SEM0317 - Aula 5

Jacobiano: Velocidades e Forças Estáticas

Prof. Assoc. Marcelo Becker

USP-EESC-SEM

LabRoM

Sumário da Aula

- **Definições**
- "Propagação" da Velocidade
- Jacobianos
- Singularidades
- Forças Estáticas
- Exercícios Recomendados
- Bibliografia Recomendada

Definições

- Cinemática Diferencial:
  - Define a relação entre a velocidade angular das juntas e as velocidades linear e angular do "efetuador" do manipulador (ferramenta, elemento terminal, etc.).
  - **Jacobiano Geométrico**: matriz de transformação que é uma função da configuração do manipulador.
  - O cálculo da matriz Jacobiana (J) para o "efetuador "pode ser feito diretamente através da diferenciação da matriz de cinemática direta em função das variáveis de junta → **Jacobiano Analítico** (geralmente diferente do Jacobiano Geométrico)...

Definições

- Matriz Jacobiana Geométrica
  - Para um manipulador de n graus de liberdade:

$$T(q) = \begin{bmatrix} R(q) & p(q) \\ o^T & 1 \end{bmatrix}$$ Cinemática Direta

  - Tem-se para o "efetuador": $\begin{cases} \dot{p} = J_p(q)\dot{q} \\ \omega = J_o(q)\dot{q} \end{cases}$ Vel. Linear / Vel. Angular

    - Onde: J_P é uma matriz 3xn que representa a contribuição da velocidade de rotação das juntas do manipulador sobre a velocidade linear do "efetuador" e, J_o, matriz 3xn , sobre a velocidade angular do "efetuador"

Definições

- Matriz Jacobiana Geométrica
  - Assim:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

Equação da Cinemática Diferencial do Manipulador

$$J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_o \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico do Manipulador

Sumário da Aula

- Definições
- **“Propagação” da Velocidade**
- Jacobianos
- Singularidades
- Forças Estáticas
- Exercícios Recomendados
- Bibliografia Recomendada

Propagação da Velocidade

- Derivada de uma Matriz de Rotação
  - Suponha que os valores da matriz variam com relação ao tempo, ou seja: $R = R(t)$. Assim, pela propriedade de ortogonalidade de R, se derivamos $R(t)R^T(t) = I$, com relação ao tempo, temos:

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = 0$$

  - Fazendo: $S(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$
  - Lembrando que: $S(t) + S^T(t) = 0$ anti-simetria

Propagação da Velocidade

- Derivada de uma Matriz de Rotação

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$$

  - Multiplicando ambos termos por $R(t)$:

$$S(t)R(t) = \dot{R}(t)\underbrace{R^T(t)R(t)}_{I}$$

  - Supondo ser $R(t)$ uma matriz homogênea:

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t)$$

Propagação da Velocidade

- Interpretação Física:
  - Considerando um vetor *p'* e o vetor *p(t) = R(t)p'*, observe que o vetor *p'* não depende do tempo
  - A derivada temporal de p(t) resulta em:

$$\dot{p}(t) = \dot{R}(t)\,p' \qquad\qquad \dot{p}(t) = S(t)R(t)\,p'$$

  - Da mecânica clássica temos que a velocidade de um vetor é:

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \times R(t)\,p'$$

Propagação da Velocidade

- Interpretação Física:

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \times R(t)\, p'$$

  - Onde $\omega(t)$ representa a velocidade angular do sistema de coordenadas $R(t)$ no instante de tempo t com relação ao sistema de coordenadas global.

$$\dot{p}(t) = \dot{R}(t)\, p' \qquad \dot{p}(t) = S(t)R(t)\, p'$$

  - Igualando as duas expressões, observa-se que a matriz $S(t)$ é o produto vetorial da velocidade angular e do vetor $R(t)p'$.

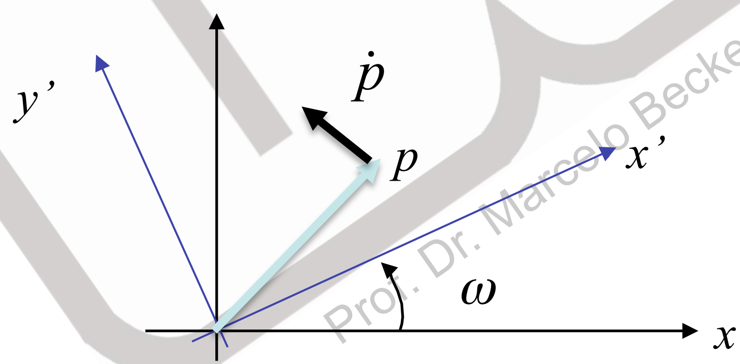
Propagação da Velocidade

- Velocidade angular:

$$\omega(t) = [\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z]^T \qquad S(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t_0) & \omega_y(t_0) \\ \omega_z(t_0) & 0 & -\omega_x(t_0) \\ -\omega_y(t_0) & \omega_x(t_0) & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(t) = S(\omega(t))$$

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \times R(t)\,p' = S(t)R(t)\,p'$$



Observe que o vetor p é solidário a x' e y'. Logo o sistema $x'y'$ gira com velocidade angular ω

Propagação da Velocidade

- **Exemplo**: Considerando a matriz de rotação em torno do eixo z:

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) & 0 \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Supondo que α varia em função do tempo e calculando a derivada temporal de $R_z(\alpha)$:

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t) = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}s_\alpha & -\dot{\alpha}c_\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}c_\alpha & -\dot{\alpha}s_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propagação da Velocidade

- **Exemplo**: Cont...
  - Comparando os resultados para a rotação em z:

$$S(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t_0) & \omega_y(t_0) \\ \omega_z(t_0) & 0 & -\omega_x(t_0) \\ -\omega_y(t_0) & \omega_x(t_0) & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propagação da Velocidade

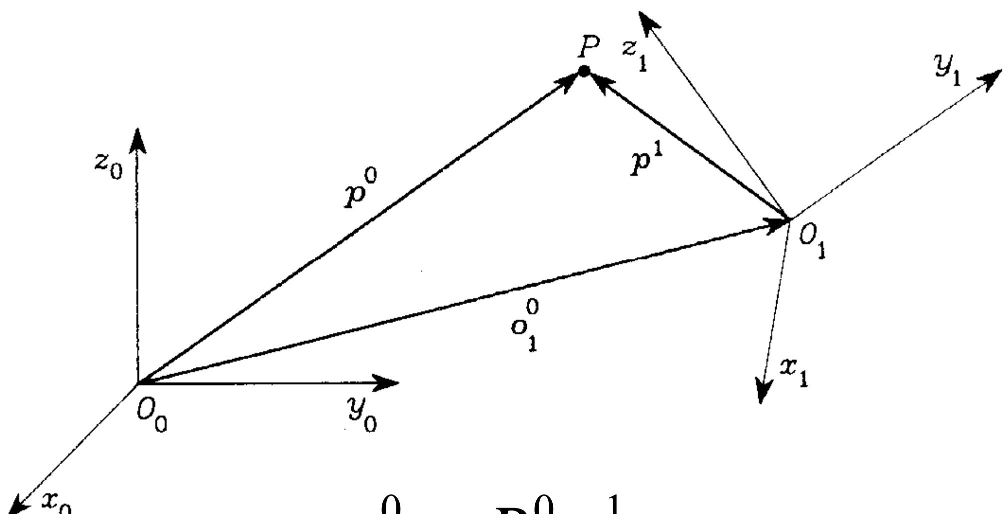
- **Exemplo**: Cont...
  - Assim, a velocidade angular do vetor com relação ao sistema inercial é: $\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T$
  - E, a derivada do vetor $R(t)$:

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t) \qquad S(t)R(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore S(t)R(t) = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}s_\alpha & -\dot{\alpha}c_\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}c_\alpha & -\dot{\alpha}s_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propagação da Velocidade

