalidade positiva), eficiência requer que o indivíduo A tenha uma participação maior do bem 1 do que no equilíbrio competitivo. O contrário ocorre no caso de uma externalidade negativa.

Externalidades em uma economia com produção.

Suponha que a produção de um certo bem afete a função objetivo de um outro agente. Assim temos, por exemplo:

- $u^A = u^A(x_1^A, x_2^A, y_1)$
- $y_2 = f_2(k_2, l_2, y_1)$

Externalidades em uma economia com produção.

No primeiro caso, o problema que define alocações eficientes é:

$$\max_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B, y_1, y_2, k_1, k_2, l_1, l_2} u^A(x_1^A, x_2^A, y_1),$$

sujeito a:

$$u^B(x_1^B, x_2^B) \geq \bar{u}^B,$$

$$y_1 = x_1^A + x_1^B, \; y_2 = x_2^A + x_2^B,$$

$$y_1 = f_1(k_1, l_1), \; y_2 = f_2(k_2, l_2)$$

$$k_1 + k_2 = \bar{k}, \; l_1 + l_2 = \bar{l}$$

$$x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B, y_1, y_2, k_1, k_2, l_1, l_2 \geq 0.$$

Externalidades em uma economia com produção.

Fazendo as substituições pertinentes, chegamos a:

$$\max_{x_1^A, x_2^A, k_1, l_1} u^A(x_1^A, x_2^A, f_1(k_1, l_1)),$$

sujeito a:

$$u^B\left(f_1(k_1, l_1) - x_1^A, f_2(\bar{k} - k_1, \bar{l} - l_1) - x_2^A\right) \geq \bar{u}^B.$$

Temos então o seguinte lagrangeano:

$$\mathscr{L} = u^A(x_1^A, x_2^A, f_1(k_1, l_1)) + \lambda\left[u^B\left(f_1(k_1, l_1) - x_1^A, f_2(\bar{k} - k_1, \bar{l} - l_1) - x_2^A\right) -\right.$$

Externalidades em uma economia com produção.

As condições de primeira ordem ficam:

$$x_1^A: \; u_1^A = \lambda u_1^B; \; x_2^A: \; u_2^A = \lambda u_2^B$$

$$k_1: \; (u_3^A + \lambda u_1^B) f_{1k} = \lambda u_2^B f_{2k}; \; l_1: (u_3^A + \lambda u_1^B) f_{1l} = \lambda u_2^B f_{2l}.$$

Estas condições implicam em:

- $\frac{u_1^A}{u_1^A} = \frac{u_1^B}{u_1^B}$, ou seja, taxas marginais de substituição iguais entre indivíduos.
- $\frac{f_{1k}}{f_{1l}} = \frac{f_{2k}}{f_{2l}}$, ou seja, taxas marginais de substituição técnica são iguais nos dois setores.
- $\frac{u_3^A + \lambda u_1^B}{\lambda u_2^B} = \frac{f_{k2}}{f_{k1}} = \frac{f_{l2}}{f_{l1}}$, ou seja, taxa marginal de transformação agora difere da taxa marginal de substituição. Se $u_3^A > 0$ (externalidade positiva), $\frac{f_{k2}}{f_{k1}}$ será maior que a TMS, o que está associado a maior produção no setor 1. Se $u_3^A < 0$ ocorre o oposto.

Externalidades em uma economia com produção.

- Note que, com equilíbrio competitivo, as condições serão equivalentes às sem externalidades, o que implica que TMSs são iguais, TMSTs são iguais e TMSs são iguais à TMT.
- Isso implica que alocação competitiva não é eficiente.
- Exercício: mostre que no caso em que $y_2 = f_2(k_2, l_2, y_1)$ as alocações eficientes também diferem das soluções competitivas.

Externalidades em uma economia com produção.

Soluções para o problema de externalidades:

- Impostos Pigouvianos: imposto (ou subsídio) distorsivo ajusta os preços para incorporar (internalizar) efeiros de externalidades.
- Mercados por Externalidades: cria-se um mercado para negociar externalidades (coase).

1-) Imposto Pigouviano:

- Economia de trocas: na solução eficiente, temos $\frac{x_2^A}{x_1^A} + \frac{\lambda^B}{\lambda^A} a.x_2^A = \frac{x_2^A}{x_1^A} + \frac{x_2^B}{x_2^A} a.x_2^A = \frac{x_2^B}{x_1^B}$, ao passo que no equilíbrio competitivo temos $\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B}$.
- Economia com produção: na solução eficiente, temos $\frac{u_3^A + \lambda u_1^B}{\lambda u_2^B} = \frac{u_3^A + \frac{u_1^A}{u_1^B} u_1^B}{\frac{u_1^A}{u_1^B} u_2^B} = \frac{f_{k2}}{f_{k1}} = \frac{f_{l2}}{f_{l1}}$ ao passo que no equilíbrio competitivo temos $\frac{u_1^B}{u_2^B} = \frac{f_{k2}}{f_{k1}} = \frac{f_{l2}}{f_{l1}}$.

Externalidades - Soluções: 1- Imposto Pigouviano

No caso de uma economia de trocas, suponhamos que estabeleça-se um imposto τ (ou subsídio se $\tau < 0$) sobre o consumo do bem 1 pelo tipo A:

- A restrição orçamentária de A ficará: $(1+\tau)\, p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = p_1 \omega_1^A + p_2 \omega_2^A + T^A$,sendo T^A um subsídio (ou imposto) "Lump-Sum", ou seja, que não é afetado pelas escolhas de A.
- A condição de pimeira ordem do consumidor A será: $\frac{p_1(1+\tau)}{p2} = \frac{x_2^A}{x_1^A}$. A de B será: $\frac{p_1}{p2} = \frac{x_2^B}{x_1^B}$.
- Se tivermos $\tau = -a.x_1^B$, a condição de eficiência acima encontrada pode ser atendida. Note-se que, caso a seja positivo (externalidade positiva), deve-se usar um subsídio ($\tau < 0$). Caso a seja negativo, deve-se usar um imposto.

Externalidades - Soluções: 1- Imposto Pigouviano

No caso com produção, suponha que haja um imposto τ sobre a produção do bem 1. O lucro da firma 1 será:

$$\Pi_1 = (1-\tau)p_1 f_1(k_1, l_1) - wl_1 - rk_1.$$

- A maximização de lucros da firma 1 gerará: $(1-\tau)p_1 f_{1k} = r$; $(1-\tau)p_1 f_{1l} = w$.
- A da firma 2 gerará: $p_2 f_{2k} = r$; $p_2 f_{2l} = w$.
- Assim teremos: $\frac{u_1^B}{u_2^B} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{f_{2k}}{(1-\tau)f_{1k}} = \frac{f_{2l}}{(1-\tau)f_{1l}}$.
- Caso tenhamos: $\tau = -\frac{u_3^A}{\lambda u_1^B} = -\frac{u_1^B u_3^A}{u_1^A u_2^B}$, a condição para eficiência expressa acima será atingida. Note novamente que, com externalidade positiva$\left(u_3^A > 0\right)$deverá haver subsídio $\tau < 0$, ao passo que, se a externalidade for negativa, $\left(u_3^A < 0\right)$ haverá imposto.

Externalidades - Exemplo

Exemplo 1 (Varian) - Indivíduo A é fumante, B não é:

- Utilidade de A : $u^A(c_A, f_A) = 4\,(f_A)^{0.5} + c_A$.
- Utildade de B : $u^B(c_B, f_A) = c_B - f_A$.
- Dotação total de bens é $\bar{c} = \omega_A + \omega_B$.
- Indivíduo A tem 12 horas disponíveis para fumar sem custo. Em equilíbrio, ele irá fumar as 12 horas.

A tem até 12 horas por dia para fumar sem custos.

Externalidades - Exemplo

Problema de alocações eficientes:

$$\max_{c_A, f_A} \left(4 \left(f_A \right)^{0.5} + c_A \right)$$

s.a

$$\bar{c} - c_A - f_A = \bar{u}$$

$$f_A \leq 12.$$

C.P.Os: $\frac{4(f_A)^{-0.5}}{2} = \lambda$, $\lambda = 1 \Longrightarrow f_A = 4.$

Externalidades - Exemplo

Caso cobre-se um imposto τ sobre o ato de fumar, o problema de A fica:

$$\max_{f_A} 4\left(f_A\right)^{0.5} + w_A - \tau f_A + T_A,$$

sendo $T_A$uma transferência lump-sum. Sua condição de primeira ordem é:

$$\frac{4\left(f_A\right)^{-0.5}}{2} = \tau.$$

Com $\tau = 1$o consumo será eficiente.

Externalidades - Exemplo

Outra solução - Mercado por externalidades (Coase).

- Pode ser visto na caixa de Edgeworth.
- Alocação final depende de direitos de propriedade sobre a ação geradora de externalidade. A tem L_A unidades da licensa.
- Negocia-se licensa pelo fato gerador da externalidade.
- Surge um preço de mercado, p_f

Externalidades - Exemplo

Com o mercado temos:

- problema de A:

$$\max_{f_A} 4\left(f_A\right)^{0.5} + w_A + p_f L_A - p_f f_A$$

$$\Longrightarrow 2\left(f_A\right)^{-0.5} = p_f$$

- problema de B:

$$\max_{f_A} w_A + p_f\left(f_A - L_A\right) - f_A$$

$$\Longrightarrow p_f = 1$$

- Solução eficiente será alcançada.

