

Modelagem em Engenharia C & A

Aula 6 - Modelos Estatísticos/Estocásticos
Aleatoriedade

- Estatística: estudo dos fenômenos a partir de seus indicadores amostrais
- Probabilidade: comportamento matemático de eventos seriados
- Indicadores amostrais:
 - Média
 - Variância
 - Desvio Padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Distribuição de Frequência (Uniforme, Normal etc)

Momentos Estatísticos

- Média: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- Média Ponderada: $\bar{p} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$
- Variância: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$,
- Desvio Padrão $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ $s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2}{n-1}}$
- Coef Variação s/ Média $Cv = \frac{s}{\bar{x}}$

Estatística no Excel

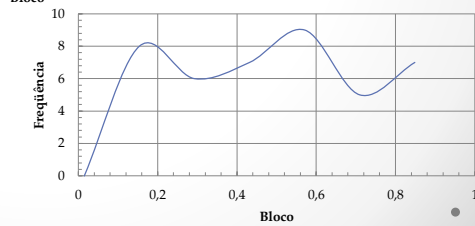
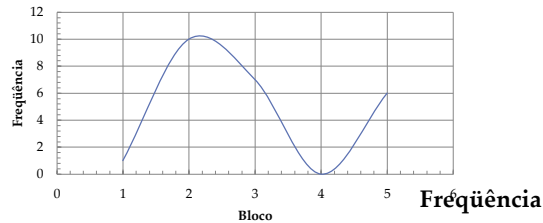
Função	Descrição
CONT.NÚM	Calcula quantos números há na lista de argumentos
CONT.SE	Calcula o número de células não vazias em um intervalo que corresponde a determinados critérios
CONT.SE2	Conta o número de células dentro de um intervalo que atende a múltiplos critérios
CONT.VALORES	Calcula quantos valores há na lista de argumentos
CONT.VAZIO	Conta o número de células vazias no intervalo especificado
CORREL	Retorna o coeficiente de correlação entre dois conjuntos de dados
COVARIACÃO.P	Retorna a covariância, a média dos produtos dos desvios pares
COVARIACÃO.S	Retorna a covariância de exemplo, a média de desvio de produtos para cada par de pontos de dados em dois conjuntos de dados
CRIT	Retorna valores ao longo de uma distribuição exponencial
DESV.MÉDIO	Retorna a curtose de um conjunto de dados
DESV.PAD.A	Retorna a média aritmética dos desvios médios dos pontos de dados a partir de sua média
DESV.PAD.P	Calcula o desvio padrão com base na população total
DESV.PAD.S	Retorna o desvio padrão com base em uma amostra, inclusive números, texto e valores lógicos
DESV.PADPA	Calcula o desvio padrão com base na população total, inclusive números, texto e valores lógicos
DESVQ	Retorna a soma dos quadrados dos desvios
DIST.BETA	Retorna a função de distribuição cumulativa beta
DIST.BIN.NEG.N	Retorna a distribuição binomial negativa
DIST.E	Retorna a distribuição de probabilidade E
DIST.F	Retorna a distribuição de probabilidade F
DIST.GAMA	Retorna a distribuição gama
DIST.HIPEERGEOM.N	Retorna a distribuição hipergeométrica
DIST.LOGNORMAL.N	Retorna a distribuição lognormal cumulativa
DIST.NORM.N	Retorna a distribuição cumulativa normal
DIST.NORM.S	Retorna a distribuição cumulativa normal padrão
DIST.POISSON	Retorna a função de densidade de probabilidade beta cumulativa
DIST.QUICQUA	Retorna a probabilidade unicaudal da distribuição qui-quadrada
DIST.QUICQUA.CD	Retorna os Pontos Percentuais (probabilidade) para a distribuição t de Aluno
DIST.T	Retorna os Pontos Percentuais (probabilidade) para a distribuição t de Aluno
DIST.T.BC	Retorna a distribuição t de Student
DIST.T.CD	Retorna a distribuição de Weibull
DIST.WEIBULL	Retorna a distribuição de uma distribuição
DISTORÇAO	Retorna a inclinação de uma distribuição com base em uma população: uma caracterização do grau de assimetria
DISTORÇAO.P	Retorna a probabilidade de função de distribuição binomial do termo individual
DISTR.BINOM	Retorna a distribuição de probabilidade binomial
DISTR.EXPON	Retorna a distribuição exponencial
EIGAL	Retorna o valor padrão de valores previsto para cada x da regressão
FISHER	Retorna a transformação Fisher
FISHERINV	Retorna o inverso da transformação Fisher
GAMA	Retorna o valor da função GAMA
GAMA.D	Retorna a distribuição de probabilidade cumulativa normal padrão
GAMA.P	Retorna a inclinação da linha de regressão linear
INCLINAÇÃO	Retorna o intervalo de confiança para um meio de preenchimento, usando a distribuição t de Student
INT.CONFIANÇA.T	Retorna a interceptação da linha de regressão linear
INTERSEÇÃO	Retorna a probabilidade de um resultado de teste usando uma distribuição binomial
INTERV.DISTR.BINOM	Retorna o inverso de função de distribuição cumulativa para uma distribuição beta especificada
INV.BETA	Retorna o menor valor para o qual a distribuição binomial cumulativa é menor ou igual ao valor padrão
INV.BINOM	Retorna o inverso da distribuição de probabilidades E
INV.F	Retorna o inverso da distribuição de probabilidades F
INV.F.CD	Retorna o inverso da distribuição de probabilidades F
INV.GAMA	Retorna o inverso da distribuição cumulativa gama
INV.LOGNORMAL	Retorna o inverso da distribuição cumulativa lognormal
INV.NORM.N	Retorna o inverso da distribuição cumulativa normal
INV.NORM.S	Retorna o inverso da distribuição cumulativa normal padrão
INV.QUICQUA	Retorna a função de densidade da probabilidade beta cumulativa
INV.QUICQUA.CD	Retorna o valor t da distribuição t de Aluno como uma função da probabilidade e dos graus de liberdade
INV.T	Retorna o inverso da distribuição t de Aluno como uma função da probabilidade e dos graus de liberdade
INV.T.BC	Retorna o logaritmo natural da função gama, Γ(x)
LOGGAMA	Retorna o logaritmo natural da função gama, Γ(x)
LOGGAMA.PRECISO	Retorna o logaritmo natural da função gama, Γ(x)