- Composição da Velocidade:



$$r_1^0 = R_1^0 p^1$$

$$p^0 = o_1^0 + R_1^0 p^1$$

$$\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + \dot{R}_1^0 p^1$$

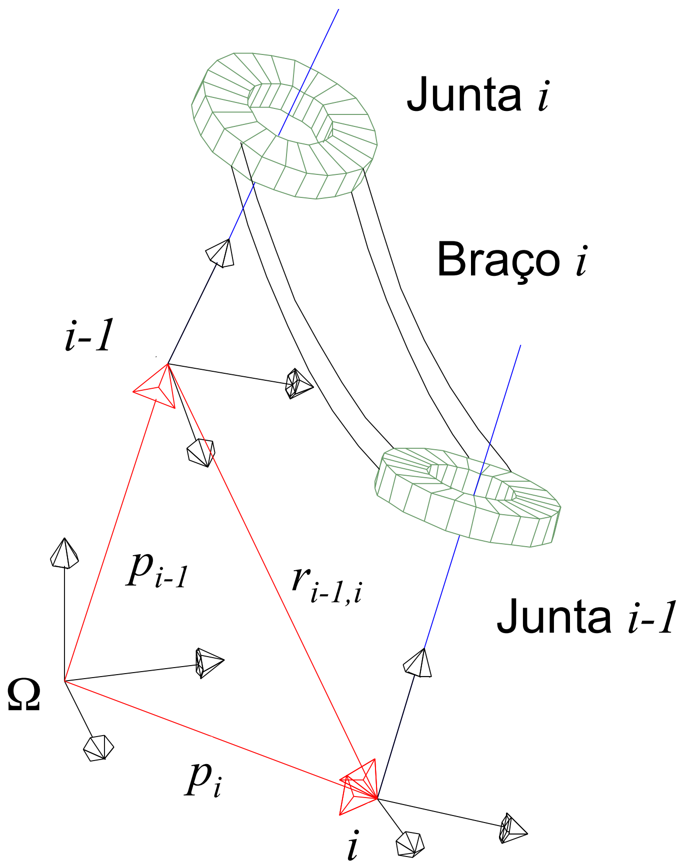
$$\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + S(\omega_1^0) R_1^0 p^1$$

$$\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + \omega_1^0 \times r_1^0$$

Se p^1 é costante no tempo (i.e. fixo com relação ao sistema de coordenadas 1): $\boxed{\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + \omega_1^0 \times r_1^0}$

Propagação da Velocidade

- Velocidade de Translação de um Braço em um Manipulador Robótico:



$$p_i = p_{i-1} + R_{i-1} r^{i-1}_{i-1,i}$$

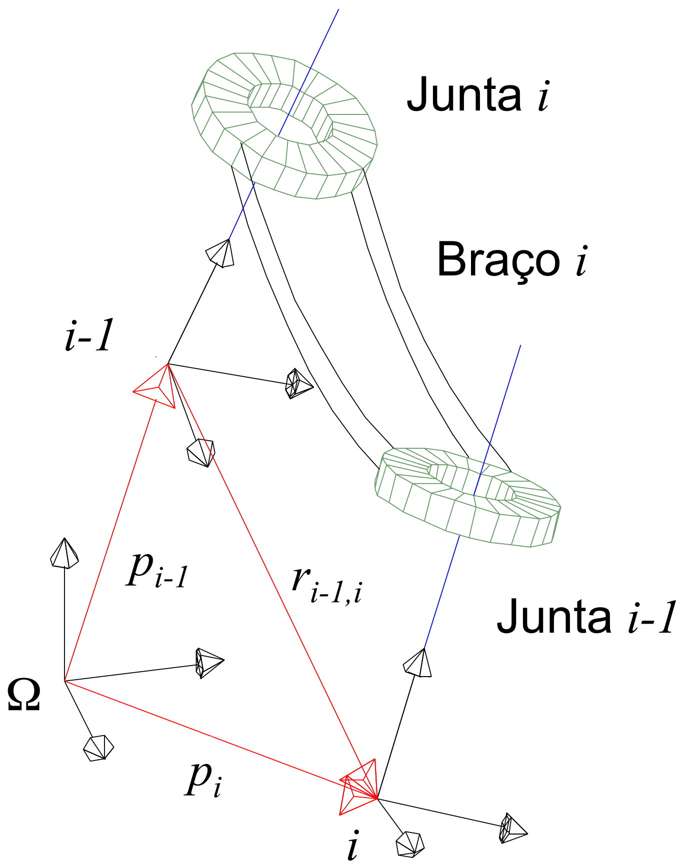
$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + R_{i-1} \dot{r}^{i-1}_{i-1,i} + S(\omega_{i-1}) R_{i-1} r^{i-1}_{i-1,i}$$

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times r_{i-1,i}$$

Onde $v_{i\text{-}1,i}$ indica a velocidade de origem do sistema de coordenadas i com relação ao sistema i-1, expresso no sistema inercial

Propagação da Velocidade

- Velocidade Angular de um Braço em um Manipulador Robótico:



$$R_i = R_{i-1} R_i^{i-1}$$

Derivando:

$$\dot{R}_i = \dot{R}_{i-1} R_i^{i-1} + R_{i-1} \dot{R}_i^{i-1}$$

$$S(\omega_i) R_i = S(\omega_{i-1}) R_{i-1} R_i^{i-1} + \ldots$$

$$\ldots + R_{i-1} S(\omega_{i-1,i}^{i-1}) R_i^{i-1}$$

$$S(\omega_i) R_i = S(\omega_{i-1}) R_i + \ldots$$

$$\ldots + R_{i-1} S(\omega_{i-1,i}^{i-1}) R_i^{i-1}$$

Propagação da Velocidade

- Velocidade Angular:
  - Pela propriedade de ortogonalidade da matriz de rotação, pode-se escrever:

$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + R_{i-1}S(\omega_{i-1,i}^{i-1})IR_i^{i-1}$$

$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + R_{i-1}S(\omega_{i-1,i}^{i-1})R_{i-1}^T R_{i-1} R_i^{i-1}$$

$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + R_{i-1}S(\omega_{i-1,i}^{i-1})R_{i-1}^T R_i$$

Propagação da Velocidade

- Velocidade Angular:

$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + R_{i-1}S(\omega_{i-1,i}^{i-1})R_{i-1}^T R_i$$

  - Lembrando que para a matriz de rotação, vale a relação: $RS(\omega)R^T = S(R\omega)$, assim tem-se:

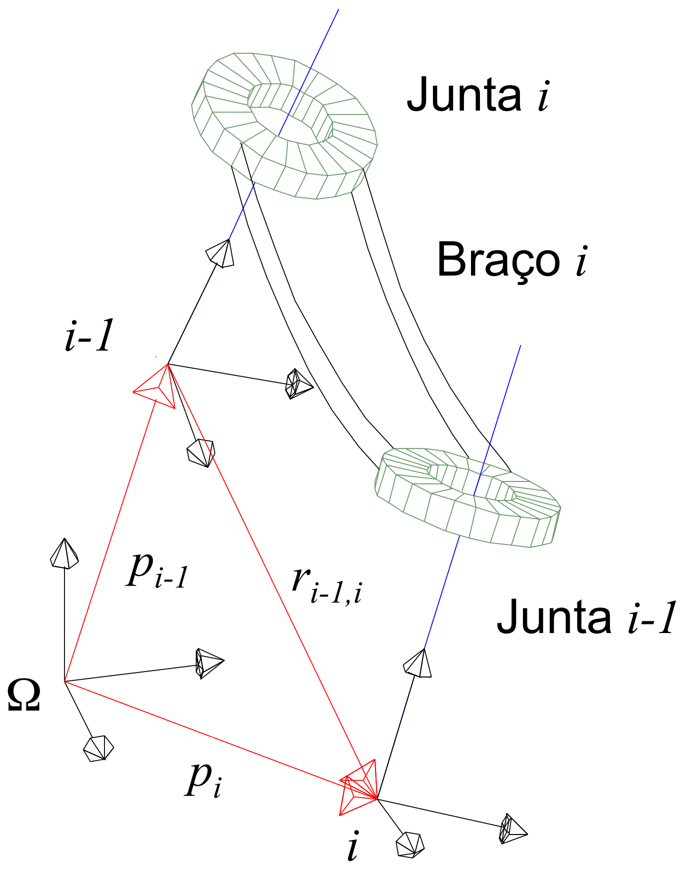
$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + S(R_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1})R_i$$

  - Onde: $\omega_i = \omega_{i-1} + R_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1}$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}$$

Propagação da Velocidade

- Assim, tem-se as equações para as Velocidades Angular e a Translacional:



$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i} \end{cases}$$

Sendo que essa relação pode ser particularizada com relação a juntas prismáticas e rotacionais...