Externalidades - Soluções: 2- Mercados por Externalidades

- Esta solução aplica-se aos casos acima mencionados.
- Teorema de Coase: na ausência de "custos de transação" se for possível negociar direitos sobre externalidade, resultará desta negociação uma solução eficiente.
- Com preferências quasilineares, quantidade eficiente de externalidade é fixa.
- Exemplos: licensa por direito a poluir ou usar carros.
- Vantagens sobre impostos: não é necessário conhecer os parâmetros de preferências e alocação do fato gerador da externalidade é eficiente.

Exemplo de Economia de trocas.
consumidor A:

$$\max_{x_1^A, x_2^A} u^A(x_1^A, x_2^A)$$

s.a.

$$(p_1 + p_e)\, x_1^A + p_2 x_2^A = \omega_1^A p_1 + \omega_2^A p_1 + p_e L_A.$$

Consumidor B:

$$\max_{x_1^A, x_1^B, x_2^B} u^B(x_1^B, x_2^B, x_1^A)$$

s.a.

$$p_1 x_1^B + p_2 x_2^B = \omega_1^B p_1 + \omega_2^B p_1 + p_e(x_1^A - L_A)$$

- Exercício: mostrar que isso gera a condição para alocação eficiente acima.

Exemplo com produção:
Firma 1:

$$\max_{k_1, l_1} (p_1 - p_e) f_1(k_1, l_1) - rk_1 - wl_1 + p_e L_1$$

Consumidor A :

$$\max_{x_1^A, x_2^A, y_1} \; u^A(x_1^A, x_2^A, y_1)$$

s.a.

$$p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = wl^A + rk^A + \Pi_1^A + \Pi_2^A + p_e(y_1 - L_1)$$

Outro exemplo: $y_2 = f_2(k_2, l_2, y_1)$.Problema eficiente tem lagrangeano (exercício):

$$\mathscr{L} = u^A(x_1^A, x_2^A) + \lambda \left[u^B \left(f_1(k_1, l_1) - x_1^A, f_2(\bar{k} - k_1, \bar{l} - l_1, f_1(k_1, l_1) \right) - \bar{u}^B \right].$$

As CPOs geram: $\left(u_1^B + u_2^B f_{23}\right) f_{1k} = f_{2k} u_2^B$,
$\left(u_1^B + u_2^B f_{23}\right) f_{1l} = f_{2l} u_2^B$.
Teremos:

$$\frac{f_{2k}}{f_{1k}} = \frac{f_{2l}}{f_{1l}} = \frac{u_1^B + u_2^B f_{23}}{u_2^B} = \frac{u_1^B}{u_2^B} + f_{23}$$

Esta condição difere do equilíbrio competitivo.

Externalidades - Soluções: 3 - Fusão entre Firmas

Suponhamos que as firmas se fundam. O lucro da firma fundida será:

$$\Pi = p_1 f_1(k_1, l_1) + p_2 f_2(k_2, l_2, f_1(k_1, l_1)) - r(k_1 + k_2) - w(l_1 + l_2).$$

As CPOs das firmas serão: $p_1 f_{1k} + p_2 f_{23} f_{1k} = r$, $p_1 f_{1l} + p_2 f_{23} f_{1l} = w$, $p_2 f_{2k} = r$, $p_2 f_{2l} = w$.
Assim teremos:

- $\frac{f_{2k}}{f_{1k}} = \frac{f_{2l}}{f_{1l}} = \frac{p_1 + p_2 f_{23}}{p_2}$, $\frac{u_1^B}{u_2^B} = \frac{u_1^A}{u_2^A}$, $\frac{f_{2k}}{f_{1k}} = \frac{u_1^B}{u_2^B} + f_{23}$.
- Há eficiência.
- A existência de externalidades entre etapas produtivas é a base da teoria da firma de Coase. É meelhor formar firmas do que criar mercados para lidar com estas externalidaes entre etapas, dados os custos de transação.

Bens Públicos

Duas características definem bens públicos.

1. Não rivalidade: consumo por um agente não limita o consumo pelos demais.
2. Não exclusão: não se pode evitar que um indivíduo consuma o bem.

- Estes fatos impedem que haja mercados completos por estes bens, o que gera um problema de externalidades.

Bens Públicos

Exemplos:

- Não rivalidade, mas exclusão: transmissão de rádio, música, idéias.
- Não exclusão mas rivalidade: Pesca com recursos esgotáveis, ar puro, pastos coletivos.
- Não exclusão e não rivalidade: Defesa nacional, controle de doenças, controle de mosquito.

Bens Públicos Puros

Bens públicos puros (não exclusão e não rivalidade) com N agentes, 1 bem público, 1 bem privado e um fator (trabalho).

- Produção do bem público: $y_{pub} = f_{pub}(l_{pub})$.
- Produção do bem privado: $y_{priv} = f_{priv}(l_{priv})$.
- Utilidade do indivíduo n: $u^n(x^n_{priv}, x_{pub})$.
- Restrições de recursos: $\sum_{n=1}^{N} x^n_{priv} = y_{priv}$; $x_{pub} = y_{pub}$. Note-se que a utilidade depende da produção total do bem público, não de um consumo indivídual por parte de cada agente. Isso se deve a não exclusão (o fato de haver vários indivíduos consumindo não requesr que o consumo seja "dividido" entre eles) e não exclusão (não se pode impedir que um indivíduo desfrute do que foi produzido).

Bens Públicos Puros

Caracterização das alocações eficientes:

$$\max_{x^1_{priv},\ldots,x^n_{priv},l_{pub},l_{priv}} \lambda^1 u^1(x^1_{priv}, f_{pub}(l_{pub})) + \ldots + \lambda^N u^N(x^N_{priv}, f_{pub}(l_{pub}))$$

s.a.

$$\sum_{n=1}^{N} x^n_{priv} = f_{priv}(\bar{l} - l_{pub}). \Longrightarrow$$

$$\mathscr{L} = \sum_{n=1}^{N} \lambda^n u^n(x^n_{priv}, f_{pub}(l_{pub})) + \gamma \left(f_{priv}(\bar{l} - l_{pub}) - \sum_{n=1}^{N} x^n_{priv} \right).$$

CPOs

$$x^n_{priv}: \ \lambda^n u^n_1 = \gamma,$$

sendo que $u^n_1 \equiv \frac{\partial u^n}{\partial x^n_{priv}}$.

$$x_{pub}: \ \sum_{n=1}^{N} \lambda^n u^n_2 f'_{pub} = \gamma f'_{priv} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u^n_2}{u^n_1} = \frac{f'_{priv}}{f'_{pub}}.$$

- Taxa marginal de transformação é igual à soma das taxas marginais de substituição.

Bens Públicos Puros

Suponhamos que a provisão seja feita privadamente. As firmas maximizam:

$$\Pi_{priv} = p_{priv} f(l_{priv}) - w l_{priv}; \Pi_{pub} = p_{pub} f(l_{pub}) - w l_{pub} \Longrightarrow$$

$$\frac{p_{priv}}{p_{pub}} = \frac{f'_{pub}}{f'_{priv}}.$$

Um indivíduo que compre tanto bens públicos quanto privados satisfará: $\frac{u_1^n}{u_2^n} = \frac{p_{priv}}{p_{pub}} \Longrightarrow \frac{u_1^n}{u_2^n} = \frac{f'_{pub}}{f'_{priv}}$. Taxa marginal de transformação será igual à TMS deste único indivíduo. Questão: todos indivíduos comprarão o bem público. Resposta: não, apenas o indivíduo que mais valoriza (relativamente ao bem privado) o bem público fará o gasto. Para os demais, escolha será feita em uma condição de canto, e haverá consumo zero do bem público. Estes são os chamadaos "caronas" (free-riders).

Exemplo:

- 2 agentes, $u^n(x_{priv}, x_{pub}) = x^n_{priv} + a^n \ln x_{pub}$, com $a^1 = 1,\ a^2 = 2$.
- Com provisão privada do bem público (com o indivíduo n provendo x^n_{pub}), o problema do agente n será:

$$\max_{x^n_{priv}, x^n_{pub}} x^n_{priv} + a^n \ln(x^1_{pub} + x^2_{pub}),$$

s.a.

$$p_{priv} x^n_{priv} + p_{pub} x^n_{pub} = m^n \equiv wl^n,$$
$$x^n_{priv} \geq 0,\ x^n_{pub} \geq 0.$$

Note-se que esta formulação torna transparente o problema de externalidades: a utilidade de um agente depende do gasto com bens públicos do outro.

- Neste caso, teremos: $\frac{a^n}{x_{pub}} = \frac{p_{pub}}{p_{priv}} \Longrightarrow x_{pub} = \frac{p_{priv}}{p_{pub}} a^n$. Esta restrição pode ser válida apenas para o indivíduo com 2. O indivíduo 1 não consumirá bem publico.

