EAE 5706: Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Aula 10: Jogos Dinâmicos: Weak Perfect Bayesian Equilibrium

Marcos Y. Nakaguma

11/09/2017

Revisão

- Na aula passada, definimos um sistema de crenças μ em um jogo extensivo Γ_E como um conjunto de probabilidades $\mu(x) \in [0,1]$ para cada nodo de decisão x em Γ_E tal que:

$$\sum_{x \in H} \mu(x) = 1$$

- Um perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ é sequencialmente racional em um conjunto de informação H dado um sistema de crenças μ se:

$$\mathbb{E}[u_i | H, \mu, \sigma_{\iota(H)}, \sigma_{-\iota(H)}] \geq \mathbb{E}[u_i | H, \mu, \widetilde{\sigma}_{\iota(H)}, \sigma_{-\iota(H)}]$$

para todo $\widetilde{\sigma}_{\iota(H)} \in \Delta(S_{\iota(H)})$, onde $\iota(H)$ denota o jogador que se move no conjunto de informação H.

Revisão

- Um perfil de estratégias e um sistema de crenças (σ,μ) é um weak perfect Bayesian equilibrium (weak PBE) se (σ, μ) satisfaz as seguintes propriedades:

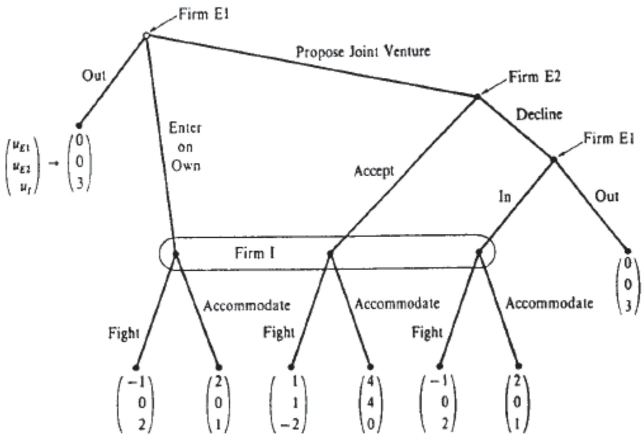
  i. O perfil de estratégias σ é sequencialmente racional dado o sistema de crenças μ.

  ii. O sistema de crenças μ é derivado, sempre que possível, a partir do perfil de estratégias σ através da regra de Bayes, i.e. para qualquer conjunto de informação H com $\Pr(H|\sigma) > 0$, temos que:

$$\mu(x) = \frac{\Pr(x|\sigma)}{\Pr(H|\sigma)} \quad \text{para todo } x \in H$$

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Exemplo 2: Considere o seguinte jogo de entrada com joint venture:



Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- O único weak PBE deste jogo é constituído pelo perfil de estratégias:

$$\sigma_{E1} = (\text{"}\textit{propose joint venture}\text{"}, \text{"}\textit{in}\text{"})$$

$$\sigma_{E2} = (\text{"}\textit{accept}\text{"})$$

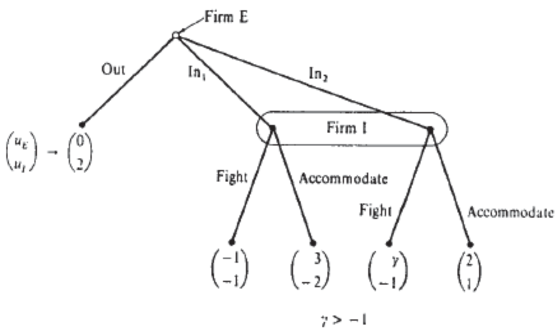
$$\sigma_{I} = (\text{"}\textit{accommodate}\text{"})$$

e pelo seguinte sistema de crenças:

$$\mu(\text{"}\textit{middle node}\text{"}) = 1$$

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Exemplo 3: Jogo de Entrada (Modificado)
  - Considere a seguinte versão do jogo de entrada:



  - Observe que, neste caso, a firma incumbente está disposta a "lutar" caso a firma entrante escolha "in$_1$". Vamos assumir que $\gamma > 0$.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)
  - Denote a estratégia da firma incumbente por $\sigma_F \in [0,1]$ e a estratégia da firma entrante por $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \in [0,1]^3$.
  - Suponha que o sistema de crenças da firma incumbente atribua probabilidade $\mu \in [0,1]$ ao evento de que a firma entrante utilize a estratégia "in$_1$".
  - Observe, primeiro, que $\sigma_0 > 0$ nunca pode fazer parte de um equilíbrio, pois "in$_2$" domina estritamente "out". Portanto, $\sigma_0 = 0$ e o conjunto de informação da firma incumbente é alcançado com probabilidade 1.
  - Vamos, agora, analisar a estratégia ótima da firma incumbente. Dada a estratégia da firma rival, σ_1 e σ_2, e o sistema de crenças, μ, quando a firma prefere escolher "lutar" ou "acomodar"?

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)
  - Note que dada a crença μ, a firma incumbente prefere "lutar" com probabilidade positiva se, e somente se:

$$\mu(-1) + (1-\mu)(-1) \geq \mu(-2) + (1-\mu).1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \quad -1 \geq 1 - 3\mu \Rightarrow \mu \geq \frac{2}{3}$$

Portanto, existem três casos relevantes a serem analisados.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)

1. Primeiro, suponha que $\mu > \frac{2}{3}$.
   - ★ Neste caso, a firma incumbente deve escolher "lutar" com probabilidade 1, de forma que a melhor resposta da firma entrante (estratégia sequencialmente racional) é "in$_2$".
   - ★ Porém, para que as crenças sejam consistente com as estratégias da firma entrante, devemos ter que $\mu = 0$ (contradição).
   - ★ Portanto, não existe um weak PBE com $\mu > \frac{2}{3}$.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)

  2. Segundo, suponha que $\mu < \frac{2}{3}$.

     ★ Neste caso, a firma incumbente deve escolher "acomodar" com probabilidade 1, de forma que a melhor resposta da firma entrante (estratégia sequencialmente racional) é "in_1".

     ★ Porém, para que as crenças sejam consistente com as estratégias da firma entrante, devemos ter que $\mu = 1$ (contradição).

     ★ Portanto, não existe um weak PBE com $\mu < \frac{2}{3}$.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)

  3. Suponha, então, que $\mu = \frac{2}{3}$.

     ★ Neste caso, a firma incumbente está exatamente indiferente entre "lutar" e "acomodar".

     ★ Note que, para que as crenças sejam consistentes com as estratégias da firma entrante, esta deve escolher entre "in_1" e "in_2" com probs. $\sigma_1 = \frac{2}{3}$ e $\sigma_2 = \frac{1}{3}$, respectivamente.

     ★ Assim, dada a estratégia da firma incumbente (σ_F), a firma entrante deve estar indiferente entre "in_1" e "in_2". Portanto, σ_F deve ser tal que:

$$\sigma_F(-1) + (1 - \sigma_F).3 = \sigma_F.\gamma + (1 - \sigma_F).2$$
$$\Rightarrow \sigma_F = \frac{1}{2 + \gamma}$$

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)

  - Portanto, o único weak PBE deste jogo é caracterizado por:

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}),$$

$$\sigma_F = \frac{1}{2 + \gamma},$$

com:

$$\mu = \frac{2}{3}.$$

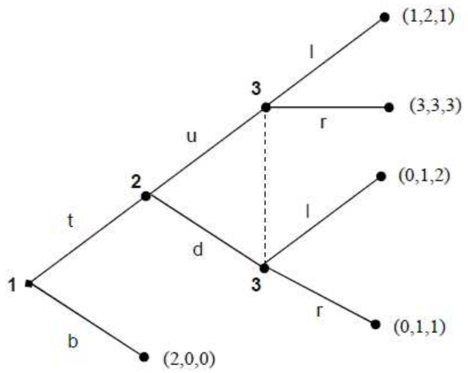
Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Com relação à comparação entre os conceitos de SPNE e weak PBE, vimos anteriormente que nem todo SPNE é um weak PBE.

