EAE 5706: Microeconomia II

2^o Semestre de 2016
Prova 1
Duração: 2 horas

Instruções: Leia os enunciados com atenção. Comece a resolver a prova pelas questões que tiver maior facilidade. Recomenda-se alocar em torno de 40 minutos a cada questão. Boa prova!

Questão 1. Um acidente é observado por um grupo de n pessoas. Cada uma dessas n pessoas deve decidir simultaneamente e de forma independente realizar uma ligação para chamar uma ambulância. Cada pessoa deseja que o resgate seja chamado, porém prefere que uma outra pessoa faça a ligação. Especificamente, suponha que cada pessoa receba um payoff v caso a ambulância seja chamada, mas incorra em um custo c caso ela mesma realize a ligação, com $0 < c < v$. Assim, se um jogador i realizar a ligação, ele recebe um payoff $v - c$; caso contrário, o seu payoff é v se pelo menos uma outra pessoa realizar a ligação e 0 caso ninguém faça a chamada. Responda as seguintes questões:

a. Existe algum equilíbrio de Nash em estratégias puras neste jogo? Se sim, caracterize o conjunto desses equilíbrios; se não, explique por que o equilíbrio não existe. (0,75 ponto)

b. Derive o equilíbrio de Nash simétrico em estratégias mistas deste jogo. (1,5 ponto)

c. Existe um equilíbrio correlacionado em que o payoff esperado obtido por todos os jogadores é maior do que o alcançado no item anterior? Justifique a sua resposta. (0,75 ponto)

Respostas.

a. Sim, qualquer perfil de estratégias em que uma única pessoa realiza a ligação é um equilíbrio de Nash.

b. Seja p a probabilidade de uma pessoa realizar a ligação. Em um equilíbrio simétrico, a seguinte condição de indiferença deve ser satisfeita para todos os jogadores:

$$\begin{aligned} v - c &= \Pr(\text{pelo menos uma outra pessoa ligar}).v \\ &= [1 - \Pr(\text{nenhuma outra pessoa ligar})].v \\ &= \left[1 - (1-p)^{n-1}\right] v \end{aligned}$$

Assim, segue que:

$$p = 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Note que, em equilíbrio, o payoff esperado é $v - c$.

c. Sim, existe um equilíbrio correlacionado que pode ser implementado por meio de um mecanismo público de aleatorização que produz números inteiros entre 1 e n (e.g. um dado com n faces). Para cada valor sorteado, uma pessoa diferente realiza a ligação. Note que, neste caso, cada jogador é escolhida com probabilidade $\frac{1}{n}$, de forma que a utilidade esperada de cada agente é $v - \frac{1}{n}c$.

Questão 2. Suponha que Ann, uma mulher rica, está considerando casar-se com o pobretão Bob, mas não tem certeza se ele realmente a ama (probabilidade α) ou quer ficar com ela apenas por dinheiro (probabilidade $1 - \alpha$). Especificamente, Bob pode assumir dois tipos, "honesto" ou "canalha", $\theta \in \Theta = \{H, C\}$, com $\Pr(\theta = H) = \alpha$. O tipo de Bob é informação privada sua. Ambos os jogadores podem escolher casar (C) ou não casar (N). Para cada tipo de Bob, os payoffs dos jogadores são os seguintes:

Bob ($\theta = H$)

Ann	C	N
C	$5, 5$	$0, 0$
N	0.0	$0, 0$

Bob ($\theta = C$)

Ann	C	N
C	$-3, 3$	$0, 0$
N	0.0	$0, 0$

Responda as seguintes questões:

a. Defina o conceito de equilíbrio de Nash Bayesiano (em estratégias puras) para um jogo bayesiano qualquer $[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)]$. Discuta a relação entre as definições do equilíbrio de Nash Bayesiano nos estágios *ex-ante* e *ex-interim*. (0,75 ponto)

b. Represente o jogo descrito acima na forma extensiva. (0,75 ponto)

c. Caracterize o conjunto de todos os equilíbrios de Nash Bayesianos em estratégias puras do jogo descrito acima. (2,0 pontos)

Respostas.

a. Um equilíbrio de Nash Bayesiano é um perfil de estratégias $(s_1(\cdot), ..., s_I(\cdot))$ tal que para todo $i = 1, ..., I$:

$$\mathbb{E}_\theta[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})] \geq \mathbb{E}_\theta[u_i(s_i^{'}(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})]$$

para todo $s_i^{'}(\cdot) \in S_i$. Esta definição pode ser interpretada como *ex-ante* no sentido de que os jogadores escolhem as suas estratégias antes mesmo de conhecerem os seus próprios tipos. Alternativamente, poderíamos imaginar que os jogadores escolhessem as suas estratégias no estágio *ex-interim*, i.e. após conhecerem os seus tipos, mas ainda sem conhecerem os tipos dos seus oponentes. Neste caso, temos que um perfil de estratégias $(s_1(\cdot), ..., s_I(\cdot))$ é um equilíbrio de Nash Bayesiano se, e somente se, para todo i e todo $\theta_i \in \Theta_i$ que ocorre com probabilidade positiva:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})|\theta_i] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[u_i(s_i^{'}, s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})|\theta_i]$$

para todo $s_i^{'} \in S_i$.

b. Vide figura 8.E.1 (MWG, p.254).