Propagação da Velocidade

- Junta Prismática:

$$\omega_{i-1,i} = 0$$

$$v_{i-1,i} = \dot{d}_i z_{i-1}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \dot{d} z_{i-1} + \omega_{i-1} \times r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} \end{cases}$$

- Junta Rotacional:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \omega_{i-1,i} \times r_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i z_{i-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + (\omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}) \times r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i z_{i-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \omega_i \times r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i z_{i-1} \end{cases}$$

Sumário da Aula

- Definições
- “Propagação” da Velocidade
- **Jacobianos**
- Singularidades
- Forças Estáticas
- Exercícios Recomendados
- Bibliografia Recomendada

Jacobiano Geométrico

- Cálculo do Jacobiano: $J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{p_1} & \cdots & j_{p_n} \\ j_{o_1} & \cdots & j_{o_n} \end{bmatrix}$

  - Junta Prismática: $\begin{cases} \omega_{i-1,i} = \dot{q}_i j_{o_i} = 0 \\ v_{i-1,i} = \dot{q}_i j_{p_i} = \dot{d}_i z_{i-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \dot{d}_i \\ j_{o_i} = 0 \\ j_{p_i} = z_{i-1} \end{cases}$

  - Junta Rotacional: $\begin{cases} \omega_{i-1,i} = \dot{q}_i j_{o_i} = \dot{\theta}_i z_{i-1} \\ v_{i-1,i} = \dot{q}_i j_{p_i} = \omega_{i-1,i} \times r_{i-1,n} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{q}_i j_{o_i} = \dot{\theta}_i z_{i-1} \\ v_{i-1,i} = \dot{q}_i j_{p_i} = \dot{\theta}_i z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \dot{\theta}_i \\ j_{o_i} = z_{i-1} \\ j_{p_i} = z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \end{cases}$$

Jacobiano Geométrico

- Cálculo do Jacobiano: $J = \begin{bmatrix} J_{p_i} \\ J_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \boxed{\begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \boxed{\begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}} \end{cases}$

Junta Prismática

Junta Rotacional

Onde z_{i-1} é obtido na 3ª coluna da matriz de rotação R_{i-1}^{0}, assim:

$$z_{i-1} = R_1^0(q_1) \cdots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) z_0 \qquad z_0 = [0\ 0\ 1]^T$$

Jacobiano Geométrico

- Cálculo do Jacobiano: $J = \begin{bmatrix} J_{p_i} \\ J_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \end{cases}$

Junta Prismática

Junta Rotacional

Onde p é obtido na 4ª coluna da matriz de transformação T_n^0, (os 3 primeiros elementos) assim:

$$\tilde{p} = A_1^0(q_1) \cdots A_n^{n-1}(q_n)\tilde{p}_0 \qquad \tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico

- Cálculo do Jacobiano: $J = \begin{bmatrix} J_{p_i} \\ J_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \boxed{\begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}} & \text{Junta Prismática} \\ \boxed{\begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}} & \text{Junta Rotacional} \end{cases}$

Onde p_{i-1} é obtido na 4ª coluna da matriz de transformação T_{n-1}^{0}, (os 3 primeiros elementos) assim:

$$\tilde{p}_{i-1} = A_1^0(q_1) \cdots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \tilde{p}_0$$

Jacobiano Geométrico

- Cálculo do Jacobiano: $J = \begin{bmatrix} J_{p_i} \\ J_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \end{cases}$

Junta Prismática

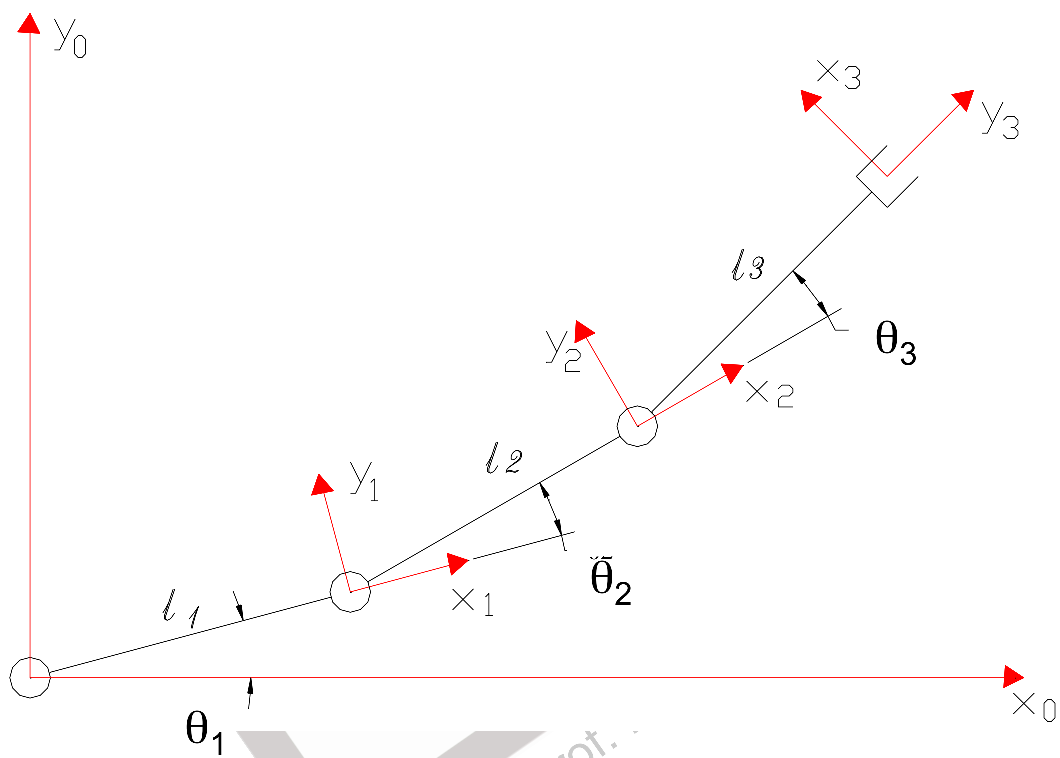
Junta Rotacional

Observa-se que o Jacobiano depende da tríade que expressa a velocidade do órgão terminal...

$$\begin{bmatrix} \dot{p}^u \\ \dot{\omega}^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^u & o \\ o & R^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \Rightarrow J^u = \begin{bmatrix} R^u & o \\ o & R^u \end{bmatrix} J$$

Jacobiano Geométrico

- Exemplo: Manipulador Planar de 3 braços



Assim:

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

Com i = 1, 2, 3

Jacobiano Geométrico

- Exemplo: Manipulador Planar de 3 braços

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p} = T_3^0(q)\tilde{p}_0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 \tilde{p}_0$$

$$= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{123} + \ell_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico

- Exemplo: Manipulador Planar de 3 braços

$$p = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{p}_{i-1} = A_1^0(q_1)\cdots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\widetilde{p}_0$$

$$z_{i-1} = R_1^0(q_1)\cdots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})z_0$$

Jacobiano Geométrico

- Exemplo: Manipulador Planar de 3 braços

$$p_0 = A_0^0 \tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = A_1^0 \tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & \ell_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & \ell_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico

- Exemplo: Manipulador Planar de 3 braços

$$p_2 = A_0^1 A_2^1 \tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \ell_1 s_2 + \ell_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico

- Exemplo: Manipulador Planar de 3 braços

  Sendo o produto vetorial dos dois vetores $P=(P_x, P_y, P_z)$ e $Q=(Q_x, Q_y, Q_z)$:

$$P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_y P_z + Q_z P_y \\ -Q_z P_x + Q_x P_z \\ -Q_x P_y + Q_y P_x \end{bmatrix}$$

Jacobiano Geométrico

- Exemplo: Manipulador Planar de 3 braços

Assim:

$$z_0 \times (p - p_0) = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 - \ell_2 s_{12} - \ell_3 s_{123} \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 \times (p - p_1) = \begin{bmatrix} -\ell_2 s_{12} - \ell_3 s_{123} \\ \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 \times (p - p_2) = \begin{bmatrix} -\ell_3 s_{123} & \ell_3 c_{123} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Jacobiano Geométrico

- Exemplo: Manipulador Planar de 3 braços

$$J(q)=\begin{bmatrix} -\ell_1 s_1-\ell_2 s_{12}-\ell_3 s_{123} & -\ell_2 s_{12}-\ell_3 s_{123} & -\ell_3 s_{123} \\ \ell_1 c_1+\ell_2 c_{12}+\ell_3 c_{123} & \ell_2 c_{12}+\ell_3 c_{123} & \ell_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

No plano xy: $J(q)=\begin{bmatrix} -\ell_1 s_1-\ell_2 s_{12}-\ell_3 s_{123} & -\ell_2 s_{12}-\ell_3 s_{123} & -\ell_3 s_{123} \\ \ell_1 c_1+\ell_2 c_{12}+\ell_3 c_{123} & \ell_2 c_{12}+\ell_3 c_{123} & \ell_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Jacobiano Analítico

- Diferenciação da matriz de cinemática direta em função das variáveis de junta...

