

# Mecânica Quântica — 7600022

Quarta Lista — para praticar para a prova do dia 26/9/2017

Nesta lista, o estado fundamental do oscilador harmônico, com energia  $\hbar\omega/2$ , será denotado  $|0\rangle$ , o primeiro estado excitado será denotado  $|1\rangle$  e assim por diante.

1. Quando o operador *de abaixamento*  $a$  age sobre um autoestado  $|n\rangle$  do Hamiltoniano do oscilador harmônico, o resultado é proporcional a  $|n-1\rangle$ . Encontre a constante de proporcionalidade. *Dica: chame  $a|n\rangle$  de  $|\alpha\rangle$ , e calcule  $\langle\alpha|\alpha\rangle$ .*
2. Quando o operador *de levantamento*  $a^\dagger$  age sobre um autoestado  $|n\rangle$  do Hamiltoniano do oscilador harmônico, o resultado é proporcional a  $|n+1\rangle$ . Encontre a constante de proporcionalidade. *Dica: chame  $a^\dagger|n\rangle$  de  $|\beta\rangle$ , e calcule  $\langle\beta|\beta\rangle$  com ajuda da igualdade  $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$ .*
3. Calcule o valor médio esperado  $\langle n|X|n\rangle$ 
  - (a) Com base em argumentos gerais, sem fazer contas;
  - (b) Calculando o elemento de matriz a partir da igualdade

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger).$$

4. Calcule o valor médio esperado  $\langle n|X^2|n\rangle$
5. Calcule o valor médio esperado  $\langle n|P^2|n\rangle$ , a partir da igualdade

$$P = \frac{\hbar}{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(a - a^\dagger).$$

6. A função de onda do estado fundamental ( $|0\rangle$ ) do oscilador harmônico é

$$\phi_0(x) = \alpha e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.$$

Encontre a constante de normalização  $\alpha$ . É dado que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

7. Sabe-se que a energia de um autoestado qualquer do Hamiltoniano do oscilador harmônico se divide igualmente entre energia cinética e energia potencial. Aproveite essa informação para calcular o valor médio esperado  $\langle n|X^2|n\rangle$ . Para conferir o resultado, escolha  $n = 0$  e compare com o resultado da questão 4.
8. Calcule o valor médio esperado  $\langle n|P^2|n\rangle$ .
9. Encontre a função de onda associada ao primeiro estado excitado ( $|1\rangle$ ), inclusive constante de normalização.
10. Um elétron está sujeito ao potencial de um oscilador harmônico com frequência  $\omega$ . No instante  $t = 0$ , o elétron está no estado quântico dado pela igualdade

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

- (a) Desenhe esquematicamente a função de onda  $\psi(x, t = 0)$ ;
- (b) Encontre  $|\psi\rangle_t$ ;
- (c) Encontre o valor médio esperado  ${}_t\langle\psi|X|\psi\rangle_t$ . *Dica: empregue a igualdade no problema 3(b).*