Bens Públicos Puros

- Suponhamos adicionalmente que $f_{priv} = l_{priv}$, $f_{pub} = l_{pub}$.
- Adotando o bem privado como numerário, ou seja, $p_{priv} = 1$, temos que $p_{pub} = w = 1$.
- Assim, no equilíbrio competitivo teremos: $x_{pub} = 2$. O indivíduo 1 será free-rider.
- A solução eficiente requer: $\frac{u_2^1}{u_1^1} + \frac{u_2^2}{u_1^2} = \frac{1}{x_{pub}} + \frac{2}{x_{pub}} = \frac{f'_{priv}}{f'_{pub}} = 1 \Longrightarrow x_{pub} = 3.$

Bens Públicos Puros

De qualquer maneira, solução de mercado será ineficiente. Soluções para o problema:

- Clubes: pessoas se associam e dividem custos para consumir um bem público.
- Provisão governamental do bem público. Decisão deve depender da decisão de vários agentes, o que levanta o problema bastante complexo de escolha social (alguns resultados importantes são o teorema do eleitor mediano, teorema da impossibilidade, entre outros.)

Bens Públicos - Não Exclusão

Exemplo em que há não exclusão mas há rivalidade. Drama dos comuns.

- Em um lago, a produção total de peixes é dada por $f(l)$,sendo l o número total de horas de trabalho dedicadas à pesca. Com N firmas de pesca, $l = l_1 + .. + l_N$, sendo l_no total de horas de pesca contratadas pela firma N. Supomos concavidade de f ($f' > 0,\ f'' < 0$)
- Produção total da firma n é proporcional à sua participação em número de horas: $y_n = \frac{l_n}{l_1+...+l_N} f(l_1 + ... + l_N)$.
- Assim a firma n maximiza: $\Pi^n = p\frac{l_n}{l_1+...+l_N} f(l_1 + ... + l_N) - l_n w \Longrightarrow p\frac{1}{l} f(l) + p\frac{l_n}{l} f'(l) - p\frac{l_n}{l^2} f(l) = w$.
- Se l_n for muito pequeno relativamente a l (o que ocorrerá se n for muito grande) teremos aproximadamente: $p\frac{1}{l} f(l) = w$.
- Esta é a chamada solução descentralizada, que emerge do equilíbrio competitivo.

Bens Públicos - Não Exclusão

Por outro lado, a maximização do excedente total da indústria no lago ocorre com:

$$\max_{l} pf(l) - wl \Longrightarrow$$

$$pf'(l) = w.$$

Pela concavidade de f, esta última solução, que é eficiente, tem um valor de l menor do que na solução descentralizada acima. (note-se que estamos supondo que p e w são dados, o que é consistente com a indústria neste lado ser pequena em relação ao mercado total de peixes e de trabalho)

Bens Públicos - Não Exclusão

Soluções possíveis para o drama dos comuns:

- Estabelecimento de impostos (solução à la Pigou).
- Estabelecimento de cotas.
- Conferir direito de propriedade sobre a pesca no rio a uma única firma.

Bens Públicos - Não Rivalidade

Não rivalidade mas exclusão é o que ocorre, por exemplo, quando se impõe patentes ou direitos de propriedade. Neste caso confere-se direito do produtor do bem não rival cobrar pelo uso. Ele atua como monopólio.
Monopólio é o próximo tópico do curso.

Monopólio

- Uma das hipóteses por trás do modelo competitivo, em que valem teoremas do bem-estar, é que consumidores e firmas são tomadores de preços.
- No caso de monopólio firmas são grandes e portanto capazes de afetar preços de mercado.
- O equilíbrio que resulta disto gera ineficiência.

Monopólio

Havendo monopólio, o preço dependerá da quantidade vendida. O lucro do monopolista será:

$$\Pi = p(q)q - C(q),$$

sendo que $p(q)$ é a demanda inversa, q é a quantidade produzida e $C(q)$ é a função custo do monopolista. A maximização de lucros gera:

$$\underbrace{p'(q)q + p(q)}_{\text{Receita Marginal}} = \underbrace{C'(q)}_{\text{Custo Marginal}},$$

ou seja,

$$Rmg(q) = Cmg(c).$$

Monopólio

- Como o comportamento do consumidor faz com que o preço seja igual à utilidade marginal (medida em unidades monetárias), eficiência requeriria que $p = Cmg$. Isso ocorre no caso competitivo, (em que $p^{\prime}$(q)=0), mas com monopólio o preço difere do equilíbrio competitivo.
- Monopólio gera menor produção do que a eficiente.
- O benefício adicionado por se aumentar a produção é superior ao seu custo.
- Partindo da solução de monopólio, caso fosse possível vender uma unidade adicional a um preço inferior ao preço da solução de monopólio, tanto firma quanto consumidor ganhariam.
- Isso pode ser visto graficamente.

Monopólio

- Partindo da equação $p'(q)q + p(q) = C'(q)$, chegamos a $p(q)\left[1 + \frac{p'(q)}{p(q)}q\right] = C'(q)$.
- Note que $\frac{p'(q)}{p(q)}q = \frac{\partial p(q)}{\partial q}\frac{q}{p(q)} = \frac{1}{\frac{\partial q(p)}{\partial p}\frac{p}{q}}$, sendo $q(p)$ a função demanda.
- Assim, temos que $\frac{p'(q)}{p(q)}q = -\frac{1}{|\varepsilon_p|}$, sendo $|\varepsilon_p|$ o valor absoluto da elasticidade-preço da demanda.
- Assim temos: $p(q) = \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_p|}\right]^{-1} C'(q)$.

Monopólio

A condição $p(q) = \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_p|}\right]^{-1} C'(q)$ permite concluir que:

- Não faz sentido termos $|\varepsilon_p| < 1$. Isso implicaria em preço negativo! Na prática, quando vale isso temos que $Rmg(p) = p(q)\left[1 + \frac{p'(q)}{p(q)} q\right] = p(q)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_p|}\right] < 0$. Reduzir a produção aumentaria a receita. Isso não pode ser sustentado em uma situação de otimização.
- Dado que $|\varepsilon_p| < 1$, quanto mais inelástica a demanda, maior a diferença entre o preço e o custo marginal.
- O termo $\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_p|}\right]^{-1}$ é chamado de markup. Quanto mais inelástica a demanda, maior o markup.

Monopólio - Discriminação de Preços

Discriminação de preços de primeiro grau.

- Cada unidade é vendida por um preço distinto.
- As primeiras unidades, que geram benefício maior, são vendidas por um preço maior.
- Todo o excedente é apropriado pelo monopolista.
- Difícil de impor caso haja mercado secundário ou heterogeneidade não observada.
- Há eficiência, mas solução é pior para o consumidor do que o caso sem discriminação.

Monopólio - Discriminação de Preços

Discriminação de preços de terceiro grau (price to market):

- Cada mercado recebe um preço diferente.
- Preço no mercado i: $p_i = \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_i|}\right]^{-1} c'(q)$, sendo que $|\varepsilon_i|$ é o valor absoluto da elasticidade da demanda no mercado i.
- Mercados com demanda mais inelástica terão preços mais alto.
- Dificuldades: contrabando e mercado secundário.

Monopólio - Discriminação de Preços

Discriminação de preços de segundo grau:

- Preços não proporcionais.
- Exemplo: traifa de duas partes. O valor que se paga para se consumir uma quantidade q é $P(q) = F + pq$.
- Fé o componente fixo do preço.
- p é chamado de "preço marginal".
- Com preferências quasilineares (sem efeito renda), quantidade comprada, caso seja positiva, dependerá apeanas do preço marginal.
- Para haver compras é necessário que o excedente do cosumidor seja não negativo.
- Monopolista procura extrair o excedente do produtor a partir de F.

Monopólio - Discriminação de Preços

Exemplo:

- Demanda linear: $q = a - bp$.
- Essa demanda é derivada de $u(q, m) = m + c_1 q - c_2 q^2$, sendo $m = y - F - pq$, $c_2 = \frac{1}{2b}$, $c_1 = \frac{a}{b}$.
- Note-se que só haverá compras se $F \leq \left(\frac{a}{b} - p\right) \frac{(a-bp)}{2}$. Caso esta condição seja satisfeita, teremos $q = a - bp$, que não depende de F.
- Supondo-se o custo marginal for igual ao médio igual a c. Com $F = \frac{(a-bc)^2}{2b}$ extrai-se todo o excedente do consumidor.
- Neste caso solução é equivalente à de discriminação de primeiro grau.

Monopólio - Discriminação de Preços

Discriminação de segundo grau com tarifa de duas partes e heterogeneidade de tipos:

- Suponha que haja 2 tipos de consumidores, e a mesma quantidade de indivíduos de cada tipo.
- Demanda do tipo 1 $q_1 = 60 - p_1$.
- Demanda do tipo 2 $q_2 = 50 - p_2$.
- Suponha custo marginal igual a custo médio igual a 10.

Monopólio - Discriminação de Preços

Suponha uma tarifa do tipo $P(q) = F + pq$.

- Para que os 2 tipos participem como consumidores a um preço marginal $p = 10$, é necessário que, no máximo, o comoponente fixo F tenha valor 800. Neste caso, o lucro com os dois tipos (1600) será maior do que se apenas o maior excedente for extraído do tipo 1 (neste caso o excedente seria de 1250).
- No entanto, este não é o maior excedente possivel de ser extraído. Um aumento de p com diminuição de F pode gerar ganho de lucro.
- Neste caso, para que os 2 tipos entrem, devemos ter: $F = \frac{(50-p)^2}{2}$, que é o excedente do consumidor do tipo 2.
- O lucro neste caso será: $2\frac{(50-p)^2}{2} + (p-10)(60-p) + (p-10)(50-p) = 2400 + 30p - p^2$.
- O lucro é maximizado com $2p = 30 \Longrightarrow p = 15$. Neste caso, o lucro será de 1625.