- O exemplo a seguir mostra que nem todo weak PBE é um SPNE.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Exemplo 4: SPNE e Weak PBE
  - Considere o seguinte jogo na forma extensiva com três jogadores:



  - Note que o único SPNE deste jogo é (t, u, r).

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)
  - Vamos mostrar que (b,u,ℓ) faz parte de um weak PBE encontrando um sistema de crenças que suporte este perfil de estratégias como equilíbrio.
  - Observe que para que o jogador 3 prefira escolher ℓ, as suas crenças devem atribuir uma probabilidade suficientemente baixa para o nodo x_{3u}.
  - Suponha, então, que $\mu(x_{3u})=0$. Dada esta crença, o jogador 3 prefere escolher ℓ e, consequentemente, a estratégia ótima para o jogador 2 é escolher u.
  - Assim, dadas as estratégias acima, a resposta ótima do jogador 1 é b.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

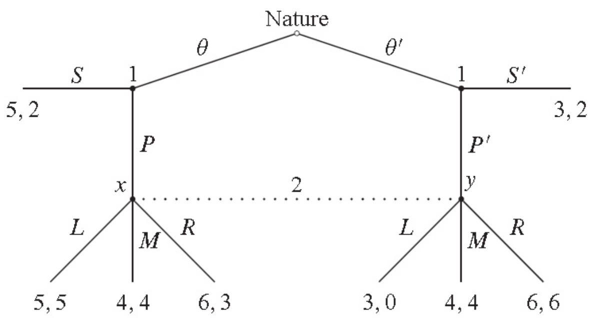
- (Cont.)
  - Note que o conjunto de informação do jogador 2 nunca é alcançado em equilíbrio. Portanto, a regra de Bayes não se aplica neste caso, de forma que $\mu\left(x_{3u}\right) = 0$ é consistente com a definição de equilíbrio.
  - O conceito de weak PBE não impõe nenhuma restrição sobre as crenças fora do equilibrium path.
  - De fato, note que (u, ℓ) não é sequer um equilíbrio de Nash no jogo simultâneo entre 2 e 3.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Proposição: Um weak PBE não é necessariamente um SPNE; e um SPNE não é necessariamente um weak PBE.

Exercício

- Considere o seguinte jogo na forma extensiva em que a Natureza escolhe θ com probabilidade $\frac{3}{4}$ e $\theta^{'}$ com probabilidade $\frac{1}{4}$:



Caracterize o conjunto de todos os weak Perfect Bayesina equilibria deste jogo.

Exercício

- Suponha que o jogador 2 atribua probabilidade $\mu \in [0, 1]$ ao evento de estar atuando no nodo de decisão esquerdo de seu conjunto de informação.

- Dada uma crença qualquer $\mu \in [0, 1]$ por parte do jogador 2, é possível mostrar que:

  i. A estratégia *L* é sequencialmente racional se, se somente se, $\mu \geq \frac{4}{5}$;

  ii. A estratégia *M* é sequencialmente racional se, se somente se, $\frac{2}{3} \leq \mu \leq \frac{4}{5}$;

  iii. A estratégia *R* é sequencialmente racional se, se somente se, $\mu \leq \frac{2}{3}$.

Exercício Resolvido

- Suponha que o jogador 1 escolha $(P, P^{'})$.

  - Neste caso, pelo requisito de consistência (regra de Bayes), a crença do jogador 2 deve ser $\mu = \frac{3}{4}$.

  - Assim, a estratégia sequencialmente racional do jogador 2 é *M*.

  - Mas se o jogador 2 escolhe *M*, então o jogador 1 terá incentivo para desviar de sua estratégia original e escolher *S* no nodo de decisão esquerdo (contradição).

Exercício Resolvido

- Suponha, em seguida, que o jogador 1 escolha $(S, P^{'})$.

  - Neste caso, pelo requisito de consistência (regra de Bayes), a crença do jogador 2 deve ser $\mu = 0$.

  - Assim, a estratégia sequencialmente racional do jogador 2 é *R*.

  - Mas se o jogador 2 escolhe *R*, então o jogador 1 terá incentivo para desviar de sua estratégia original e escolher *P* no nodo de decisão esquerdo (contradição).