Séries de Eventos e Histograma

1	0.634893
2	0.815818
3	0.003581
4	0.912821
5	0.54144
6	0.891399
7	0.999131
8	0.71514
9	0.451001
10	0.822834
11	0.499316
12	0.665048
13	0.32351
14	0.773151
15	0.816532
16	0.559863
17	0.265973
18	0.327241
19	0.581793
20	0.285468
21	0.573319
22	0.080842
23	0.886603
24	0.516927
25	0.187636
26	0.155062
27	0.434984
28	0.368469
29	0.590735
30	0.422953
31	0.505837
32	0.488294
33	0.198953
34	0.369941
35	0.701763
36	0.054238
37	0.725216
38	0.134985
39	0.885988
40	0.492806
41	0.678199
42	0.905747
43	0.460203
44	0.881011
45	0.36508
46	0.058813
47	0.742017
48	0.657209
49	0.203372
50	0.113749

- Menu – Análise de Dados - Histograma

Frequência

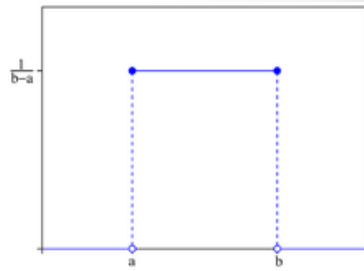


Distribuição de Frequências

- Uniforme

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b, \\ 0 & , c.c. \end{cases}$$

$$F(k; a, b) = \frac{[k] - a + 1}{b - a + 1}$$



- Aplicação: gerador de números aleatórios
- Função no excel: ALEATORIO() ou ALEATORIOENTRE ()

Distribuição de Frequências

- **Uniforme**

Uma variável aleatória x tem distribuição uniforme sobre um intervalo $[a, b]$, se sua função densidade de probabilidade (fdp) é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

A técnica mais utilizada para a obtenção de uma variável aleatória uniformemente distribuída é a da transformação inversa. A fórmula é a seguinte:

$$x = a + (b-a)R$$

Os parâmetros necessários para a obtenção de uma variável com distribuição uniforme são apenas os valores extremos do intervalo $[a, b]$. Uma vez definidos, os seguintes passos devem ser considerados:

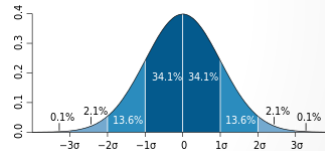
Gerar R ;

Calcular $x = a + (b-a)R$

Distribuição Normal

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0.$$

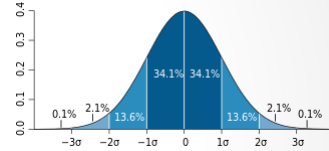
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Distribuição Normal

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0.$$

A transformação de Box-Müller é um método utilizado para gerar duas distribuições normal-padrão independentes, dado um conjunto de dados aleatórios uniformemente distribuídos.