Monopólio - Discriminação de Preços

Observações:

1. Há casos em que é melhor abrir mão de um tipo, e tirar o maior excedente possível do tipo de maior demanda.
2. Não necessariamente o melhor mecanismo é uma tarifa de duas partes. Às vezes é preferível oferecer um menu preço/quantidade para cada tipo, sem utilizar uma função linear deste tipo (ver parte do variam sobre discriminação de segundo grau).
    1. Deve-se escolher $q_2 = q^*$ tal que a distância vertical entre as duas demandas seja igual à distância vertical entre a menor demanda e o custo marginal.
    2. Oferece-se, para ser consumido pelo tipo 2, um menu com quantidade q^*e preço igual à área sob a demanda para o tipo 2.
    3. Para o tipo 1, oferece-se a quantidade $q_1 = q^{**}$, que iguala sua demanda a zero e cobra-se o máximo possível para que ele não queira passar-se pelo tipo 2.
3. Graficamente pode-se observar que este é conjunto de menus que extrai o máximo lucro do conjunto de consumidores.

No exemplo acima temos que $q_2 = 30$, e o valor cobrado ao tipo 2 será 110. O lucro com este tipo será 800. Para o tipo 1, a quantidade oferecida será 50. Será cobrado a este tipo: 1750-300=1450. O lucro total com este tipo será 1450-500=950 . lucro total será 1750.

Monopólio - Regulação

- Com informação sobre demanda e custos, agências reguladoras podem impor teto em preços, com o objetivo de garantir custo marginal igual a preço.
- Em monopólio natural, custos marginais são decrescentes.
- Neste caso, igualdade entre custos marginais e preços gerará prejuízo.
- Soluções possíveis: subsídio, provisão pública ou permissão de discriminação de preços.

Jogos

Jogos: estuda Interações estratégicas entre agentes. Ações de cada agente afeta todos os agentes.
Ingredientes de um jogo:

- Jogadores: agentes que participam do jogo, 1,2,..,I.
- Estratégias (puras): ações possíveis de cada indivíduo. A estratégia do jogador i é denotada por s^i. A estratégia de todos of jogadores, $(s^1, ..., s^I)$ é chamada de estratégia conjunta. A ação s^i deve pertencer ao conjunto S^i, o conjunto de ações disponíveis a este jogador.
- Payoffs: a utilidade de cada jogador dadas as estratégias de todos. O payoff do jogador i é denotado por $u^i(s^1, ..., s^I)$.

Jogos - Exemplo

Dilema dos prisioneiros:

- Jogadores: 2 jogadores, 1 e 2.
- Duas ações disponíveis a cada jogador: confessar ou não confessar. $S^1 = S^2 = \{C, N\}$em que C representa a ação "confessar" e N a ação "não confessar".
- Payoffs ($u^1(s^1, s^2)$ e $u^2(s^1, s^2)$): $u^1(N, N) = u^2(N, N) = 2$, $u^1(C, C) = u^2(C, C) = 2$, $u^1(C, N) = u^2(N, C) = 3$, $u^1(N, C) = u^2(C, N) = 0$.

Jogos - Exemplo

Representação de um jogo na forma normal. Representa-se o Jogo como uma tabela: cada linha corresponde à estratégia do jogador 1, e cada coluna corresponde a uma estratégia do jogador 2. Nas entradas da tabela, coloca-se $u^1(s^1, s^2), u^2(s^1, s^2)$. No exemplo temos:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 2 & \\
 & & C & N \\
1 & C & 1,1 & 3,0 \\
 & N & 0,3 & 2,2
\end{array}
$$

- A estratégia $\bar{s}^1$ é (fortemente) dominante para o indivíduo 1, se para qualquer s^2em S^2, $u^1\left(\bar{s}^1, s^2\right) > u^1\left(s^1, s^2\right)$ para todo $s^1 \neq \bar{s}^1$em S^1. Definição análoga vale para o indivíduo 2.
- A estratégia $\bar{s}^1$ é fracamente dominante para o indivíduo 1, se para qualquer s^2em S^2, $u^1\left(\bar{s}^1, s^2\right) \geq u^1\left(s^1, s^2\right)$ para todo s^1em S^1. Definição análoga vale para o indivíduo 2.

Caso todos os indivíduos tenham estratégias fortemente dominantes, é razoável imaginar que estas estratégias constituam a solução do jogo.
No exemplo, todos os jogadores tem C como estratégia dominante.

Jogos - Estratégias Dominadas

- A estratégia $\bar{s}^1$ é dominada para o indivíduo 1, se existe uma estratégia outra estatégia s^1em S^1 tal que $u^1\left(\bar{s}^1, s^2\right) < u^1\left(s^1, s^2\right)$ para todo s^2em S^2.
- A solução de um jogo pode vir a partir da eliminação (possivelmente iterada) de estratégias dominadas.
- Não necessariamente há estratégias dominantes e dominadas.

Jogos sem Estratégias Dominantes / Dominadas

Exemplo: Batalha dos sexos.

		M	
		L	B
H	L	$2,1$	$0,0$
	B	$0,0$	$1,2$

Não há estratégia dominante ou dominada. Como resolver o jogo?

Jogos - Equilíbrio de Nash

- Uma estratégia conjunta $(\bar{s}^1_{ss}, .., \bar{s}^I)$ é um equilíbrio de Nash se para todo indivíduo i, $u^i(\bar{s}^1, .., \bar{s}^i, ..., \bar{s}^I) \geq u^i(\bar{s}^1, .., s^i, ..., \bar{s}^I)$ dado qualquer s^i em S^i.
- Em palavras, um equilíbrio de Nash é uma situação em que nenhum indivíduo ganha ao adotar uma ação difgerente, tomando como dadas as ações dos demais.
- No dilema dos prisioneiros, há um único equilíbrio de Nash: (C, C).
- Na batalha dos sexos, há dois equilíbrios de Nash: (L, L) e (B, B).
- Pode-se motrar que, caso haja estratégias dominantes para todos os indivíduos, elas constituirão um equilíbrio de Nash.
- Pode-se motrar que, caso haja uma única estratégia conjunta que sobreviva a eliminação iterada de estratégias dominadas, ela constituirá um equilíbrio de Nash.

Há necessariamente um equilíbrio de Nash em estratégias puras? R: Não!

Exemplo - Par ou ímpar:

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & \\ & & P & I \\ 1 & P & (1,-1) & (-1,1) \\ & I & (-1,1) & (1,-1) \end{array}$$

Não há equilíbrio de Nash em estratégias puras. Solução: jogadores aleatorizam suas ações $\Longrightarrow$ estratégias mistas.

Jogos - Estratégias Mistas

Estratégias Mistas:

- Uma estratégia mista do agente i é uma loteria sobre os elementos do espaço de escolhas $S^1 \Longrightarrow p^i = (p_1^i, ..., p_N^i)$, sendo que p_n^i é a probablilidade de se jogar a n-ésima estratégia em S^i. Evidentemente devemos ter: $p^i \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{N} p_n^i = 1$ para qualquer i.
- Supõe-se que vale o teorema da utilidade esperada, ou seja, $u^i\left(p^1, ..., p^I\right) = E\left[u\left(s^1, ..., s^I\right) \mid p^1, ..., p^I\right]$.
- Estratégias puras são um caso particular de estratégias mistas, em que $p_n^i = 1$ para algum n.

Definição - melhor resposta: a estratégia mista $\bar{p}^i$(que é um vetor) é a melhor resposta de i dados $\left(\bar{p}^1, ..., \bar{p}^I\right)$ caso tenhamos que $u^i\left(\bar{p}^1, ..., \bar{p}^i, ..., \bar{p}^I\right) \geq u^i\left(\bar{p}^1, ..., p^i, ..., \bar{p}^I\right)$ para qualquer p^i.

- Note-se que pode haver mais do que uma única melhor resposta.

Jogos - Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

A estratégia mista conjunta $\left(\bar{p}^1, ..., \bar{p}^I\right)$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas caso a estratégia mista de cada indivíduo seja a melhor estratégia dada as estratégias dos demais.

- Formalmente, $\left(\bar{p}^1, ..., \bar{p}^I\right)$ é um equilíbrio de Nash se para todo jogador i, $u^i\left(\bar{p}^1, ..., \bar{p}^i, ..., \bar{p}^I\right) \geq u^i\left(\bar{p}^1, ..., p^i, ..., \bar{p}^I\right)$ para qualquer p^i.
- Teorema (Nash): Todo jogo com um número finito de jogadores e estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Como calcular o equilíbrio de Nash? Usa-se o seguinte resultado:

- Teorema: Se $\left(\bar{p}^1, ..., \bar{p}^I\right)$ é um equilíbrio de Nash em que s_1^i e s_2^isão estratégias puras jogadas com probabilidade positiva, então $u^i\left(\bar{p}^1, ..., s_1^i, ..., \bar{p}^I\right) = u^i\left(\bar{p}^1, ..., s_2^i, ..., \bar{p}^I\right)$.
- Intuitivamente: todas as estratégias jogadas com probabilidade positiva trazem o mesmo payoff.
- Este resultado é utilizado para que se calculem os equilíbrio de Nash.

Jogos - Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

Exemplo: par ou ímpar.

