Nome:____ N. USP:______________

Física II: Prova I

- Não adianta apresentar contas sem uma discussão mínima sobre o problema. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Defina claramente seu referencial cartesiano.
- Use caneta para as respostas finais das questões. Conteúdo a lápis não será considerado na hora da revisão.
- Não é permitido o uso de celulares.

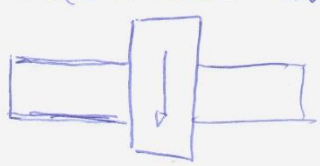
1) Nos filmes de ficção científica, como Star Trek e Star Wars, existe gravidade nas espaçonaves; contudo seu mecanismo de funcionamento nunca é explicado. Uma versão mais realista de "gravidade artificial" foi proposta nos filmes "2001: Uma Odisseia no Espaço" de 1968 e "Passageiros" de 2016, a qual baseia-se em rotação. Assim pede-se:

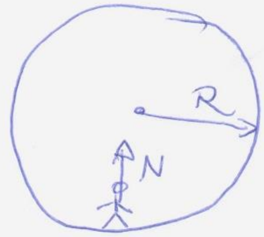
a) Explique como e porque esta proposta funciona. (0.7 pontos)

b) Considere um astronauta com 80Kg de massa e 1.8 m de altura. Proponha uma nave real que possa produzir uma gravidade artificial similar à da Terra para uma viagem até Júpiter. Considere que o centro de massa do astronauta encontrar-se na metade da sua altura e a gravidade atua em seu centro de massa. (1.5 pontos)

c) Neste sistema, a "gravidade" depende do raio associado a rotação. Desta forma, a gravidade varia da cabeça aos pés do astronauta. Qual deveria ser o raio de rotação para que esta diferença seja de 1%? (0.3 pontos)

a) A espaçonave precisa ter um compartimento cilíndrico de Raio R, que gira com uma Velocidade angular ω constante





A força normal do compartimento sobre o astronauta que é responsável pela força centrípeta, que mante-o em movimento circular uniforme. Como o astronauta está em um referencial não inercial, ~~s~~ ele Ve a força centrifuga. Esta que representa sua gravidade artificial.

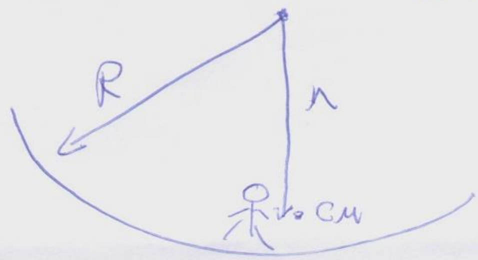
b) A aceleração centrípeta é

$$a = \frac{V^2}{r} = \omega^2 r$$

impondo que $a = g$, temos que a "g artificial" será dada por

$$g = \omega^2 r$$

sendo r o raio de rotação até o centro de massa do astronauta, h a altura do astronauta



$$R = r + \frac{h}{2}$$

Se $h = 1.8\,m$

$R = 5.9\,m$

$r = 5\,m$

$$\omega^2 = \frac{9.8}{5} \Rightarrow \omega = 1.4\,rad/s$$

$\approx$ 1 rotação a cada 4.5 s

c) Se $g = \omega^2 r$

temos que $\Delta g = \omega^2 \Delta r \Rightarrow \Delta g = \omega^2 r \frac{\Delta r}{r}$

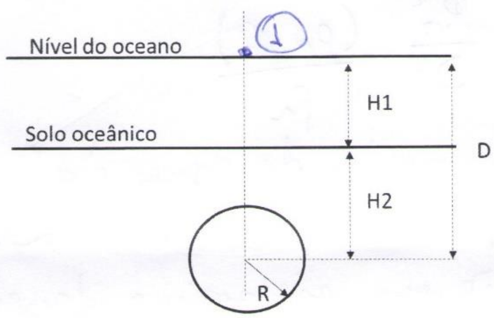
$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta r}{r}$. Impondo que ao longo do astronauta $\frac{\Delta g}{g} = 0.01$ temos que $\frac{\Delta r}{r} = 0.01$ seja $\Delta r = h$

$r \cong 180\,m$

$\Rightarrow$ 1 rotação a cada 27 s!