Método de Box-Muller

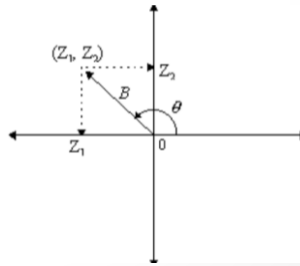
$$Z_1 = B \cos \theta$$

$$Z_2 = B \sin \theta$$



$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln R_1} \cos(2\pi R_2)$$

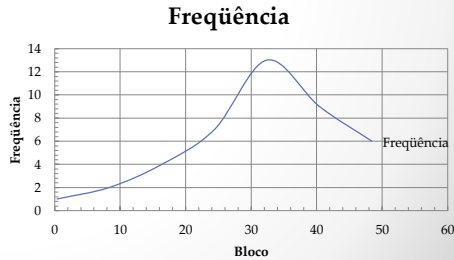
$$Z_2 = \sqrt{-2 \ln R_1} \sin(2\pi R_2)$$



Série de Vazões em um Rio

ANO	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1949	259	271	307	214	148	73	45	21	13	42	68	100
1950	70	196	420	472	232	82	73	59	47	81	155	291
1951	328	244	302	179	175	113	95	76	59	75	75	179
1952	189	262	434	245	139	127	106	85	80	77	100	95
1953	90	113	152	147	70	64	55	45	42	38	63	94
1954	90	160	126	91	80	58	50	40	33	28	68	119
1955	310	365	378	449	172	156	133	107	82	176	259	473
1956	316	436	441	447	409	303	189	158	64	69	175	273
1957	291	374	676	544	292	176	134	108	92	85	123	188
1958	179	261	224	239	165	129	128	100	95	112	95	206
1959	295	234	310	307	207	122	95	97	94	102	150	135
1960	164	336	334	273	182	127	105	84	80	101	168	187
1961	330	476	429	212	216	148	119	97	80	79	107	231
1962	318	270	365	249	194	133	105	84	68	123	117	305
1963	287	488	266	194	137	111	92	75	63	53	87	65
1964	326	405	281	211	178	112	94	76	67	137	147	242
1965	278	269	404	391	239	177	143	115	95	192	203	226
1966	333	304	438	321	224	179	138	109	99	129	124	244
1967	280	310	417	310	206	161	127	101	99	91	224	386
1968	306	481	512	293	220	167	139	110	88	92	141	261
1969	317	328	270	166	161	97	81	54	47	88	279	269
1970	564	413	483	344	223	172	148	113	108	117	193	157
1971	146	151	232	230	133	105	76	62	66	112	236	369
1972	259	362	422	284	181	142	119	109	76	156	262	525
1973	437	424	507	471	281	209	167	129	115	267	382	353
1974	407	252	372	643	364	264	201	164	128	143	130	236
1975	333	365	239	360	182	140	143	113	99	118	153	244
1976	200	170	248	184	166	105	87	74	102	133	242	455
1977	444	488	290	296	247	163	122	102	114	117	158	196
1978	392	290	419	261	218	168	135	108	100	125	198	330
1979	555	560	460	320	250	219	182	152	170	146	191	205
1980	512	748	428	323	245	203	169	139	123	75	190	221
1981	316	219	344	344	214	176	139	110	92	264	444	347
1982	549	490	612	559	364	273	220	201	191	308	253	346
1983	493	682	690	463	302	246	209	167	162	200	261	283
1984	337	313	375	291	195	137	112	103	119	129	165	254
1985	474	354	483	393	230	185	164	128	128	171	227	277
1986	408	378	377	254	207	138	122	127	94	109	120	224
1987	318	296	392	304	186	131	105	84	90	110	344	558
1988	418	668	510	603	365	223	221	163	144	176	230	249
1989	241	298	295	175	126	98	84	93	93	90	243	697
1990	523	437	342	255	229	144	127	114	92	107	153	112
1991	202	225	425	347	152	116	117	94	89	90	83	234
1992	348	442	462	481	219	174	148	121	129	180	232	335
1993	221	454	409	245	185	150	117	108	106	102	117	247

Bloco	Freqüência
0.39294	1
8.393949	2
16.39496	4
24.39597	7
32.39697	13
40.39798	9
48.39899	6
Mais	7



Rotina para Gerar Histograma 'Normal'

```
////////////////////////////////////
```

```
'Faz Histograma - Freq Acumulada
```

```
Sub Histograma_R(Optional ByVal incells As Variant, Optional ByVal
numclasses As Variant, Optional ByVal outcells As Variant, Optional ByVal
op_plota As Variant)
```

```
Dim r As Range, output As Range, plota As Boolean
```

```
Dim i As Integer, j As Integer
```

```
Dim rmax As Double, rmin As Double, rband As Double
```

```
Dim M As Integer, N As Integer
```

```
Dim cl() As Double
```

```
Dim maisprovavel As Double
```

```
Dim soma As Double, somaq As Double, media As Double, devP As
```

```
Double, moda As Double
```

