EAE 5706: Microeconomia II
Departamento de Economia – FEA/USP
Lista de Exercícios – Teoria dos Jogos
Respostas

Lista 2, Exercício 7. Vide notas da aula 5.

Lista 2, Exercício 8. Em aula demonstramos que existe um equilíbrio em estratégias mistas em que a firma 1 escolhe $s_1 = c_2$ e a firma 2 escolhe valores no intervalo $[c_2, c_2 + \varepsilon]$ de acordo com uma distribuição uniforme. Observe que por meio de um argumento semelhante é possível construir um *continuum* de equilíbrios em que para qualquer $\widetilde{c} \in (c_1, c_2)$ a firma 1 escolhe $s_1 = \widetilde{c}$ e a firma 2 escolhe valores em $[\widetilde{c}, \widetilde{c} + \varepsilon]$ de acordo com uma distribuição uniforme. Note, porém, que em todos esses equilíbrios a firma 2 utiliza uma estratégia fracamente dominada (por que?).

Lista 2, Exercício 9. Um possível equilíbrio assimétrico no leilão do tipo "*common value all-pay auction*" seria um em que o jogador 1 escolhe $s_1 = 0$ e os demais empregam uma estratégia mista caracterizada pela seguinte distribuição de probabilidade:

$$F(x) = \left(\frac{x}{v}\right)^{\frac{1}{I-2}}, \qquad \text{com } x \in [0, v]$$

Lista 2, Exercício 10. Observe que se $\theta < 0$, então "*Invest*" é uma estratégia estritamente dominada para ambos os jogadores, de forma que ("*Not Invest*", "*Not Invest*") é o único equilíbrio de Nash. Se $\theta > 1$, então "*Not Invest*" é uma estratégia estritamente dominada para ambos os jogadores, de forma que ("*Invest*", "*Invest*") é o único equilíbrio de Nash. Se $0 < \theta < 1$, então existem dois equilíbrios de Nash em estratégias puras, ("*Not Invest*", "*Not Invest*") e ("*Invest*", "*Invest*"), e um equilíbrio de Nash em estratégias estritamente mistas (caracterize esses equilíbrios!).[1]

Lista 3, Exercício 4. A solução para o threshold k deve satisfazer a seguinte equação:

$$k = \frac{2 - 8k}{\varepsilon k},$$

com $k \in [0, 1]$. Resolvendo a igualdade acima, obtemos:

$$k = \frac{\sqrt{64 + 8\varepsilon} - 8}{2\varepsilon}$$

[1] Este jogo é discutido por Morris (2008) – "Global Games" em *The New Palgrave Dictionaty of Economics.*

Lista 3, Exercício 5. Observe que uma estratégia para Bob especifica uma escolha para cada um de seus tipos. Portanto, Bob possui quatro estratégias puras, a saber: CC, CN, NC e NN. Considere cada um dos seguintes casos:

(1) Suponha que Bob escolha CC. Neste caso, Ann prefere casar se:

$$\alpha 5 + (1-\alpha)(-3) \geq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \geq \frac{3}{8}$$

Assim, temos que:

i. Se $\alpha \geq \frac{3}{8}$, então a estratégia ótima para Ann é C. Dado que Ann escolhe casar, a estratégia ótima para Bob é CC. Portanto, se $\alpha \geq \frac{3}{8}$, então (C, CC) é um BNE.

ii. Se $\alpha \leq \frac{3}{8}$, então a estratégia ótima para Ann é N. Dado que Ann escolhe não casar, uma estratégia ótima para Bob é CC. Portanto, se $\alpha \leq \frac{3}{8}$, então (N, CC) é um BNE.

(2) Suponha que Bob escolha CN. Neste caso, Ann prefere casar se:

$$\alpha 5 + (1-\alpha)\, 0 \geq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \geq 0$$

Assim, temos que:

i. Se $\alpha \geq 0$, então a estratégia ótima para Ann é C. Note que, neste caso, dado que Ann escolhe casar, Bob teria incentivo para desviar para CC, a menos que $\alpha = 1$. Portanto, se $\alpha = 1$, então (C, CN) é um BNE.

ii. Se $\alpha = 0$, então também é ótimo para Ann escolher N. Dado que Ann escolhe não casar, uma estratégia ótima para Bob é CN. Portanto, se $\alpha = 0$, então (N, CN) é um BNE.