c. Observe que uma estratégia para Bob especifica uma escolha para cada um de seus tipos. Portanto, Bob possui quatro estratégias puras, a saber: CC, CN, NC e NN. Considere cada um dos seguintes casos:

(1) Suponha que Bob escolha CC. Neste caso, Ann prefere casar se:

$$\alpha 5 + (1 - \alpha)(-3) \geq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \geq \frac{3}{8}$$

Assim, temos que:

i. Se $\alpha \geq \frac{3}{8}$, então a estratégia ótima para Ann é C. Dado que Ann escolhe casar, a estratégia ótima para Bob é CC. Portanto, se $\alpha \geq \frac{3}{8}$, então (C, CC) é um BNE.

ii. Se $\alpha \leq \frac{3}{8}$, então a estratégia ótima para Ann é N. Dado que Ann escolhe não casar, uma estratégia ótima para Bob é CC. Portanto, se $\alpha \leq \frac{3}{8}$, então (N, CC) é um BNE.

(2) Suponha que Bob escolha CN. Neste caso, Ann prefere casar se:

$$\alpha 5 + (1 - \alpha)\, 0 \geq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \geq 0$$

Assim, temos que:

i. Se $\alpha \geq 0$, então a estratégia ótima para Ann é C. Note que, neste caso, dado que Ann escolhe casar, Bob teria incentivo para desviar para CC, a menos que $\alpha = 1$. Portanto, se $\alpha = 1$, então (C, CN) é um BNE.

ii. Se $\alpha = 0$, então também é ótimo para Ann escolher N. Dado que Ann escolhe não casar, uma estratégia ótima para Bob é CN. Portanto, se $\alpha = 0$, então (N, CN) é um BNE.

(3) Suponha que Bob escolha NC. Neste caso, Ann prefere não casar se:

$$\alpha 0 + (1-\alpha)(-3) \leq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \leq 1$$

Assim, temos que:

i. Se $\alpha \leq 1$, então a estratégia ótima para Ann é N. Dado que Ann escolhe não casar, uma estratégia ótima para Bob é NC. Portanto, (N, NC) é um BNE para qualquer α.

ii. Se $\alpha = 1$, então também é ótimo para Ann escolher C. Mas, neste caso, dado que Ann escolhe casar, Bob teria incentivo para desviar para CC (contradição).

(4) Suponha que Bob escolha NN. Neste caso, Ann está indiferente entre casar e não casar. Assim, temos que:

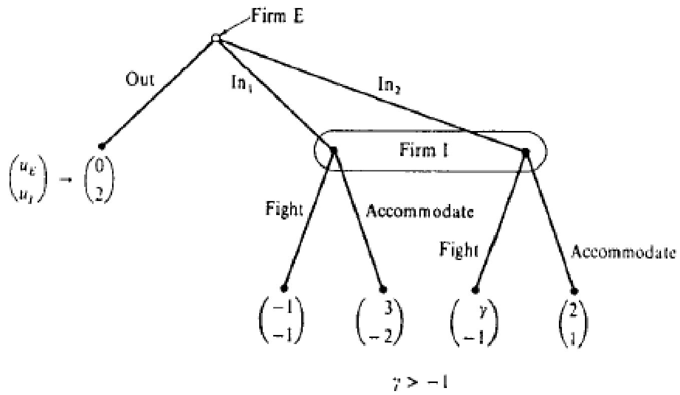
i. Se Ann escolher C, Bob teria incentivo para desviar para CC (contradição).

ii. Se Ann escolher N, então uma estratégia ótima para Bob é NN. Portanto, (N, NN) é um BNE para qualquer α.

Uma outra forma de resolver esta questão seria analisar o jogo na forma normal:

		Bob			
		CC	CN	NC	NN
Ann	C	$-3+8\alpha, 3+2\alpha$	$5\alpha, 5\alpha$	$-3+3\alpha, 3-3\alpha$	$0, 0$
	N	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$

Questão 3. Considere a seguinte versão do jogo de entrada na forma extensiva:



onde $\gamma > -1$. Caracterize o conjunto de todos os weak Perfect Bayesian Equilibrium em estratégias puras e mistas deste jogo. (Dica: Você pode achar mais fácil realizar a análise do jogo separadamente para diferentes intervalos do parâmetro γ.) (3,5 pontos)

Respostas.

Suponha que $-1 < \gamma \leq 0$. Considere os seguintes casos:

i. $\mu \geq \frac{2}{3}$: Neste caso, (Out, Fight, $\mu \geq \frac{2}{3}$) é um wPBE.

ii. $\mu < \frac{2}{3}$: Não existe wPBE.

iii. $\mu = \frac{2}{3}$: Neste caso, temos que:

a. Se $\gamma > -\frac{2}{3}$, então $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\sigma_F = \frac{1}{2+\gamma}$, com $\mu = \frac{2}{3}$, formam um wPBE.

b. Se $\gamma = -\frac{2}{3}$, entao $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \left(1-\sigma, \frac{2}{3}\sigma, \frac{1}{2}\sigma\right)$, com $\sigma \in [0,1]$, $\sigma_F = \frac{1}{2+\gamma} = \frac{3}{4}$, com $\mu = \frac{2}{3}$, formam um wPBE.

c. Se $\gamma < -\frac{2}{3}$, então (Out, Fight, $\mu = \frac{2}{3}$) é um wPBE.

Vide notas de aula para uma análise do caso em que $\gamma > 0$.