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial q}\dot{q} = J_P(q)\dot{q}$$

POSIÇÃO

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\dot{q} = J_\phi(q)\dot{q}$$

ORIENTAÇÃO

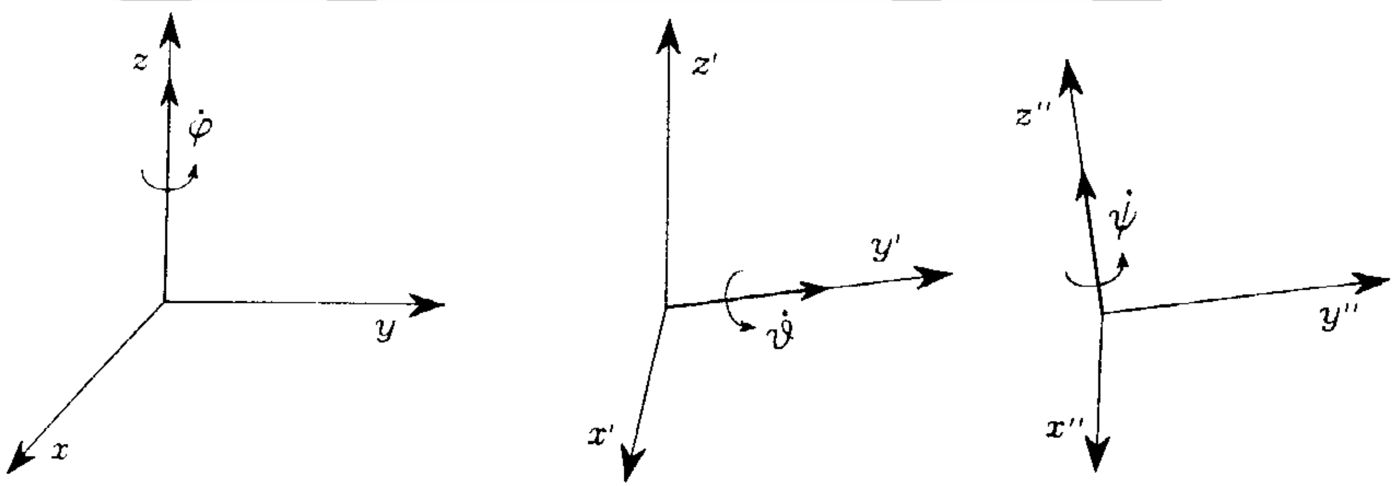
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix}\dot{q} = J_A(q)\dot{q}$$

Sendo: $J_A(q) = \dfrac{\partial k(q)}{\partial q}$

Em geral a derivada com relação ao tempo de ϕ não coincide com o vetor velocidade angular defenido na matriz Jacobiana geométrica...

Jacobiano Analítico

- Relação entre o Jacobiano Geométrico e Analítico...
  - Rotações de Euler



Velocidade de Rotação em uma terna de ângulos de Euler ZYZ

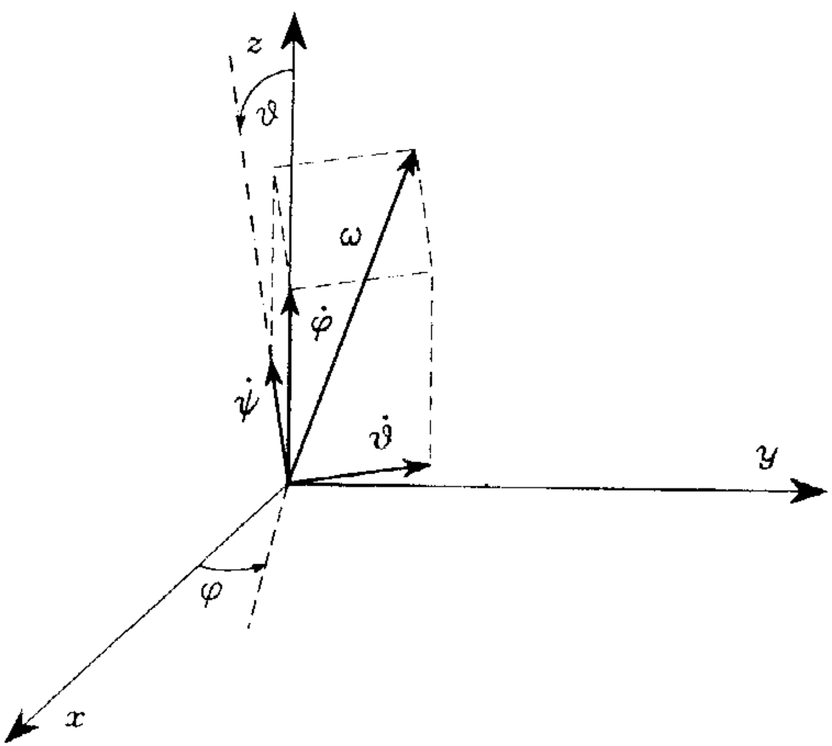
Jacobiano Analítico

- Relação entre o Jacobiano Geométrico e Analítico...
  - Rotações de Euler: ZYZ

$$R_{EUL} = R_z(\varphi)R_{y'}(\vartheta)R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

Jacobiano Analítico

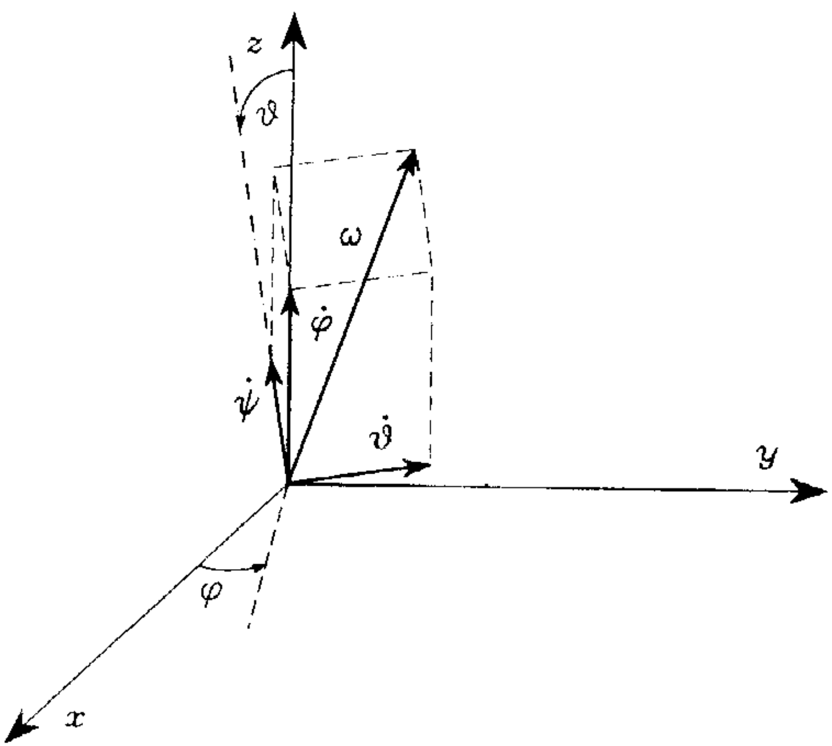
- Relação entre o Jacobiano Geométrico e Analítico...



$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{\begin{cases}\dot{\varphi}=0 \\ \dot{\vartheta}=0\end{cases}} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi s_\vartheta \\ c_\vartheta \end{bmatrix}$$

Jacobiano Analítico

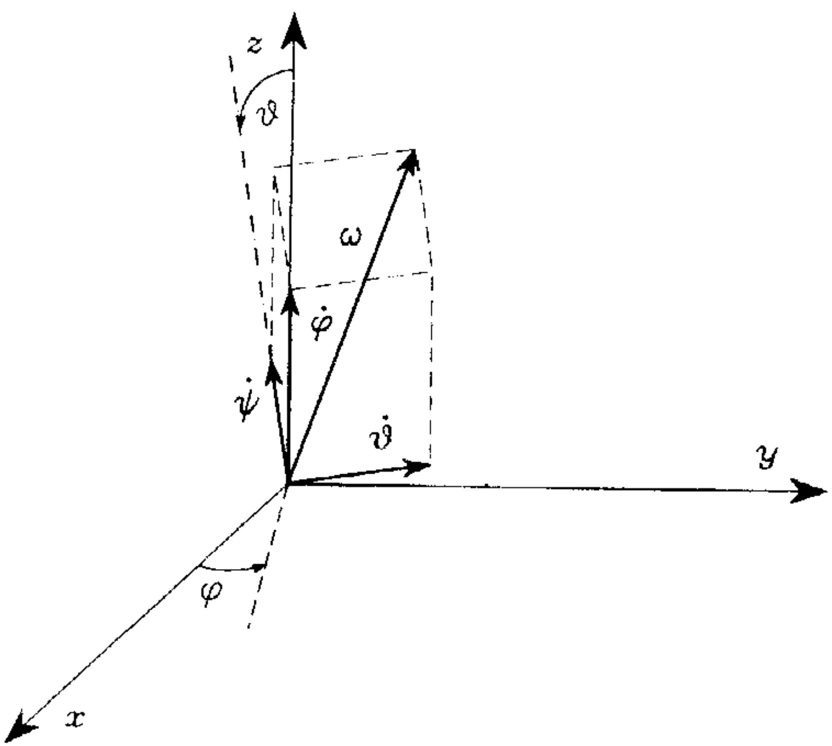
- Relação entre o Jacobiano Geométrico e Analítico...