(3) Suponha que Bob escolha NC. Neste caso, Ann prefere não casar se:

$$\alpha 0 + (1-\alpha)(-3) \leq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \leq 1$$

Assim, temos que:

i. Se $\alpha \leq 1$, então a estratégia ótima para Ann é N. Dado que Ann escolhe não casar, uma estratégia ótima para Bob é NC. Portanto, (N, NC) é um BNE para qualquer α.

ii. Se $\alpha = 1$, então também é ótimo para Ann escolher C. Mas, neste caso, dado que Ann escolhe casar, Bob teria incentivo para desviar para CC (contradição).

(4) Suponha que Bob escolha NN. Neste caso, Ann está indiferente entre casar e não casar. Assim, temos que:

i. Se Ann escolher C, Bob teria incentivo para desviar para CC (contradição).

ii. Se Ann escolher N, então uma estratégia ótima para Bob é NN. Portanto, (N, NN) é um BNE para qualquer α.

Uma outra forma de resolver esta questão seria analisar o jogo na forma normal:

		Bob			
		CC	CN	NC	NN
Ann	C	$-3+8\alpha, 3+2\alpha$	$5\alpha, 5\alpha$	$-3+3\alpha, 3-3\alpha$	$0, 0$
	N	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$

Lista 3, Exercício 6. Considere um mecanismo de aleatorização privado baseado no lançamento de um dado de três faces, em que cada resultado com as seguintes probabilidades:

Face	Prob.
1	1/4
2	1/2
3	1/4

O mecanismo "recomenda" Bob escolher D quando o resultado do lançamento é 1 e C quando o resultado é 2 ou 3; por outro lado, ele "recomenda" Ann jogar C quando o resultado do lançamento é 1 ou 2 e D quando o resultado é 3. Note que o mecanismo induz a seguinte distribuição de probabilidade sobre os resultados do jogo:

	C	D
C	1/2	1/4
D	1/4	0

É possível mostrar que ambos os jogadores possuem incentivo para seguir as recomendações do mecanismo. Em equilíbrio, o payoff esperado de cada jogador é $5\frac{1}{4}$.

Lista 4, Exercício 5. Dica: Desenhe de forma esquemática o jogo na forma extensiva. Note que este jogo possui 10 subjogos próprios. Utilize o procedimento de backward induction generalizado para encontrar os equilíbrios identificados no livro de respostas.

Lista 4, Exercício 10. Representando o jogo na forma normal, é possível mostrar que o conjunto de equilíbrios de Nash (NE) é dado por: (M, L), (L, R) e $(L, (\phi, 1-\phi))$, com $\phi \in [0, \frac{3}{5}]$. O conjunto de equilíbrios perfeitos de subjogo (SPNE) é identico ao conjunto de equilíbrios de Nash, pois o jogo não possui subjogos próprios. O conjunto de *weak perfect Bayesian equilibria* (wPBE), por sua vez, é dado pelas seguintes combinções de perfis de estratégias e crenças: $((M, L),\ \mu_M = 1)$, $((L, R),\ \mu_M \leq \frac{1}{2})$ e $((L, (\phi, 1-\phi)),\ \mu_M = \frac{1}{2})$.

Lista 4, Exercício 11. O conjunto dos *weak perfect Bayesian equilibria* deste jogo é dado por: $((G, G'), R), \mu_x = \frac{1}{3})$ e $(((S, S'), L), \mu_x \geq \frac{2}{5})$. Note que no caso do segundo equilíbrio, o conjunto de informação do jogador 2 não é alcançado em equilíbrio, de forma que as crenças não precisam ser derivadas por meio da regra de Bayes.

Lista 4, Exercício 12. Vide notas da aula 10.