- Já vimos que não há equilíbrio de Nash em que qualquer um dos jogadores jogue uma estratégia pura.
- Suponha que p seja a probabilidade do jogador 1 jogar par e q seha a probabilidade do jogador 2 jogar par.
- Pela proposição, jogador 2 deve estar indiferente entre jogar par ou ímpar.
- $u^2(\text{par}, p) \equiv pu^2(\text{par,par}) + (1-p)u^2(\text{par,ímpar}) \equiv p \cdot (1) + (1-p) \cdot (-1) = p \cdot (-1) + (1-p) \cdot (1) \equiv u^2(\text{ímpar}, p) \equiv pu^2(\text{impar,par}) + (1-p)u^2(\text{ímpar,ímpar})$.
- Isso gera $p = \frac{1}{2}$. Analogamente, teremos $q = \frac{1}{2}$.
- Note-se que a probabilidade de um indivíduo jogar uma dada estratégia é obtida de forma a que o outro indivíduo fique indiferente entre as ações a serem jogadas com probabilidade positiva.

Jogos - Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

- Este equilíbrio pode ser verificado em um diagrama que expressa a maelhor resposta de um jogador como função da estratégia mista do outro.
- O equilíbrio ocorre onde as melhores respostas se encontram.

Jogos - Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

Questão: há algum equilíbrio em estratégias mistas na batalha dos sexos?

- Considere p a probabilidade de o homem ir à luta e q a probabilidade de a mulher ir à luta.
- Uma estratégia mista pela mulher requer que $p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \Longrightarrow p = \frac{2}{3}$.
- Uma estratégia mista pela homem requer que $q \cdot 2 + (1-p) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \Longrightarrow q = \frac{1}{3}$.
- Estes equilíbrios e também os de estratégia pura podem ser obtidos no diagrama de melhor resposta.

Jogos - Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

- No caso do dilema dos prisioneiros, não há equilíbrio de Nash com estratégias mistas.
- Isso pode ser visto no diagrama.

Jogos - Estratégias Mistas - Eliminação Iterada de Estratégias Dominadas

Pode-se eliminar estratégias dominadas por loterias.

Exemplo:

		M		
		L	B	T
H	L	$2,1$	$0,0$	$-1,\frac{1}{3}$
	B	$0,0$	$1,2$	$-2,\frac{1}{2}$
	T	$\frac{1}{2},-2$	$\frac{1}{3},-1$	$-2,5$

Jogos Sequenciais - Forma Extensiva

Jogos que incluem uma sequência de eventos ao longo do tempo. Representação em forma de árvore (Forma Extensiva). Ingredientes de um jogo na forma extensiva:

- Nós: há um nó inicial, onde começa o jogo, e uma sequência de nós que descrevem a sequência de eventos ao longo do tempo.
- A cada nó (exceto nós finais), está associado a um único jogador e a um conjunto de ações possíveis para este jogador.
- Conjuntos de informação: conjunto de nós. Agente "não sabe" em qual nó se encontra em cada conjunto de informação ao tomar suas ações. A cada nó em um dado conjunto de informação está associado um único conjunto de ações. Um conjunto de informação constituído por um único nó é chamado de nó isolado.
- Nós finais, associados a uma trajetória completa. A cada nó final associa-se um conjunto de payoffs para cada jogador.

Jogos Sequenciais - Forma Extensiva

- No contexto de jogos sequenciais, uma estratégia é uma descrição da ação tomada (possivelmente uma loteria) a cada conjunto de informação.
- Isso DEVE incluir conjuntos de informação que nunca serão atingidos.
- Todo jogo na forma normal pode ser expresso na forma extensiva.
- Jogadas simultâneas implicam que im dos jogadores tem mais de um nó em um conjunto de informação (a ação do outro jogador ainda não foi consumada no momento da tomada de decisão).

Exemplo: Batalha dos sexos.

- No formato usual do jogo, há um único conjunto de informação associado a cada jogador. O primeiro joga em um nó isolado, e o segundo em um conjunto de informação com dois nós. Para cada jogador, há duas estratégias possíveis, L e B.

Jogos Sequenciais - Forma Extensiva

- Pode-se reformular o jogo com a mulher decidindo antes, e o homem decidindo em seguida.
- Neste caso, a mulher tem apenas o nó inicial, com duas ações, L e B.
- O homem tem dois conjuntos de informação, com pontos isolados. O primeiro é atingido quando a mulher joga L e o segundo quando ela joga B.
- Uma estratégia é uma descrição do que ele faz em cada conjunto de informações. Assim temos 4 estratégias possíveis para o homem: LL, LB, BL e BB. (LB, por exemplo, pode ser interpretado como: jogar L se a Mulher joga L, e B caso ela jogue B.

Este jogo tem a seguinte representação na forma normal:

		H			
		LL	LB	BL	BB
M	L	$1,2$	$1,2$	$0,0$	$0,0$
	B	$0,0$	$2,1$	$0,0$	$2,1$

- Há 3 equilíbrios de Nash: $(L, LL), (B, LB), (B, BB)$.
- No Equilíbrio (L, LL) é ótimo para mulher jogar L apenas porque o homem se "compromete" a jogar L caso a mulher joqgue B. Isso parece fazer pouco sentido do ponto de vista sequencial. Esta promessa é o que se chama de "ameaça não crível".
- Racionalidade sequencial é introduzida a partir do conceito de "subjogo".

Jogos Sequenciais - Forma Extensiva

- Definição: Dado um jogo na forma extensiva, um subjogo é um jogo que começa em um nó isolado da árvore.
- Uma árvore que tenha n nós isolados terá n subjogos.

No exemplo da batalha dos sexos sequenciais, há 3 subjogos:

- Subjogo 1: o jogo inteiro.
- Subjogo 2: $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & B \end{array} \\ M & L \begin{array}{cc} 1,2 & 0,0 \end{array} \end{array} \Longrightarrow$ Equilíbrio de Nash é L, L.
- Subjogo 3: $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & B \end{array} \\ M & B \begin{array}{cc} 0,0 & 2,1 \end{array} \end{array} \Longrightarrow$ Equilíbrio de Nash é B, B.

Refinamento : Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Um equilíbrio de Nash é perfeito em subjogos caso ele seja um equilíbrio de Nash em todos os subjogos.

- No exemplo acima, o único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é B, LB. A mulher tem vantagem por ser a primeira a se mover (first mover).
- O equilíbrio de Nash perfeito em subjogos pode ser obtido percorrendo-se a árvore de trás para frente (backward induction)

Jogos Sequenciais - Indução Retroativa

Equilíbrio de Nash Perfeiro em Subjogos pode ser obtido a partir de indução retroativa, seguindo o seguinte procedimento:

- Encontra-se equilíbrio de Nash nos subjogos finais da árvore.
- Reduz-se o jogo, eliminando os subdogos finais e associando-se aos nós em que eles começam o payoff resultante de um equilíbrio de Nash.
- Resolve-se os últimos subjogos do jogo remanescente, substituindo-se novamente estes subjogos pelos payoffs resultantes de um equilíbrio Nash.
- Procede-se desta maneira até que se alcance o início da árvore original. As estratégias resultantes comporão um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Jogos Sequenciais - Exemplos

Exemplos:

- Batalha dos sexos sequencial. O primeiro a jogar tem vantagem.
- Par ou ímpar com escolha inicial. Infinitos equilíbrios de Nash.
- Banco emprestando - problema de comprometimento
  1. Sem custo de inadimplência para o tomador. Não há empréstimo.
  2. Com juiz viesado para proteger o tomador. Não há empréstimo. Questão de direito comum versus direito romano.
  3. Com custo de processar. Pode não haver crédito se o custo for alto.
  4. Com um departamento de advogados independentes, que ganham para processar. Pode haver empréstimo.

Jogos Repetidos - Finitas Repetições

No dilema dos prisioneiros equilíbrio é ruim para ambos. Não há cooperação (que seria não confessar)
Questão: será que a repetição de um jogo pode gerar cooperação?
Jogos repetidos:

- Parte-se um certo jogo estático (não sequencial).
- Repete-se N vezes o mesmo jogo.
- Payoff de cada jogador no jogo repetido é dado pela média de payoffs em cada repetição.

Jogos Repetidos - Finitas Repetições

Questão: será que a repetição de um jogo pode gerar cooperação em um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos?
Respostas:

- Se há um único equilíbrio de Nash no jogo estático, jogo dinâmico apresentará a repetição deste equilíbrio como o único Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos (exemplo: Dilema dos Prisioneiro). Obs.: Este resultado pode mudar com infinitas repetições.
- Com mais de um equilíbrio de Nash no jogo estático, pode haver emergência de cooperação induzida por repetição.

Exemplo de jogo em que cooperação pode emergir da repetição:

	A	B	C
A	$4,4$	$0,5$	$0,0$
B	$5,0$	$1,1$	$0,0$
C	$0,0$	$0,0$	$3,3$

Jogos Repetidos - Finitas Repetições

A seguinte estratégia é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos do jogo repetido duas vezes:

- Joga-se A inicialmente.
- Joga-se C na segunda rodada caso A tenha sido jogado por ambos na primeira rodada.
- Joga-se B na segunda rodada caso algum jogador tenha jogado algo diferente de A na primeira rodada.
- Chama-se este tipo de estratégia de "Grim Trigger".

