Mecânica Quântica — 7600022

Terceira Lista — teste no dia 19/8/2017

1. Suponha que você comece com uma base $(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle)$ que não é ortonormal. O procedimento de Gram-Schmidt é um ritual sistemático para gerar uma base ortonormal $(|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \ldots, |\phi_n\rangle)$ a partir da outra.

   (a) Normalize o primeiro vetor da base:

   $$|\phi_1\rangle = \frac{|\phi_1\rangle}{||\phi_1||}.$$

   (b) Subtraia do segundo vetor a projeção do segundo vetor sobre o primeiro, alinhada com o primeiro:

   $$|\phi_2\rangle - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_2\rangle.$$

   Esse vetor é ortogonal a $|\phi_1\rangle$. Normalize-o para encontrar $|\phi_2\rangle$.

   (c) Subtraia de $|\phi_3\rangle$ suas projeções ao longo de $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$:

   $$|\phi_3\rangle - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_3\rangle - |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_3\rangle.$$

   Esse vetor é ortogonal a $|\phi_1\rangle$ e a $|\phi_2\rangle$. Normalize-o para encontrar $|\phi_3\rangle$. E assim por diante. Use o procedimento de Gram-Schmidt para ortonormalizar a base de três vetores

   $$|e_1\rangle = (1+i)\hat{\imath} + (1)\hat{\jmath} + (i)\hat{k},$$
   $$|e_2\rangle = (i)\hat{\imath} + (3)\hat{\jmath} + (1)\hat{k},$$
   $$|e_3\rangle = (0)\hat{\imath} + (28)\hat{\jmath} + (0)\hat{k}.$$

2. Usando a base canônica $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ de vetores em três dimensões,

   (a) Construa a matriz que representa uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo z (considere os ângulos medidos no sentido anti-horário, olhando para baixo ao longo do eixo, de z positivo para z negativo).

   (b) Construa a matrix representando uma rotação de 120^o (sentido anti-horário, como no item anterior) em torno do eixo que passa pela origem e pelo ponto $(1, 1, 1)$.

   (c) Construa a matrix representando uma reflexão no plano $x - y$.

   (d) As translações ($x \to x + x_0$, $y \to y + y_0$, $z \to z + z_0$) são transformações lineares? Se sim, encontre as matrizes que as representem; se não, explique por que.

3. Se os operadores A e B forem Hermitianos, o produto AB também será Hermitiano? Especifique a condição que A e B precisam satisfazer, se for necessário.

4. Calcule os comutadores *Dica: aplique cada comutador a uma função $\psi(x)$, qualquer.*

   (a) $[X, P]$

   (b) $[X, P^2]$

5. Dada a base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle, \ldots\}$constituída pelos autovetores do Hamiltoniano H do poço infinito que se estende de $x = -a/2$ a $x = a/2$,

   (a) Calcule todos os elementos de matriz $\langle\varphi_j|H|\varphi_\ell\rangle$ $(j = 1, 2, \ldots; \ell = 1, 2, \ldots)$.

   (b) Escreva o Hamiltoniano na forma $H = \sum_j \alpha_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$, onde os α_j são constantes que você deve determinar. *Dica: para encontrar os α_j, calcule os elementos de matriz de A e compare com o resultado do item anterior.*

(c) Escreva H^2 na forma $H^2 = \sum_j \beta_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$, onde os β_j são constantes que você deve determinar.

6. Escreva uma aproximação para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-a/2 < x < -a/4) \\ 1 & (-a/4 < x < a/4) \\ 0 & (a/4 < x < a/2) \end{cases}$$

na forma $f(x) = \alpha_1|\varphi_1\rangle + \alpha_2|\varphi_2\rangle + \alpha_3|\varphi_3\rangle$, onde a base é a dos estados no problema anterior, e você deve calcular os coeficientes α_j $(j = 1, 2, 3)$.

7. Calcule o elemento de matriz $\langle\varphi_1|P|\varphi_2\rangle$, onde $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$ são os vetores definidos no problema 5.

8. Dado um operador Hermitiano A e dados dois de seus autovetores não degenerados, mostre que eles são ortogonais.

9. Considere o operador Π, de paridade, definido pela igualdade $\Pi f(x) = f(-x)$

   (a) Mostre que Π é Hermitiano;

   (b) Podemos dizer que seus autovetores são ortogonais entre si? Explique por quê.

10. Sejam A e B dois operadores Hermitianos. Sabe-se que todos os autovetores de A são também autovetores de B. Mostre que $[A, B] = 0$. *Dica: chame os autovetores de A de $|\phi_j\rangle$ e calcule $\langle\phi_j|AB|\phi_\ell\rangle$ e $\langle\phi_j|BA|\phi_\ell\rangle$ para j e ℓ quaisquer.*