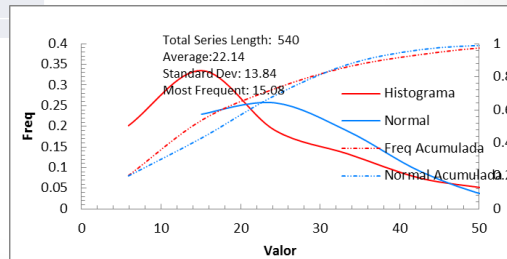
```
Dim NP As Long
```

- If IsMissing(numclasses) Then

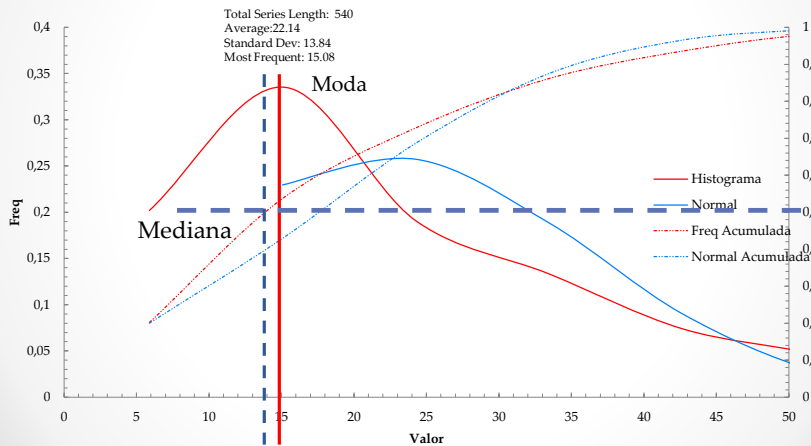
```
Set r = Application.InputBox(prompt:="Enter Data Matrix:", Type:=8)
```

Resultado

Valor	ia	Frequênc	Acumul	Dist	Normal	Normal Acumul
5.89375	0.201852	0.201852				0.199849
15.08125	0.335185	0.537037	0.229448	0.429297		
24.26875	0.190741	0.727778	0.25716	0.686457		
33.45625	0.133333	0.861111	0.188436	0.874893		
42.64375	0.074074	0.935185	0.090255	0.965148		
51.83125	0.046296	0.981481	0.028243	0.993391		
61.01875	0.007407	0.988889	0.00577	0.99916		
70.20625	0.009259	0.998148	0.000769	0.999929		
74.8	0.001852	1	5.31E-05	0.999982		



Moda e Mediana



Geração de Séries sintéticas

- A simulação estocástica visa imitar ou replicar o comportamento de sistemas complexos explorando a sua aleatoriedade para obter cenários das possíveis saídas desses sistemas.
- Devido a aleatoriedade envolvida, os métodos de simulação são também conhecidos como métodos de Monte Carlo.

Geração de Séries sintéticas

Os dois principais requisitos para os métodos de simulação de Monte Carlo são:

- Possuir o conhecimento das distribuição de probabilidade das variáveis de entrada do sistema.
- Possuir um gerador de números aleatórios para gerar cenários das variáveis de entrada do sistema.

Geração de Séries sintéticas

- Cadeia de Markov

Em matemática, uma cadeia de Markov é um caso particular de processo estocástico com estados discretos (o parâmetro, em geral o tempo, pode ser discreto ou contínuo) com a propriedade de que a distribuição de probabilidade do próximo estado depende apenas do estado atual e não na sequência de eventos que precederam, uma propriedade chamada de Markoviana

Geração de Séries sintéticas

- Cadeia de Markov

$$x_j = \bar{x}_j + r_{i,j}(\bar{x}_j - x_i) + z \cdot s_j$$

- x_j = valor calculado para a hora j
- $r_{i,j}$ = coef angular da reta de tendência entre i,j
- Z = variável aleatória de distribuição normal
- S = desvio padrão de x na hora j

Exercício 4

- Dimensionar, considerando a série pluviométrica fornecida, a área de captação e o tanque para armazenamento de água de chuva de um lava-jato que consome 90m³/mês de água com uma variação típica de +- 10%. E 10% de perdas do volume armazenado.

Área do Telhado	500 m ²				
Vol Reservat	100 m ³				
Consumo	30 m ³ /mês				
Desvio Padrão	10				
Falhas 13 meses					
% 1% total					
Mês	Chuva	Vo	Vol cap	Vol Consu	Vol Final
1	233.8435	100	116.9218	27.67811	100
2	272.9696	100	136.4848	47.56244	100
3	171.0179	100	85.50897	21.43162	100
4	12.65712	100	6.328562	13.01048	93.31808
5	70.92908	93.31808	35.46454	21.5235	100
6	91.93252	100	45.96626	36.43333	100
7	43.03348	100	21.51674	13.66081	100