$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{\begin{cases}\dot{\varphi}=0 \\ \dot{\psi}=0\end{cases}} = \dot{\vartheta}\begin{bmatrix} -s_{\varphi} \\ c_{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiano Analítico

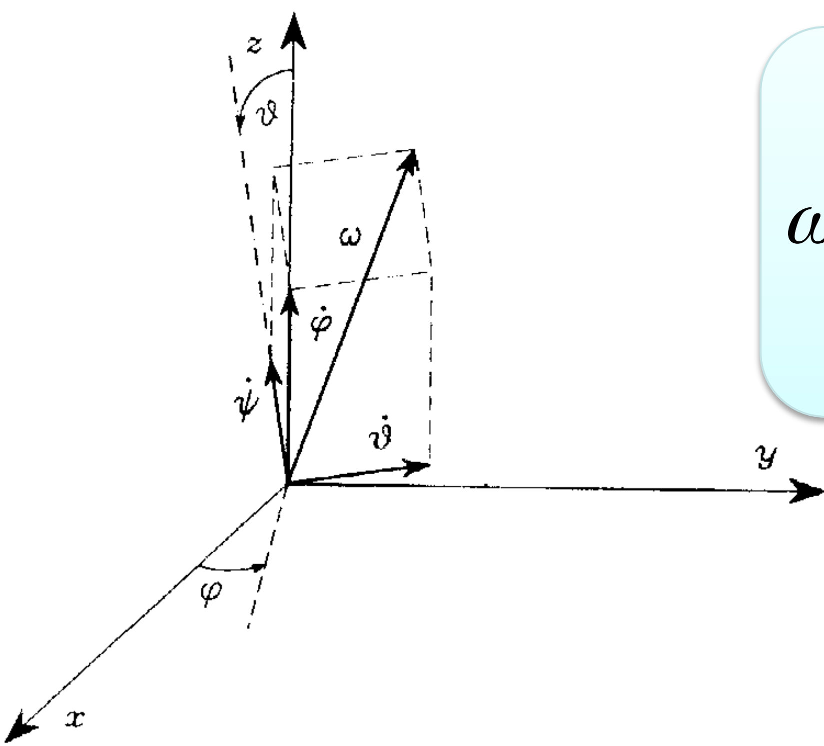
- Relação entre o Jacobiano Geométrico e Analítico...



$$\left.\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}\right|_{\begin{cases}\dot{\vartheta}=0\\ \dot{\psi}=0\end{cases}} = \dot{\varphi}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Jacobiano Analítico

- Relação entre o Jacobiano Geométrico e Analítico...



$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\vartheta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\vartheta \\ 1 & 0 & c_\vartheta \end{bmatrix} \dot{\phi} = T(\phi)\dot{\phi}$$

Jacobiano Analítico

- Observação sobre singularidades...
  - O determinante da matriz T é igual a $-s_\vartheta$, o que significa que a relação não é "inversível" para $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$;
  - Isto significa que, embora cada velocidade de rotação possa ser expressa por um vetor velocidade angular ω, existem velocidades angulares que não podem ser expressas em termos de ϕ, quando a orientação da tríade da ferramenta requer $s_\vartheta = 0$;

Jacobiano Analítico

- Observação sobre singularidades...
  - Quando $s_{\vartheta} = 0$, a velocidade angular que pode ser descrita por ϕ apresenta componentes perpendiculares ao eixo z $\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\vartheta}^2\right)$.
  - As orientações que anulam o determinante da matriz de transformação são chamadas de singularidades da representação de ϕ.

Jacobiano Analítico

- Significado Físico de ω e ϕ...
  - Do ponto de vista físico, o significado de ω é mais intuitivo que o de $\dot{\phi}$;
  - Porém, a integral de $\dot{\phi}$ corresponde a ϕ e exprime a variação nos ângulos de Euler necessária para passar de uma direção para outra. Enquanto que a integral de ω não admite qualquer interpretação física.

Jacobiano Analítico

- Relação entre o Jacobiano Geométrico e Analítico...

$$v = \begin{bmatrix} I & o \\ o & T(\phi) \end{bmatrix} \dot{x} = T_A(\phi)\dot{x}$$

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q)\dot{q}$$

$$J = T_A(\phi) J_A$$

Em Resumo...

- O Jacobiano é uma função de q, ele não é constante!!

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \left[\frac{dh(q)}{dq}\right]_{6\times n} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad J = \left(\frac{dh(q)}{dq}\right)_{6\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial q_1} & \frac{\partial h_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_6}{\partial q_1} & \frac{\partial h_6}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{6\times n}$$

Em Resumo...

- Cinemática Direta...

$$T_0^6 = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(q) \\ h_2(q) \\ h_3(q) \end{bmatrix}$$

$$\{n, s, a\} \to \begin{bmatrix} \phi(q) \\ \theta(q) \\ \psi(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_4(q) \\ h_5(q) \\ h_6(q) \end{bmatrix}$$

Em Resumo...

- Cinemática Direta...

$$Y_{6\times1} = h(q) = \begin{bmatrix} h_1(q) \\ h_2(q) \\ \vdots \\ h_6(q) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{Y}_{6\times1} = J_{6\times n}\dot{q}_{n\times1}$$

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Velocidade Linear

$$V = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Velocidade Angular

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Em Resumo...

- Fisicamente...

$$\dot{Y} = J\dot{q} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{61} & J_{62} & \cdots & J_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}\dot{q}_1 + J_{12}\dot{q}_2 + \cdots + J_{16}\dot{q}_6 \\ J_{21}\dot{q}_1 + J_{22}\dot{q}_2 + \cdots + J_{26}\dot{q}_6 \\ J_{31}\dot{q}_1 + J_{32}\dot{q}_2 + \cdots + J_{36}\dot{q}_6 \\ J_{41}\dot{q}_1 + J_{42}\dot{q}_2 + \cdots + J_{46}\dot{q}_6 \\ J_{51}\dot{q}_1 + J_{52}\dot{q}_2 + \cdots + J_{56}\dot{q}_6 \\ J_{61}\dot{q}_1 + J_{62}\dot{q}_2 + \cdots + J_{66}\dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Como cada velocidade no espaço das juntas contribui para a velocidade resultante no espaço de trabalho...

Sumário da Aula

- Definições
- "Propagação" da Velocidade
- Jacobianos
- **Singularidades**
- Forças Estáticas
- Exercícios Recomendados
- Bibliografia Recomendada

Singularidades

- Toda e qualquer configuração para a qual J diminui os valores de seu range é dita singularidade cinemática
- A característica da singularidade é importante pois:
  - ✓ A singularidade representa configurações em que há uma perda de mobilidade da estrutura, em outras palavras, você não pode impor à ferramenta as leis do movimento arbitrário;
  - ✓ Quando a estrutura estiver em uma configuração singular, pode haver infinitas soluções para o problema cinemático inverso;
  - ✓ Em torno de uma singularidade, pequenas velocidades no espaço de trabalho podem resultar em altas velocidades no espaço das juntas.

Singularidades

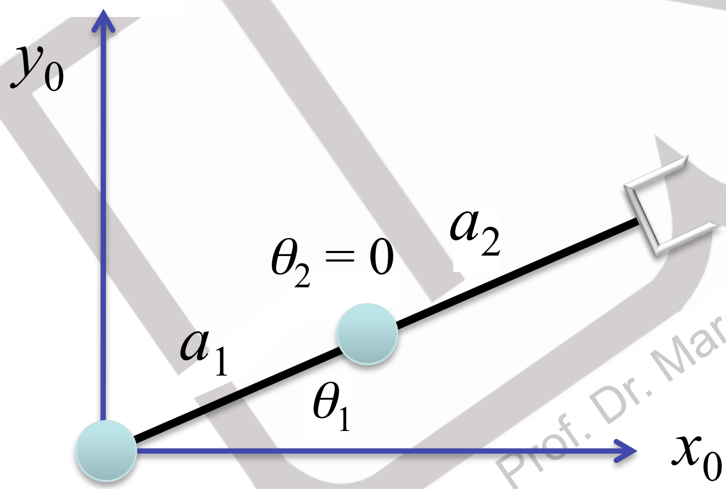
- Singularidade na borda do espaço de trabalho: ocorre quando o manipulador está totalmente estendido ou todo dobrado sobre si mesmo. Esta singularidade pode ser evitada.