2) A camada de pré-sal no litoral Brasileiro está localizada aproximadamente à 8000 m de profundidade a partir do nível do mar. Uma forma de detectar tal petróleo é através de medidas precisas da gravidade local. Considere que o petróleo está em uma câmara esférica de raio **R**, cujo centro está localizado à uma profundidade **D** do nível do mar. Esta profundidade é parte formada de água (H1) e parte de rocha (H2) como na figura abaixo. Pede-se

a) Calcule a variação da gravidade quando o equipamento estiver localizado na linha vertical que passa pelo centro da câmara. (1.5 pontos)
b) Estime a variação da gravidade se R=4000 m, H1= 2000 m, H2=6000 m. Considere os seguintes parâmetros densidades: Terra (3 g/cm^3), água do mar (1.05 g/cm^3) e petróleo (0.85 g/cm^3); raio da Terra 6300 Km; G=6.67 x 10^{-11} Nm^2/Kg^2. (0.5 pontos)
c) Qual a variação se a câmara estiver cheia de ouro (densidade 19.3 g/cm^3)? (0.5 pontos)



a) Vamos supor inicialmente que a profundidade do oceano é irrelevante. Assim, a gravidade no ponto 1 seria dada por

$$g' = \frac{MG}{R_T^2} - \frac{4\pi R^3}{3}\frac{\rho_r G}{D^2} + \frac{4\pi R^3}{3}\frac{\rho G}{D^2}$$

contribuição da Terra toda

contribuição da esfera VAZIA

contribuição da esfera com o fluido

ρ_r = densidade rocha
ρ = densidade fluido

Reescrevendo

$$g' = \frac{4\pi R_T^3}{3}\rho_r \frac{G}{R_T^2} - \frac{4\pi R^3}{3}\frac{G}{D^2}(\rho_r - \rho)$$

$$g' = \underbrace{\frac{4\pi R_T^3}{3}\rho_r \frac{G}{R_T^2}}_{g}\left[1 - \frac{R^3}{R_T^3}\frac{(\rho_r - \rho)}{\rho_r}\frac{R_T^2}{D^2}\right]$$

Logo

$$= g' - g = g\left[-\frac{R^3}{R_T^3}\frac{(\rho_r-\rho)}{\rho_r}\frac{R_T^2}{D^2}\right]$$

$$\Delta g = -g\frac{R^3}{R_T^3}\frac{R_T^2}{D^2}\frac{(\rho_r-\rho)}{\rho_r}$$

A contribuicão da camada de água do oceano também pode ser estimada. Mas note que não era necessário fazer

$$g'_{oceano} = \frac{MG}{R_T^2} - \frac{(4\pi R_T^2 h_1)\rho_r G}{R_T^2} + \frac{(4\pi R_T^2 h_1)\rho_{H_2O}\, G}{R_T^2}$$

$$= \frac{4\pi R_T^3}{3}\rho_r\frac{G}{R_T^2} - \frac{4\pi R_T^2 h G}{R_T}(\rho_r - \rho_{H_2O})$$

$$g'_{oceano} = \frac{4\pi R_T^3 \rho_r G}{3R_T^2}\left[1 - \frac{(\rho_r - \rho_{H_2O})}{\rho_r}\frac{h_1}{R_T}\right]$$

$$g' = g\left[1 - \frac{(\rho_r - \rho_{H_2O})}{\rho_r}\frac{h_1}{R_T}\right]$$

Mas nesta estimativa consideramos o oceano cobrindo todo o planeta com uma profundidade h_1!