Definições:
Payoff factível: payoff que pode ser obtido por alguma estratégia conjunta mista.
Payoff minmax do jogador I: é o menor payoff que pode ser garantido por I (independentemente da estratégia dos demais) caso ele responda ótimamente às estratégias dos demais. No caso acima, caso o jogador 2 jogue A, a melhor resposta do jogador 1 gera payoff 5. Caso 2 jogue B a melhor resposta gera payoff 1. Caso 2 jogue C a melhor resposta gera 3. O payoff minmax é o mínimo entre estes payoffs, ou seja, é neste caso é igual a 1.

Folk Theorem I (Teorema Popular para Jogos Finitamente Repetidos): Considere um jogo estático com múltiplos equilíbrios de Nash em que nenhum jogador tem o mesmo payoff em todos os equilíbrios. Qualquer payoff factível maior do que o minmax de estratégias puras para todos os jogadores pode ser arbitrariamente aproximado por um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos caso o número de repetições do jogo seja suficientemente grande.

Jogos Repetidos - Infinitas Repetições

Jogos repetidos infinitas vezes:
Jogos repetidos:

- Parte-se um certo jogo estático (não sequencial).
- O jogo é repetido infinitas vezes.
- Payoff de cada jogador no jogo repetido é dado por uma média descontada por um fator $\delta \in (0,1)$. O fator δ é chamado de taxa de desconto intertemporal. O payoff de $i$no jogo repetido dada a sequência de ações $p_1, p_2, p_3, ...$ (sendo p_ta estratégia conjunta no instante t) é:
  $U^i(p_1, p_2, p_3, ...) = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u^i(p_t)$, em que $u^i(p)$ é o paypff de i no jogo estático dada a estratégia conjunta p.

Jogos Repetidos - Infinitas Repetições

Exemplo: cooperação em dilema dos prisioneiros. Considere a seguinte estratégia conjunta em um dilema dos prisioneiros repetido infinitas vezes:

- Não confessar caso nenhum dos jogadores tenha jamais confessado.
- Confessar caso alguém já tenha nonfessado.
- Estratégia do tipo "Grim Trigger".
- Esta estratégia é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Jogos Repetidos - Infinitas Repetições

- Com efeito, caso ninguém jamais tenha desviado, o payoff de não confessar é: $U^i = (1-\delta)(2+\delta 2+\delta^2 2+...) = 2$.
- O maior possível payoff ao desviar e confessar é: $U^i = (1-\delta)(3+\delta 1+\delta^2 1+...) = (1-\delta)3+\delta = 3-\delta 2$.
- Se $\delta > \frac{1}{2}$, desviar gera um payoff menor do que não desviar.
- Por outro lado, obviamente, caso alguém já tenha desviado a melhor resposta sempre é desviar.

Folk Teorem II (Teorema Popular para Jogos Infinitamente Repetidos): Considere um jogo estático repetido infinitas vezes com fator de desconto δ. Qualquer payoff factível maior do que o minmax de estratégias puras para todos os jogadores pode ser obtido em um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos caso δ seja suficientemente grande.

Oligopólio

Oligopólio:

- Há um conjunto finito de firmas, normalmente não muito grande.

1. Caso cooperativo: Cartel.
   - Firmas maximizam o seu excedente total dividem o lucro.
   - Produção e preço no setor cartelizado é determinado como em um monopólio.
   - Divisão do lucros entre firmas segue um processo de barganha (jogos cooperativos)
2. Caso não cooperativo:
   - Aplicação de teoria dos jogos, pois há interação estratégica.
   - Usa-se um contínuo de estratégias. Trata-se de um exemplo de jogos contínuos. Conceito relevante normalmente é equilíbrio de Nash.
   - Exemplos: Bertrand, Cournot e Stackelberg.

Oligopólio - Bertrand

Betrand - caso padrão: há duas firmas, 1 e 2, com estruturas de custo idêncidas e produzem um bem homogêneo. Variável de escolha de cada firma (ou estratégia) é o preço.

- Custo marginal de produção é igual ao custo médio, igual a c.
- Demanda pelo bem é dada por $Q(p)$, com $Q' < 0$.
- Firma com preço menor absorve toda demanda. Assim, se $p_1 < p_2$, a demanda pela produção da firma 1 é $Q_1 = Q(p_1)$e pela da firma 2 é zero.
- Se $p_1 = p_2 = p$ firmas dividem o mercado igualmente $\Longrightarrow$ $Q_1 = Q_2 = \frac{Q(p)}{2}$.

Oligopólio - Bertrand

- Dadas as condições acima, cada firma escolhe o preço de maneira a maximizar o lucro, que é $\Pi_i = p_i Q_i - cQ_i$.
- O único equilíbrio de Nash possível é $p_1 = p_2 = c$, com lucro igual a zero.
- Solução é idêntica ao caso competitivo. Mesmo com apenas duas firmas, ausência de cooperação entre as firmas pode gerar reswultado semelhante ao competitivo.

Oligopólio - Bertrand

Curiosidade técnica : suponha que $c_1 \neq c_2$.

- Não há equilíbrio de Nash.
- Jogos com espaço contínuo de estratégias pode não ter equilíbrio de Nash.
- Caso o conjunto de escolhas seja discreto (por exemplo, de centavo em centavo) haverá equilíbrio de Nash (exercício).

Oligopólio - Cournot

Firmas produzem um bem homogêneo. Variável de escolha das firmas é a quantidade produzida. Preço é determinado pela demanda inversa. Caso padrão:

- Há N firmas idênticas, com custo total igual a o custo marginal igual a c. A firma n escohe a quantidade a ser produzida, q_n.
- Preço é dado por: $P = P(q_1 + ... + q_N)$, sendo P a função de demanda inversa.

Oligopólio - Cournot

O problema da firma n é:

$$\max_{q_i} P(q_1 + ... + q_n + ... + q_N)q_n - cq_n.$$

Condição de primeira ordem:

$$P'(q_1 + ... + q_n + ... + q_N)q_n + P(q_1 + ... + q_n + ... + q_N) = c$$

Denotando-se $Q \equiv \sum_{n=1}^{N} q_n$ temos $P'(Q)q_n + P(Q) = c$.
Claramente o equilíbrio de Nash é simétrico, com
$q_1 = q_2 = ... = q_N = \frac{Q}{N}$.
Temos então que:

$$P = c - \frac{P'(Q)}{N}Q.$$

Quanto maior for N mais próximo se está da solução competitiva.

Oligopólio - Cournot

Como definir se o mundo é Bertrand ou Cournot?

- Caso capacidade trenha que ser definida com antecedência, Cournot prevalece.
- Isso pode ser visto em um jogo sequencial com 2 momentos, determinação de capacidade antes e em seguida determinação de preços [Krepps e Scheinkman (1983)].

Oligopólio - Exemplo

Exemplo:

- Custo marginal de produção igual a custo médio igual a c.
- Demanda inversa: $P(Q) = a - Q$
  - Em Bertrand simples, teríamos: $P(Q) = c \Longrightarrow Q = a - c$.
  - Em Cartel teríamos: $P'(Q)Q + P(Q) = c \Longrightarrow Q = \frac{a-c}{2}$.

Oligopólio - Exemplo

Em Cournot:

- $\Pi_1 = (a - Q)q_1 - q_1 c = (a - q_1 - q_2)q_1 - q_1 c.$
  $\Pi_2 = (a - Q)q_2 - q_2 c = (a - q_1 - q_2)q_2 - q_2 c.$
- CPOs são: $a - 2q_1 - q_2 - c = 0$; $a - 2q_2 - q_1 - c = 0$.
- Respostas ótimas são: $q_1 = \frac{a - q_2 - c}{2}$, $q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2}$.
- Substituindo uma equação na outra obtemos o equilíbrio de Nash: $q_1 = \frac{a-c}{2} - \frac{a - q_1 - c}{4} \Longrightarrow \frac{3}{4} q_1 = \frac{a-c}{2} \Longrightarrow q_1 = \frac{a-c}{3}$.
  Analogamente, $q_2 = \frac{a-c}{3}$.Temos portanto que $Q = 2\frac{a-c}{3}$.

Oligopólio - Bertrand com Diferenciação de Produtos

Com diferenciação de produto, firma com o preço mais baixo não necessariamente absorve todo o mercado.

Exemplo:

$$q_i = a_i - p_i + \frac{p_j}{2}.$$

$$\Pi_i = p_i \left(a_i - p_i + -\frac{p_j}{2} \right) - C_i(q_i).$$

Com custo zero:

$$\Pi_i = p_i \left(a_i - p_i + \frac{p_j}{2} \right).$$

C.P.O.:

$$a_i - 2p_i + \frac{p_j}{2} = 0$$

No equilíbrio de Nash temos

$$p_i = \frac{8}{15} a_i + \frac{2}{15} a_j$$

Oligopólio - Bertrand com Diferenciação: Hotteling

Aplicação - Modelo de Hotteling:

- Praia que se estende de um ponto 0 a um ponto L.
- Sorvete é produzido com custo zero, por duas firmas, A e B, instaladas ao longo da praia (nos pontos a e b).
- Consumidores estão uniformemente distribuídos ao longo da praia, com densidade 1.
- Ao percorrer a distância d, sorvete tem um desgaste de td^2, sendo t uma constante.
- Custo ao consumidor é $p_i + td^2$, sendo p_io preço pago por ele.