- Singularidade interna ao espaço de trabalho: geralmente causadas pelo alinhamento de dois ou mais eixos de movimento durante a geração de trajetórias da ferramenta. Problema sério, pois é interno ao espaço de trabalho.

Singularidades

- Exemplo: Para o manipulador plano com 2 juntas rotacionais ...

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} \qquad det(J) = a_1 a_2 s_2$$



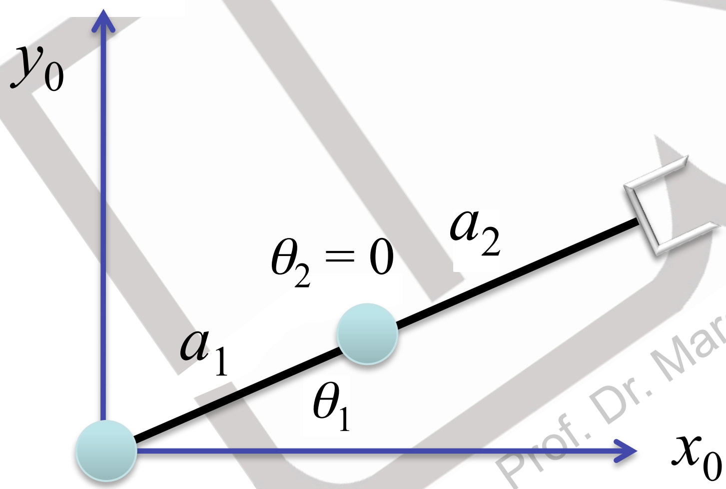
O determinante anula-se para $\theta_2 = 0$ ou $\theta_2 = \pi$. As posições da ferramenta são determinadas apenas por θ_1.

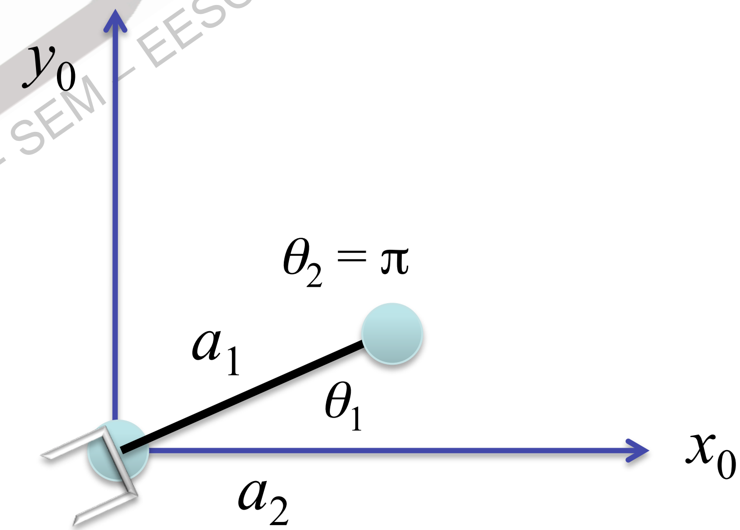
Singularidades

- Exemplo: Para o manipulador plano com 2 juntas rotacionais ...

  Ambas configurações encontram-se nas bordas do espaço de trabalho (externo: $\theta_2 = 0$ e interno $\theta_2 = \pi$).

$$J\Big|_{\theta_2=0,\pi} = \begin{bmatrix} -(a_1+a_2)s_1 & -a_2 s_1 \\ (a_1+a_2)c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix}$$



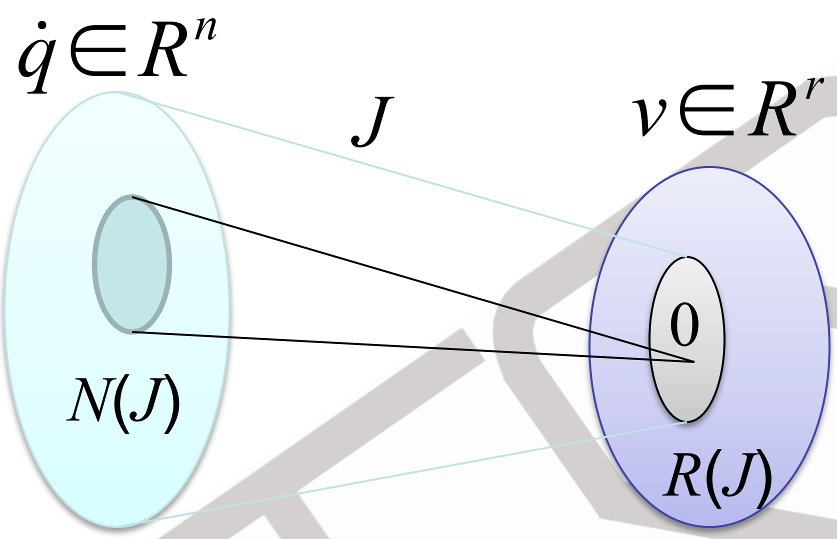


Análise de Redundância

$$v = J(q)\dot{q}$$

- Tem-se:
  - v: a velocidade da ferramenta necessária para executar a tarefa (vetor r x 1);
  - J: matriz Jacobiana Geométrica (r x n) ;
  - $\dot{q}$: vetor de velocidades nas juntas (n x 1).
- Se $r < n$, o manipulador é redundante do ponto de vista cinemático e existem (n - r) graus de liberdade redundantes.

Análise de Redundância



$$v = J(q)\dot{q}$$

A imagem de J é o subespaço $R\,(J)$, que identifica a velocidade da ferramenta que pode ser gerada pela velocidade de junta, na configuração do manipulador

O zero de J é o subespaço $N\,(J)$, em que a velocidade junta não produz qualquer velocidade de ferramenta, na configuração do manipulador.

Análise de Redundância

- Se J tem "*full rank*" , tem-se:

$$dim(R(J)) = r \qquad\qquad dim(N(J)) = n - r$$

E a imagem de J abrange todo o espaço.

- Se, ao contrário, J "degenera" em uma singularidade, a dimensão da imagem diminui, ao mesmo tempo, a dimensão do zero aumenta e a relação abaixo é válida:

$$dim(R(J)) + dim(N(J)) = n \ \text{ para } \forall \ rank(J)$$

Onde: n é a dimensão do espaço de junta

Análise de Redundância

- Para um manipulador redundante, quando $N(J) \neq 0$:

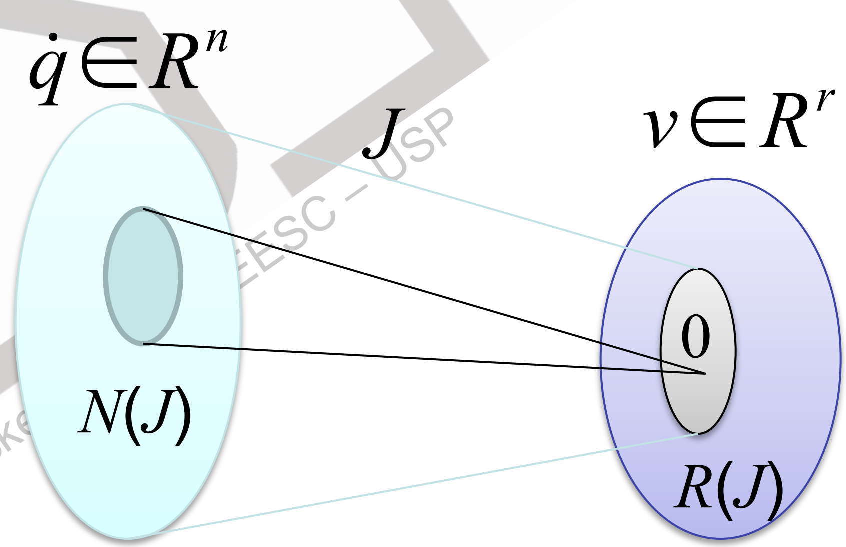
Seja $\dot{q}^*$ solução de $v = J(q)\dot{q}$