b). Se $R = 4\,\text{km}$, $R_T = 6300\,\text{km}$

$D = 8$, $\rho_r = 3\,g/cm^3$, $\rho_{petróleo} = 0.85\,g/cm^3$

$$\Delta g = -g \frac{R^3}{R_T D^2} \frac{(\rho_r - \rho)}{\rho_r}$$

$$\Delta g \simeq -1.1\, 10^{-4}\, g$$

c) Se $\rho_{Au} = 19.3\, g/cm$

$$\Delta g \cong +8.6\, 10^{-4}\, g$$

Exta

No caso da camada de água do oceano

$$\Delta g \cong -g \times 2\, 10^{-4}$$

Na prática, o que interessa e ser capaz de medir g com precisão melhor de 1 parte em 10^5 (~~[illegible]~~) em relação à areas vizinhos.

3) O astronauta do exercício 1 decidiu levar um aquário com seu peixinho dourado na sua viagem à Júpiter, já que não há um serviço de "fish sitter". Como a gravidade depende do raio de rotação, os fluídos vão se comportar de forma diferente da gravidade terrestre. Suponha que a gravidade seja dada pela seguinte função $g(z)=g_0(1-\alpha z)$ onde $g_0=9.8 m/s^2$ e $\alpha \ll 1$. No fundo do aquário $z=0$ e $g(0)= g_0$. Pede-se

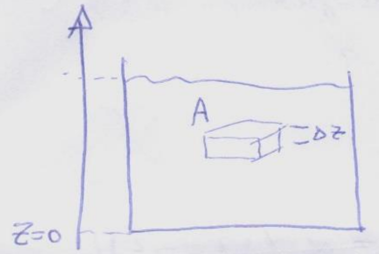
a) Qual a pressão no fundo do aquário em função da coluna de água presente no mesmo? (1 ponto)

b) Se altura da coluna de água no aquário é h_0, e a largura de uma lateral do aquário for W, qual a força exercida sobre esta parede lateral? (1 ponto)

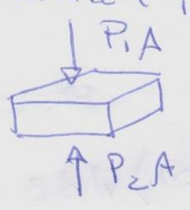
c) O que acontece com o empuxo dentro deste líquido? (0.5 pontos)

a) Vamos supor o aquário onde $g(z)=g_0(1-\alpha z)$.

Comentário: Isso faz sentido pois como vimos no exercício 1 $g \propto r$



Como feito em sala, supomos um paralelepípedo formado pelo próprio fluido de Área A e altura Δz. Temos a pressão em baixo (P_2) e em cima (P_1)



$$(P_2 - P_1)A = \text{peso do fluido} = A\Delta z \rho g(z)$$

$$\Delta P = \rho g(z) \Delta z \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g_0 (1-\alpha z)$$

O sinal negativo vem do fato que a pressão decresce conforme z aumenta. Como no caso da atmosfera. Seja $P(z)$, P_0 a pressão no fundo do aquário, temos

$$\int_{P_0}^{P(z)} dP = -\rho g_0 \int_0^z (1-\alpha z)\, dz$$

$$P(z) - P_0 = -\rho g_0 \left(z - \frac{\alpha z^2}{2} \right)$$

$$P_0 = P(z) + \rho g_0 \left(z - \alpha z^2/2 \right)$$

Lógico que a pressão no fundo depende da coluna de água no aquário e da pressão feita pelo gás que o astronauta respira.

b) Supondo que a coluna de água é h_0 e que a pressão do gás respirado pelo astronauta é P' temos que

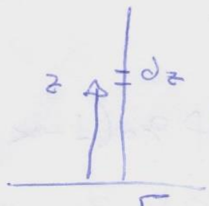
$$P_0 = P' + \rho g_0 \left(h - \alpha \frac{h^2}{2} \right)$$

e que

$$P(z) = P' + \rho g_0 \left[\left[(h - z) \right] = \frac{\alpha}{2} \left(h^2 - z^2 \right) \right]$$