Oligopólio - Bertrand com Diferenciação: Hotteling

- Firmas estabelecem preços, p_A e P_B (Bertrand).
- Localização x que torna agentes indiferentes satisfaz $p_A + t\,(x-a)^2 = p_B + t\,(x-b)^2 \Longrightarrow p_A + t(x^2 - 2ax + a^2) = p_B + t(x^2 - 2bx + b^2) \Longrightarrow p_A + t(2b-2a)x + ta^2 = p_B + tb^2 \Longrightarrow x = \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{t(b^2-a^2)}{2t(b-a)} = = \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{(b+a)}{2}$.
- Temos portanto $q_A(p_A, p_B) = \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{(b+a)}{2}$, $q_B(p_A, p_B) = L - \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} - \frac{(b+a)}{2}$

Oligopólio - Bertrand com Diferenciação: Hotteling

- Firmas escolhem p_A e p_A para maximizar, respectivamente, $\Pi_A = q_A(p_A, p_B)p_A$ e $\Pi_B = q_B(p_A, p_B)p_B$.
- Equilíbrio de Nash:

$$p_A^* = \frac{t}{3}(b-a)(2L+a+b)$$

$$p_B^* = \frac{t}{3}(b-a)(4L-a-b)$$

Oligopólio - Coalisão Tácita

Repetição de jogo pode gerar cooperação como um equilíbrio de Nash. No caso de oligopólio, cooperação significa comportamento de cartel, com maximização do lucro do conjunto de firmas. Considere o exemplo utilizado anteriormente: $P(Q) = a - Q$, e custo marginal constante igual a c.

- Uma possibilidade é as firmas tomarem ações que maximizam o lucro agregado e, em seguida, dividirem igualmente o lucro.
- Maximização de lucro no setor (lucro de cartel) é dado por $Q = \frac{a-c}{2}$, $P = \frac{a+c}{2}$.

Oligopólio - Coalisão Tácita - Bertrand

- Sob Bertrand, lucro é zero no equilíbrio de Nash.
- Sob cooperação, o lucro de cada firma será $\Pi_i = \frac{\Pi_M}{2}$, sendo que Π_M é o lucro de monopólio.

Considere a seguinte estratégia:

- Adota-se $P = \frac{a-c}{2}$ caso ambas firmas jamais tenham adotado um preço diferente deste.
- Adota-se $P = c$ caso contrário.

Caso $\delta \geq \frac{1}{2}$esta estratégia é um equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos. Com efeito, se uma firma desvia hoje, ela pode conseguir um lucro próximo a Π_M hoje, mas nos próximos períodos seu lucro será zero. Se a firma não desvia, seu payoff será $\frac{\Pi_M}{2} + \delta\frac{\Pi_M}{2} + \delta^2\frac{\Pi_M}{2} + \delta^3\frac{\Pi_M}{2} + ... = \frac{\Pi_M}{2(1-\delta)}$. Não há ganho em desviar se $\Pi_M \leq \frac{\Pi_M}{2(1-\delta)} \Longrightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$.

Oligopólio - Coalisão Tácita - Cournot

Para o caso de Cournot, por simplicidade, (apenas para ilustrar com um exemplo), suponha $c = 0$.

- O lucro de monopólio é $\Pi_M = \frac{a^2}{4}$, e o lucro no equilíbrio da coalisão (semelhante a cartel) é $\frac{\Pi_M}{2} = \frac{a^2}{8}$.
- Para isto, ambas as firmas jogam $q_i = \frac{a}{4}$, pois $Q = \frac{a}{2}$.
- No entanto, a melhor resposta dado q_j é $q_i = \frac{a-q_j}{2}$. Dada a quantidade cooperativa, temos que um desvio gera $q_i = \frac{3}{8}a$. O lucro desta firma fica $\frac{9}{64}a^2$.
- Por outro lado, sob Cournot, $q_i = \frac{a}{3}$, o que implica que o lucro é $\frac{a^2}{9}$.

Equilíbrio de Nash conjecturado sob coalisão:

- Joga-se $q_i = \frac{a}{4}$ caso ninguém tenha desviado.
- Caso alguém tenha desviado, joga-sea quantidade de cournot $\left(q_i = \frac{a}{3}\right)$.

Esta estratégia conjunta é um equilíbrio de Nash caso δ seja suficientemente alto. Com efeito, não há incentivos para desviar caso $\frac{a^2}{8(1-\delta)} \geq \frac{9}{64}a^2 + \delta\frac{a^2}{9(1-\delta)} \Longrightarrow \frac{1}{8} \geq \frac{9}{64}(1-\delta) + \delta\frac{1}{9}$. Isso será válido caso δesteja suficientemente próximo de 1 (note que temos uma média ponderada entre $\frac{9}{64}$ e $\frac{1}{9}$.

Oligopólio - Liderança de Preços - Stackelberg

- Uma vez feitos investimentos, pode ser impossível revertê-los e recuperar os custos (sunk costs). Isto gera a possibilidade de uma firma comprometer-se com um crto nível de produção.
- Neste caso, a firma que entra inicialmente tem vantagem.
- Isto é captado pelo modelo de Stackelberg.
- Stackelberg: um modelo do tipo Cournot em que uma firma entra antes e, em seguida, entra(m) outra(s) firmas.
- Firma líder (que entra antes, as vezes chamada de líder ou incumbente) antecipa a entrada e a resposta da outra e, com base nisso otimiza.

Oligopólio - Liderança de Preços - Stackelberg

Considere o exemplo acima, com $P(Q) = a - Q$ e $c = 0$.

- Suponhamos que a primeira firma a entrar seja a firma 1, e que ela escolha q_1.
- A firma 2 responderá ótimamente, adotando $q_2 = \frac{a-q_1}{2}$.
- A firma 1 antecipa isso, e sabe que seu lucro será:$\Pi_1 = (a - q_1 - q_2)q_1 = \left(a - q_1 - \frac{a-q_1}{2}\right) q_1 = \frac{aq_1 - q_1^2}{2}$.
- Escolha maximizadora de $q_1$gera $q_1 = \frac{a}{2}$. Lucro será $\frac{a^2}{8}$, menor que o de monopólio.

Exemplo: $P(Q) = 120 - Q$.

- Suponha que haja um custo fixo de entrada de K_2.
- Lucro da firma 2 é maximizado com $q_2 = \frac{120-q_1}{2}$.
- Lucro da firma 2 será: $\Pi_2 = \left(\frac{120-q_1}{2}\right)^2 - K_2$.
- q_1 mínimo que barra a entrada é: $q_1^{det} = 120 - 2(K_2)^{0.5}$
- Lucro resultante para a firma 1 é:
  $\Pi_1^{det} = 2(K_2)^{0.5}\left(120 - 2(K_2)^{0.5}\right)$

Oligopólio - Liderança de Preços - Contenção de Entrada

- Sem contenção de entrada lucro é $\frac{120^2}{8} = 1800$.
- K_2 a partir do qual há contenção de entrada é dado pela solução de $2(K_2)^{0.5}\left(120 - 2(K_2)^{0.5}\right) = 1800$.
- Denotando $x \equiv 2(K_2)^{0.5}$, esta equação fica $x^2 - 120x + 1800 = 0$.
- $\triangle = 14400 - 7200 = 7200$
- Na solução, $x = \frac{120 \pm 7200^{0.5}}{2}$.
- Toma-se a menor raiz, que é aproximadamente 17.6.
- Assim, $K_2 \simeq \left(\frac{17.6}{2}\right)^2 \simeq 77$.
- A partir deste valor de K_2haverá bloqueio à entrada.

Assimetria de Informação

Compreende especialmente dois casos:

- Em uma negociação ou contrato, uma das partes tem informação privada sobre seu tipo: seleção adversa.
- Em uma negociação ou contrato, uma das partes tem informação privada sobre suas ações: risco moral.

Assimetria de Informação - Seleção Adversa

Mercado de limões (carros com problemas), modelo de Akerlof.

- Qualidade dos carros q distribuída uniformemente entre 0 e T (ou seja, $f(q) = \frac{1}{T}$, $F(q) = \frac{q}{T}$.
- Valor dos carros para os vendedores: q.
- Valor dos carros para os compradores: $q + b$.
- Se o preço dos carros for p, apenas carros com $q \leq p$ serão vendidos.
- Isso implica que a qualidade esperada dos carros para o comprador é $E(q|q \leq p) = \int_0^p \frac{f(q)q}{F(p)} dq = \frac{p}{2}$.
- Preço de compra será $\frac{p}{2} + b = p \Longrightarrow p = 2b$.
- Apenas uma fração $\frac{2b}{T}$ será vendida. Esta fração é coposta justamente pelos carros de pior qualidade.

Assimetria de Informação - Seleção Adversa

Exemplos de seleção adversa.

- Seguros.
- Crédito em um ambiente de crise.
- Crédito para projetos (Stiglitz e Weiss, 1981).

Assimetria de Informação - Seleção Adversa

É possível gerar melhoras em relação ao modelo simples de seleção? Sim, cado tipos diferentes obtenham contratos diferentes. Isso ocorre fundamentalmente de duas maneiras:

1. Screening: parte desinformada oferece um contrato distinto para cada tipo.
2. Sinalização: parte informada "sinaliza" seu tipo ao oferecer um contrato.

Assimetria de Informação - Seleção Adversa - Modelo Principal-Agente

Metodologia para resolver problema de screening: Modelo principal-agente.