$R(\mathrm{J}) \equiv N(J)$

Para $\dot{q}_a$ um vetor qualquer:

$$\dot{q} = \dot{q}^* + P\dot{q}_a$$

$$J\dot{q} = J\dot{q}^* + JP\dot{q}_a = J\dot{q}^* = v$$



Sumário da Aula

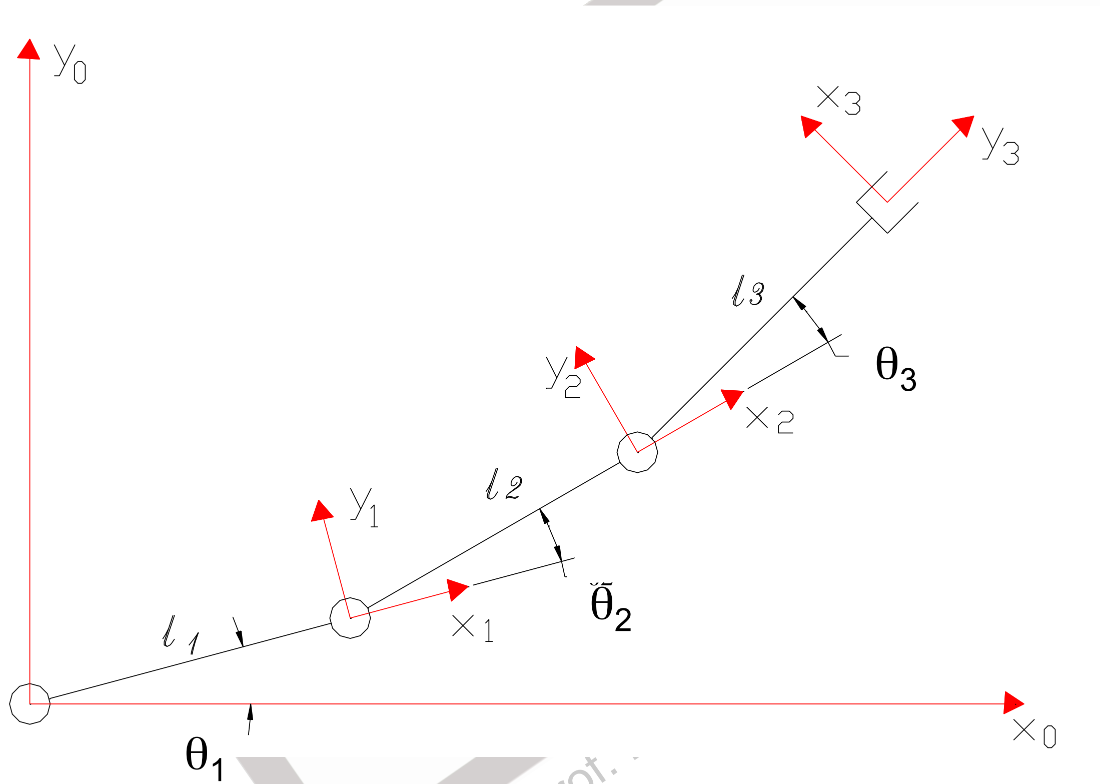
- Definições
- "Propagação" da Velocidade
- Jacobianos
- Singularidades
- **Forças Estáticas**
- Exercícios Recomendados
- Bibliografia Recomendada

Inversão do Jacobiano

- Inversão da Cinemática Diferencial:
  - Seja: $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q)\dot{q}$ mas: $v = J(q)\dot{q}$
  - Assim: $\dot{q} = J^{-1}(q)v$
  - Logo: $q(t) = q(0) + \int_0^t \dot{q}(\zeta)d\zeta$
  - Onde: $q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\Delta t$ e $t_{k+1} = t_k + \Delta t$

Inversão do Jacobiano

- Exemplo: para o manipulador planar de 3 juntas...



Inversão do Jacobiano

- Temos: $$T_3^0(q) = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{123} + \ell_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = k(q) = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123} \\ 0 \\ 0 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$$

Se a orientação não for considerada, tem-se $x = [p_x \ \ p_y]^T$, e portanto não há redundância cinemática $r < m$.

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Um manipulador é dito redundante do ponto de vista cinemático quando possui um número de graus de liberdade maior que o número de variáveis necessárias para caracterizar uma determinada tarefa (no plano > 3 - no espaço > 6). Dito em termos de espaço, um manipulador é inerentemente redundante quando a dimensão do espaço de trabalho é menor que a dimensão do espaço de juntas ($m < n$).

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Se o manipulador é redundante ($r < n$), o Jacobiano é uma matriz retangular e será um problema encontrar as soluções significativas para a equação $v = J(q)\dot{q}$.
  - Um método possível de resolver esse problema é procurar a solução ótima com vínculos...

Minimizar: $g(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T W \dot{q}$ para $v = J(q)\dot{q}$

Onde W é uma matriz (n x n) simétrica e positiva.

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

$$g(\dot{q},\lambda) = \frac{1}{2}\dot{q}^T W \dot{q} + \lambda^T (v - J\dot{q})$$

Função de custo modificada

Onde: λ é um vetor $(r \times 1)$ que contém os multiplicadores de Lagrange

Solução:

$$\left(\frac{\partial g(\dot{q},\lambda)}{\partial \dot{q}}\right)^T = 0 \rightarrow \dot{q} = W^{-1}J^T\lambda$$

$$\left(\frac{\partial g(\dot{q},\lambda)}{\partial \lambda}\right)^T = 0 \rightarrow v = J\dot{q}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = W^{-1}J^T\lambda \\ v = J\dot{q} \end{cases} \rightarrow v = JW^{-1}J^T\lambda$$

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Solução: cont...

$$\lambda = \left(JW^{-1}J^T\right)^{-1} v$$ Substituindo em: $$\dot{q} = W^{-1}J^T\lambda$$

$$\dot{q} = W^{-1}J^T\left(JW^{-1}J^T\right)^{-1} v$$

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Solução: cont...

Caso particular: a matriz de pesos W coincide com a matriz identidade

$$\dot{q} = J^{+} v$$

Onde:

$$\boxed{J^{+} = J^{T}(JJ^{T})^{-1}}$$

Pseudo inversa

A solução resultante é aquela que minimiza localmente a norma da velocidade de junta.

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Observação

$\dot{p} = J(q)\dot{q}$ É a solução que minimiza $\|\dot{q}\|$

$\dot{q} = J^{+}\dot{p} = J^{T}(JJ^{T})^{-1}\dot{p}$ Em geral: $\dot{q} = J^{+}\dot{p} + \dot{q}_{n}$

Onde: $\dot{q}_{n}$ pertence a $Ker(J) \rightarrow J\dot{q}_{n} = 0$

$$J\dot{q} = J(J^{+}\dot{p} + \dot{q}_{n}) = JJ^{+}\dot{p} + J\dot{q}_{n} = \dot{p}$$

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Observação (cont...)

Escolhendo: $J^* = I - J^+ J$ $\begin{cases} J^* \dot{q} = \dot{q}_n \\ J J^* \dot{q} = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\dot{q} = J^+ \dot{p} + (I - J^+ J)\dot{q}_d}$$

Onde: $\dot{q}_d$ é uma velocidade de junta (desejada)

Essa expressão assegura o menor erro de $\dot{q}$ com relação a $\dot{q}_d$

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Observação (cont...)

Assim: $$\dot{q} = J^{+}\dot{p} + (I - J^{+}J)\dot{q}_d$$

Onde:

$J^{+}\dot{p} \rightarrow$ Velocidade de junta se ocorre uma variação de $\dot{p}$

$(I - J^{+}J)\dot{q}_d \rightarrow$ Velocidade de junta se não ocorre uma variação de $\dot{p}$

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Minimização do Objetivo

Seja: $H(q)$ definida positiva

Tem-se: $$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q} J^{+}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\left(I - J^{+}J\right)\dot{q}_d$$

Se $\dot{q}_d$ for selecionado e $\dot{H} < 0$ imposto...

Podemos estar mais próximos de um mínimo global para H

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Minimização do Objetivo

Assim:
$$\dot{q}_d = -K\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T$$

$K > 0$

Sempre negativo...

$$\dot{H} = -K\frac{\partial H}{\partial q}\left(I - J^+ J\right)\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T + \frac{\partial H}{\partial q}J^+\dot{p}$$

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Minimização do Objetivo - Exemplo

$$H(q) = \min_{p,o} \| p(q) - 0 \|$$

p: ponto genérico do manipulador
O: ponto sobre um obstáculo
Maximizando H pode ser possível contornar o obstáculo

$$H(q) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i - \overline{q_i}}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2$$

q_{iM} (q_{im}): o máximo (mínimo) da variável de junta
$\bar{q}_i$: o valor médio
Minimizando H pode ser possível ficar longe do fim da procura