Fazendo $\alpha = 0$ temos o resultado obtido em sala. Para calcular a força basta integral

$$dF = (P(z) - P')\, W\, dz$$



$$F = W g_0 \rho \left[\int_0^h \left[(h - z) - \frac{\alpha}{2} \left(h^2 - z^2 \right) \right] dz \right]$$

$$F = W g_0 \rho \left[hz - \frac{z^2}{2} - \frac{\alpha h^2 z}{2} + \frac{\alpha}{6} z^3 \right]_0^h$$

$$F = W g_0 \rho \left[\frac{h^2}{2} - \frac{\alpha h^3}{3} \right]$$

c). O empuxo é dado pelo peso do fluido, como este varia em função de z ($g(z) = g_0(1-\alpha z)$), o empuxo também varia. Para fazer um cálculo exato, precisariamos conhecer a forma do corpo e sua profundidade para calcular seu empuxo. Seria necessário integral as contribuições infinitesimais.

4) É muito comum o uso do adipômetro para determinar a massa magra e gorda de pessoas nas academias. Contudo, isso é apenas uma estimativa destes parâmetros através de equações médias e possui uma grande imprecisão. Uma medida mais precisa é pesar a pessoa e depois pesar ela completamente submersa em água. Suponha uma pessoa de massa de 80 Kg.

a) Sabe-se que os ossos são responsáveis por 15% desta massa e sua densidade é de 1.75 g/cm^3. Esta pessoa possui 5 litros de sangue, cuja densidade é 1.042 g/cm^3. Quais são as massas e volumes de ossos e sangue? (0.5 pontos)
b) Sabe-se também que a densidade da gordura e do músculo são respectivamente 0.91 g/cm^3 e 1.06 g/cm^3. Se a pessoa tem um "peso" de 7.1 Kg submersa, qual sua massa de gorda e massa magra? Considere g= 9.8 m/s^2 e densidade da água de $1g/cm^3$. (2.0 pontos)

a) A massa do osso é $= 0.15 \times 80\,Kg = 12\,kg$

Volume do osso é $= \dfrac{12\,kg}{1.75\,10^3\,kg/m^3} \cong 6.85\,10^{-3}\,m^3$

A massa do sangue $= 5\,10^3\,cm^3 \times 1.042\,\dfrac{g}{cm^3} = 5.21\,kg$

Volume sangue $= 5\,10^{-3}\,m^3$

b) Dentro d'água temos as seguintes forças: o peso da pessoa, o empuxo, e a normal da balança. A normal da balança ~~que~~ é o "peso" dentro d'água.

$$E + N = P$$

$E = \rho_{H_2O}\, g\, V$ onde V é o volume do corpo

$$E = P - N$$

$$\rho_{H_2O}\, g\, V = mg - N$$

$$V = \frac{1}{\rho g}(mg - m'g)$$

$$V = \frac{1}{1000}(80 - 7.1) = 72.9\,10^{-3}\,m^3$$

Sabemos que

$$m_{osso} + m_{sangue} + m_{magra} + m_{gorda} = 80\,Kg$$

$$m_m + m_g = 62.79\,Kg$$

$$V = V_{osso} + V_{sangue} + V_m + V_g$$

$$72.9\,10^{-3} = 6.85\,10^{-3} + 5\,10^{-3} + \frac{m_m}{\rho_m} + \frac{m_g}{\rho_g}$$

$$61.05\,10^{-3} = \frac{1}{1060}(62.79 - m_g) + \frac{m_g}{910}$$

$$61.05\,10^{-3} = 59.23\,10^{-3} - 9.43\,10^{-4} m_g + 10.99\,10^{-4} m_g$$

$$1.83\,10^{-3} = 1.56\,10^{-4} m_g$$

$$m_g \cong 11.73\,Kg$$

$$m_m = 51.06\,kg$$