- Principal, normalmente a parte não informada, oferece o contrato ao agente (a parte informada).
- Agentes devem ter incentivo para aceitar o contrato (restrição de participação).
- Agentes devme ter incentivo para aceitar contrato desenhado para seu próprio tipo (restrição de incentivo). Aqui usa-se o chamado princípio da revelação.

Trata-se de um problema de Pareto com restrições adicionais de incentivo. A solução para um problema deste tipo é comumente chamada de "second-best", em oposição ao problema de pareto usual, normalmete chamado de "first-best".

Assimetria de Informação - Seleção Adversa - Modelo Principal-Agente

Exemplo: caso geral de discriminação de preços de segund grau. Suponha $c = 0$, e as seguintes demandas para os tipos 1 e 2: $p_1 = a_1 - q_1$, $p_2 = a_2 - q_2$. O total pago por i é P_i.

- Utilidade do consumo do consumidor i é $\frac{a_i^2}{2} - \frac{(a_i - q_i)^2}{2}$.
- A restrição de participação de i é $\frac{a_i^2}{2} - \frac{(a_i - q_i)^2}{2} \geq P_i$
- A restrição de incentivo de i é $\frac{a_i^2}{2} - \frac{(a_i - q_i)^2}{2} - P_i \geq \frac{a_i^2}{2} - \frac{(a_i - q_j)^2}{2} - P_j$.

O problema do monopolista fica:

$$\max_{q_1,q_2,P_1,P_2} P_1 + P_2$$

s.a.

$$\frac{a_1^2}{2} - \frac{(a_1 - q_1)^2}{2} \geq P_1,$$

$$\frac{a_2^2}{2} - \frac{(a_2 - q_2)^2}{2} \geq P_2,$$

$$\frac{a_1^2}{2} - \frac{(a_1 - q_1)^2}{2} - P_1 \geq \frac{a_1^2}{2} - \frac{(a_1 - q_2)^2}{2} - P_2,$$
$$\frac{a_2^2}{2} - \frac{(a_2 - q_2)^2}{2} - P_2 \geq \frac{a_2^2}{2} - \frac{(a_2 - q_1)^2}{2} - P_1,$$

Assimetria de Informação - Seleção Adversa - Modelo Principal-Agente

Suponha que $a_1 > a_2$. Proposições:

- Restrição de participação é ativa apenas para 2.
- Restrição de incentivo é ativa apenas para 1.

O problema fica então:

$$\max_{q_1,q_2,P_1,P_2} P_1 + P_2$$

s.a.

$$\frac{a_2^2}{2} - \frac{(a_2 - q_2)^2}{2} = P_2,$$

$$\frac{(a_1 - q_1)^2}{2} + P_1 = \frac{(a_1 - q_2)^2}{2} + P_2,$$

Assimetria de Informação - Seleção Adversa - Modelo Principal-Agente

CPOs:
$P_1 : \gamma_2 = 1;\ P_2 : \gamma_1 - \gamma_2 = 1;$
$q_1 : a_1 = q_1; q_2 : \gamma_1(a_2 - q_2) = \gamma_2(a_1 - q_2)$
$\Longrightarrow q_2 : 2(a_2 - q_2) = (a_1 - q_2)$. Esta é a solução que derivamos graficamente.

Modelo simplificado de Spence. Há 2 tipos de indivíduos: tipo 1 menos produtivo, e tipo 2, mais produtivo.

- Produto marginal do tipo 1 é a_1 e do tipo 2 é a_2, sendo que $a_1 < a_2$.
- Fração do tipo 1 na população é $1 - b$ e a do tipo 2 é b.
- Caso possa-se distinguir os tpos, o salário do tipo 1 será a_1 e o do tipo 2 será a_2.
- Caso não se possa distinguir os tipos, o salário de ambos será $(1 - b)a_1 + ba_2$.

Suponha que haja indivíduos possam investir em educação. Um nível de educação e custa ec_1 para um indivíduo do tipo 1 e ec_2 para um indivíduo do tipo 2, sendo que $c_2 < c_1$ (tipo mais talentoso consegue se educar a um custo menor. Considere e^* tal que $\frac{a_2 - a_1}{c_1} < e^* < \frac{a_2 - a_1}{c_2}$. Suponhamos que quem adote educação e^* receba salário a_2 e os demais recebam salário a_1.

- Temos que: $a_2 - e^* c_1 < a_1$, ou seja, tipo 1 não tem interesse em estudar.
- Adicionalmente: $a_2 - e^* c_2 > a_1$, ou seja, tipo 2 prefere estudar a não estudar.
- Como apenas tipo 2 estuda, salários equivalem ao produto marginal de cada tipo, e portanto são sustentáveis em equilíbrio.

Há 2 tipos de equilíbrio (que são equilíbrios de Nash):

- Equilíbrio com salários distintos é chamado equilíbrio com separação, e o com um único salário é chamado de equilíbrio com pooling.
- Note-se que se b for suficientemente pequeno, este equilíbrio é melhor para o tipo 2 do que o equilíbrio sem separação de tipos.

Assimetria de Informação - Risco Moral

- Assimetria está na não observabilidade de ações por um dos participantes.
- Normalmente usa-se uma formulação de principal-agente, sendo que a parte não informada é o segurador.
- Exemplo padrão: seguros. Principal é neutro ao risco e agente é avesso ao risco. Idealmente, haveria provisão de seguro perfeito ao agente. No entanto, isto desestimula esforço alto.

Assimetria de Informação - Risco Moral - Exemplo Simples de Seguros

- Agente é contratado por principal e faz esforço. Há 2 níveis de esforço, alto e baixo e_He e_L, sendo que $e_H > e_L$.
- Nível de produção pode ser alto, y_H, (sucesso) ou baixo, y_L, (fracasso).
- Probabilidade de sucesso aumenta com esforço: $Pr(y_H|e_H) > Pr(y_H|e_L)$. Note-se que, dado e, $Pr(y_H|e) = 1 - Pr(y_L|e)$.
- Principal está interessado em maximizar lucro esperado dada uma restrição de participação do agente. Ele oferece consumo ao agente como função do produto. Na prática, oferece c_H no caso de sucesso e $c_L$no caso de fracasso.
- Utilidade Bernoulli do agente é dada por $u(c, e) = v(c) - e$, sendo v uma função crescente e côncava (pois há aversão ao risco).

Assimetria de Informação - Risco Moral - Exemplo Simples de Seguros

Problema fica:

$$\max_{e,c_H,c_L} Pr\left(y_H|e\right)\left(y_H - c_H\right) + Pr\left(y_L|e\right)\left(y_L - c_L\right)$$

s.a.

$$Pr\left(y_H|e\right)v\left(c_H\right) + Pr\left(y_L|e\right)v\left(c_L\right) - e \geq \bar{u}, \text{ (Restrição de Part.)}$$

$$Pr\left(y_H|e\right)v\left(c_H\right) + Pr\left(y_L|e\right)v\left(c_L\right) - e \geq$$
$$Pr\left(y_H|\bar{e}\right)v\left(c_H\right) + Pr\left(y_L|\bar{e}\right)v\left(c_L\right) - \bar{e}, \forall \bar{e}. \text{ (Restrições de Incentivo)}$$

Assimetria de Informação - Risco Moral - Exemplo Simples de Seguro

Suponha que as restrições de incentivo não sejam ativas. O pronblema fica:

$$\max_{e,c_H,c_L} Pr(y_H|e)(y_H - c_H) + Pr(y_L|e)(y_L - c_L)$$

s.a.

$$Pr(y_H|e)\,v(c_H) + Pr(y_L|e)\,v(c_L) - e = \bar{u}.$$

- Dado e, as C.P.O.s ficam: $Pr(y_H|e)(v'(c_H)\lambda - 1) = 0$ e $Pr(y_L|e)(v'(c_L)\lambda - 1)$.
- Sendo $v' > 0$ e $v'' < 0$, isso implica que $c_H = c_L$. Há seguro perfeito $\Longrightarrow Pr(y_H|e)\,v(c_H) + Pr(y_L|e)\,v(c_L) = Pr(y_H|\bar{e})\,v(c_H) + Pr(y_L|\bar{e})\,v(c_L)$.

Assimetria de Informação - Risco Moral - Exemplo Simples de Seguro

- Se $e = e_L$, esta condição restrição de incentivo será atendida.
- Se $e = e_H$, condição de incentivo não é atendida. No caso de esforço alto, condição de incentivo será ativa, ou seja,

$$Pr(y_H|e_H)\,v(c_H) + (1 - Pr(y_H|e_H))\,v(c_L) - e_H =$$
$$Pr(y_H|e_L)\,v(c_H) + (1 - Pr(y_H|e_L))\,v(c_L) - e_L \Longrightarrow$$

$$(Pr(y_H|e_H) - Pr(y_H|e_L))(v(c_H) - v(c_L)) = e_H - e_L.$$

Isso implica que $c_H > c_L$, ou seja, não há seguro perfeito.

Assimetria de Informação - Risco Moral - Exemplo Simples de Seguro

Passos para a solução:

1. Resolve-se o problema para esforço baixo.
2. Resolve-se o problema para esforço alto.
3. Escolhe-se o nível de esforço que maximiza o lucro.

- Sempre que o esforço ótimo não for o mínimo, restrição de incentivo será ativa e não haverá seguro perfeito.