Inversão do Jacobiano

- Manipuladores Redundantes:
  - Método de Multiplicadores de Lagrange

Minimização do Objetivo - Exemplo

$$H(q) = \sqrt{\det\left(J(q)J^T(q)\right)}$$

H: é um parâmetro que define uma medida de "manipulabilidade"
A maximização de H permite ficar distante de singularidades

$$\dot{q} = J^+\dot{p} - K\left(I - J^+J\right)\frac{\partial H}{\partial q}$$

Inversão do Jacobiano

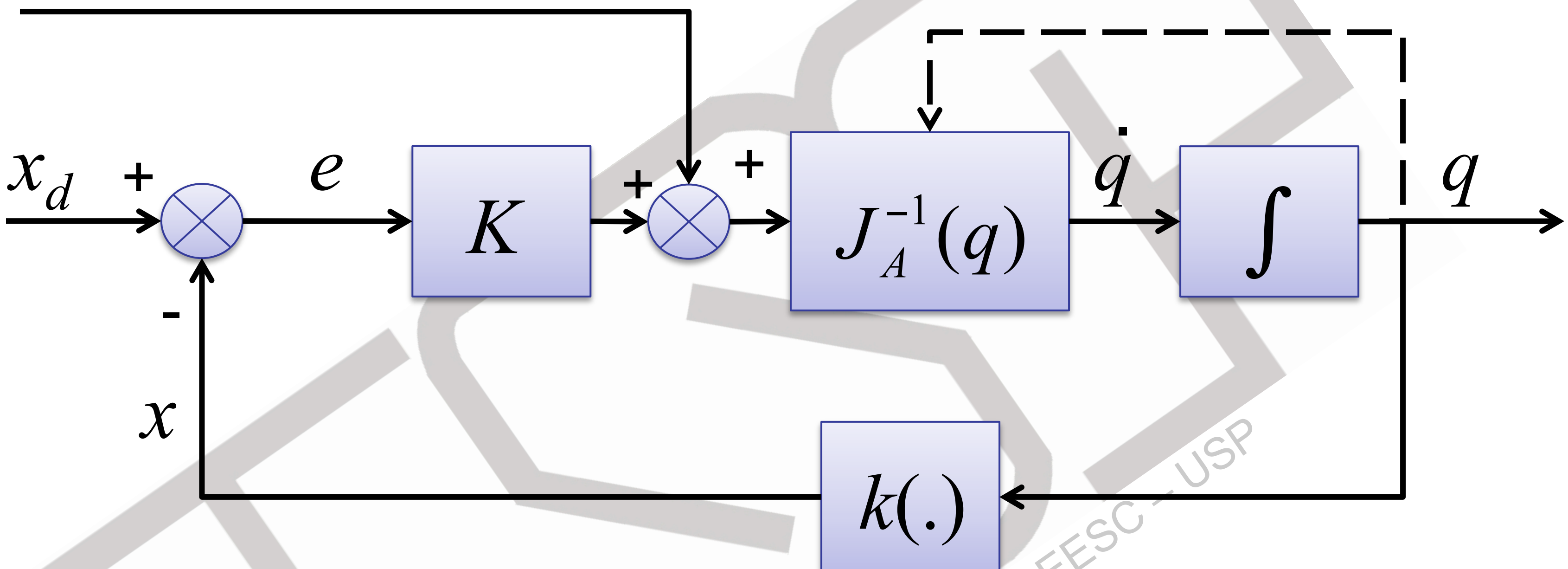
- Sendo: $q(t_{k+1}) = q(t_k) + J^{-1}(q(t_k))v(t_k)\Delta t$

- Fazendo uma derivação numérica para o erro:

$$e = x_d - x \qquad \therefore \quad \dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = \dot{x}_d - J_A(q)\dot{q}$$

- É necessário, na definição de um algoritmo de inversão, que a equação diferencial dependente de $\dot{q}$ produza um resultado que convirja assintoticamente para zero

Pseudo-Inversa do Jacobiano



$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)\left(\dot{x}_d + Ke\right) \qquad \dot{e} + Ke = 0$$

Para um manipulador redundante:

$$\dot{q} = J_A^{+}(q)\left(\dot{x}_d + Ke\right) + (I - J_A^{+}J_A)\dot{q}_0$$

Transposta do Jacobiano

Tem-se que:

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T K e \qquad V(e) > 0 \quad \forall e \neq 0, \quad V(0) = 0$$

Assim:

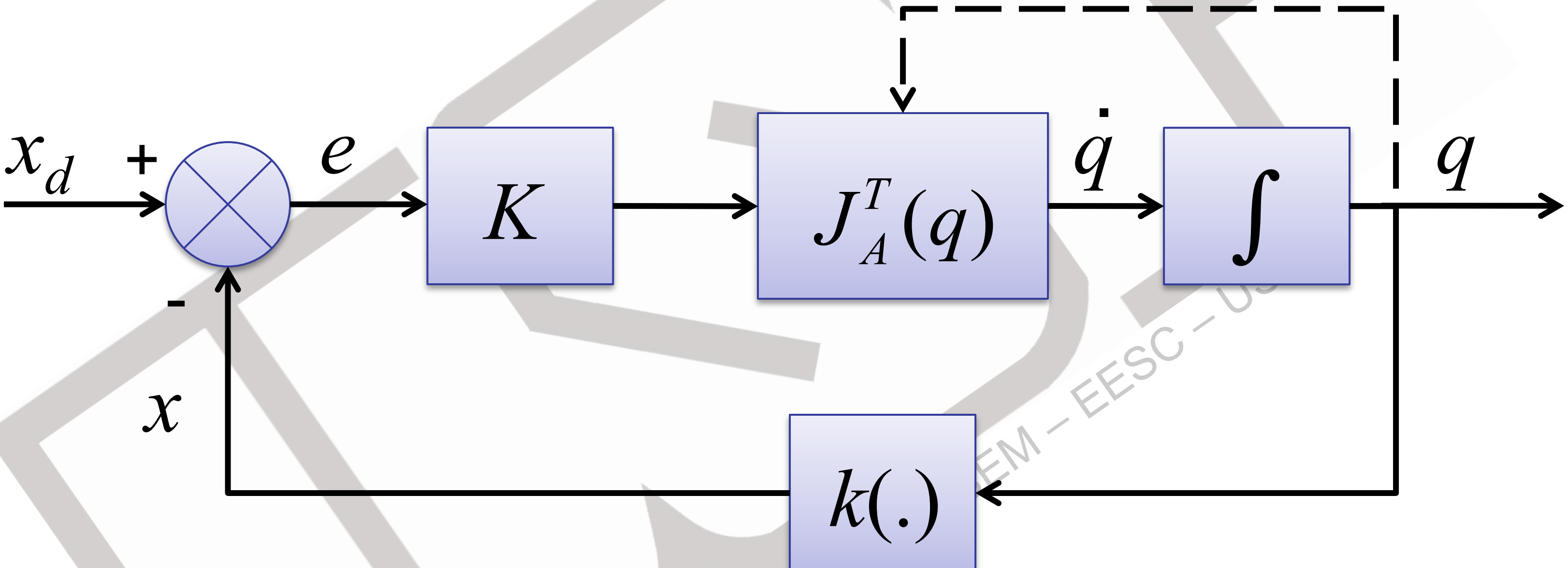
$$\dot{V} = e^T K \dot{x}_d - e^T K \dot{x} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) \dot{q}$$

Escolhendo: $\dot{q} = J_A^T(q) K e$

$$\boxed{\dot{V} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) J_A^T(q) K e}$$

Para valores constantes ($\dot{x}_d = 0$) resulta em valores negativos.

Transposta do Jacobiano



$$\dot{q} = J_A^T(q)Ke$$

Transposta do Jacobiano

- Exige apenas o cálculo das funções da cinemática direta;
- Se o rank não é nulo, a derivada das funções de Lyapunov podem ser obtidas pela pseudo-inversa do Jacobiano;
- Em qualquer caso, o erro pode ser mantido limitado. Ele será tão menor quanto for maior a norma da matriz de ganhos K.
- Todavia, a implementação do algoritmo em tempo discreto impõe o uso do limite superior da norma de K.

Sumário da Aula

- Definições
- "Propagação" da Velocidade
- Jacobianos
- Singularidades
- Forças Estáticas
- **Exercícios Recomendados**
- Bibliografia Recomendada

Exercícios Recomendados

- Exercícios Recomendados:
  - Livro do Craig (2005): pp. 160-164

- Na aula: 5.18 – página 161

Sumário da Aula

- Definições
- “Propagação” da Velocidade
- Jacobianos
- Singularidades
- Forças Estáticas
- Exercícios Recomendados
- **Bibliografia Recomendada**

Bibliografia Recomendada

- **Craig, J.C.**, 2005, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd Edition, Pearson Education Inc., ISBN 0-201-54361-3
- **Paul, R. P.**, 1981, *Robot Manipulators. Mathematics, Programming and Control*, The MIT Press.
- **Fu, K.S., Gonzales, R.C.**, and **Lee, C.S.G.**, 1987, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*, McGraw-Hill Int. Editions, ISBN 0-07-100421-1.
- **Corke, P.**, Robotics Toolbox for MatLab (Release 7).