Exercício Resolvido

- Suponha, então, que o jogador 1 escolha (P, S').
  - Neste caso, pelo requisito de consistência (regra de Bayes), a crença do jogador 2 deve ser $\mu = 1$.
  - Assim, a estratégia sequencialmente racional do jogador 2 é L.
  - Note que se o jogador 2 escolhe L, então a estratégia sequencialmente racional do jogador 1 é, de fato, (P, S').
  - Logo, $((P, S'), L)$, com $\mu = 1$, constitui um weak Perfect Bayesian equilibrium.

Exercício Resolvido

- Finalmente, suponha que o jogador 1 escolha (S, S').
  - Note que, neste caso, o cojunto de informação do jogador 2 não é alcançado no caminho de equilíbrio, de forma que as crenças do jogador 2 não precisam ser derivadas por meio da regra de Bayes.
  - A estratégia (S, S') é uma melhor resposta à estratégia L do jogador 2 e, esta por sua vez, será sequencialmente racional se $\mu \geq \frac{4}{5}$.
  - Logo, $((S, S'), L)$, com $\mu \geq \frac{4}{5}$, constitui um outro weak Perfect Bayesian equilibrium.

Exercício

- Um casal está se preparando para um jantar. Foi combinado que a mulher prepararia o prato principal e o homem traria uma garafa de vinho.
- O cardápio do jantar é surpresa. A mulher pode escolher preparar um dos seguintes pratos: massa, carne, peixe e salada.
- O homem deve escolher trazer um vinho tinto ou branco, sabendo que o vinho tinto combina melhor com massa e carne e que o vinho branco combina melhor com peixe e salada.

Exercício

- O casal trabalha em um mesmo escritório e, ao sairem no fim do dia, o homem observa se a mulher se direciona para a esquerda, onde se localizam as lojas para peixe e massa, ou para a direita, onde se localizam as lojas para carne e salada.

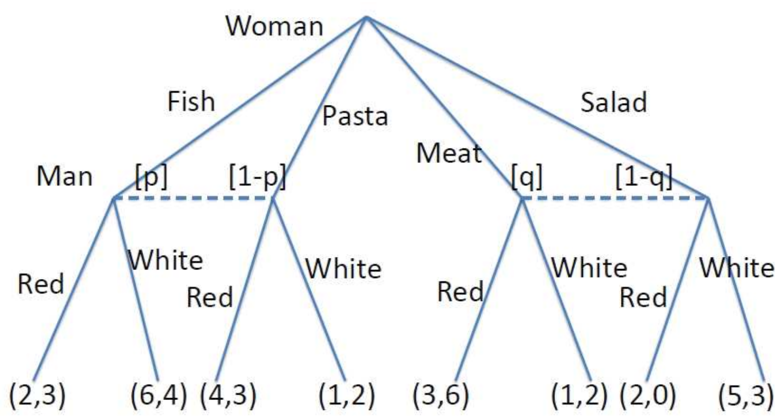
- O homem observa a direção para a qual a mulher caminha, mas não a loja em que ela faz as compras.

- Note que esta informação é relevante, pois ela possibilita ao homem formar uma expectativa (crença) sobre o que a mulher irá preparar.

- A mulher e o homem possuem preferências distintas com relação ao cardápio do jantar, porém ambos gostariam que o vinho combinasse com a comida.

Exercício

- A representação na forma extensiva deste jogo é a seguinte:



Exercício

- Qual é o comportamento ótimo dos jogadores neste caso?

- O comportamento ótimo envolve a formação de uma crença racional, por parte do homem, sobre as escolhas realizadas pela mulher.

- Dadas essas crenças, tanto o homem quanto a mulher devem escolher as suas estratégias de forma a maximizar os seus payoffs esperados.

Exercício

- Questão: Caracterize todos os equilíbrio perfeitos bayesianos em estratégias puras deste jogo. Especificamente, resolva as seguintes questões:

  a. Verifique se existe um equilíbrio em que a mulher escolhe "peixe".

  b. Verifique se existe um equilíbrio em que a mulher escolhe "massa".

  c. Verifique se existe um equilíbrio em que a mulher escolhe "carne".

  d. Verifique se existe um equilíbrio em que a mulher escolhe "salada".

Exercício Resolvido

- Para cada uma das possíveis estratégias da mulher, procederemos de acordo com a seguinte lógica:

  1. Assuma que a mulher realiza uma determinada escolha;

  2. Determine as crenças e as escolhas ótimas do homem;

  3. Verifique se a mulher possui incentivo para desviar, dada a escolha ótima do homem.

- Note que, neste jogo, o homem possui dois conjuntos de informação. Portanto, as suas crenças são caracterizadas pelos parâmetros p e q.

Exercício Resolvido

- Primeiro, suponha que a mulher escolha "peixe".

  - Neste caso, o conjunto de informação esquerdo do homem pertence ao caminho de equilíbrio, enquanto que o direito está fora do caminho de equilíbrio.

  - O requisito de que as crenças sejam consistentes com as estratégias no caminho de equilíbrio implica que $p = 1$.

  - Fora do caminho de equilíbrio, as crenças estão livres para assumir qualquer valor $q \in [0, 1]$.

  - Em princípio, podemos impor qualquer valor para q, mas a ideia é escolher uma crença que nos ajude a sustentar "peixe" como estratégia de equilíbrio.

Exercício Resolvido

- (Cont.)
  - Dada a crença $p = 1$, o homem está certo de que jogará no nodo esquerdo do seu conjunto de informação esquerdo. Neste caso, o ótimo para ele é esconher "vinho branco".
  - Assim, em equilíbrio, o par crença-estratégia do homem no conjunto de informação esquerdo é dado por $(p = 1, \text{vinho branco})$.

Exercício Resolvido

- (Cont.)
  - Em seguida, devemos verificar se, dada a estratégia do homem, a mulher tem incentivo para desviar de "peixe".
  - De forma geral, esses incentivos dependerão das crenças do homem fora do caminho de equilíbrio.
  - Neste caso, porém, a combinação de peixe e vinho branco resulta no payoff máximo para a mulher, de forma que temos certeza de que, para qualquer valor de q, ela não terá incentivo para desviar.

Exercício Resolvido

- (Cont.)
  - Ainda assim, por completude, devemos especificar as crenças e as ações do homem no conjunto de informação direito.
  - Dada uma crença q, o payoff esperado do homem associado a cada uma de suas estratégias é:

$$\mathbb{E}(\text{Vinho Tinto}) = 6.q + 0.(1-q)$$

e

$$\mathbb{E}(\text{Vinho Branco}) = 2.q + 3.(1-q)$$

  - Assim, o homem prefere escolher "vinho tinto" se, e somente se:

$$6.q + 0.(1-q) \geq 2.q + 3.(1-q) \;\Rightarrow\; q \geq \frac{3}{7}$$

Caso contrário, ele prefere escolher "vinho branco".

Exercício Resolvido

- (Cont.)
  - Portanto, temos que um equilíbrio perfeito Bayesiano deste jogo é dado por:

$$\left(\text{peixe},\ \left(p = 1,\ \text{vinho branco},\ \begin{matrix} q \geq \frac{3}{7} \\ q < \frac{3}{7} \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} \text{vinho tinto} \\ \text{vinho branco} \end{matrix}\right)\right)$$

Exercício Resolvido

- Proceda da mesma forma para encontrar o equilíbrio nos demais casos, i.e. "massa", "carne" e "peixe".

- Mostre que os seguintes perfis de estratégia e crenças também constituem um equilíbrio perfeito Bayesiano:

$$\left(\text{massa},\ \left(p = 0,\ \text{vinho tinto},\ q \geq \frac{3}{7},\ \text{vinho tinto}\right)\right)$$

$$\left(\text{salada},\ \left(p \leq \frac{1}{2},\ \text{vinho tinto},\ q = 0,\ \text{vinho branco}\right)\right)$$

- Demonstre que não existe um equilíbrio perfeito Bayesiano em que a mulher escolhe "carne".