

FÍSICA IV - AULA 3 - POLARIZAÇÃO

Os fenômenos ondulatórios estudados até agora: interferência e difração, apesar de estudados no contexto da teoria eletromagnética da luz, não dependeram explicitamente do caráter vetorial da teoria de Maxwell. De fato, todos os resultados foram deduzidos a partir da equação escalar das ondas

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 f = 0,$$

satisfeita não apenas pelas componentes dos campos elétricos e magnéticos, mas também por ondas que se propagam em meios materiais como o som ou ondas na superfície da água.

Por outro lado, existem propriedades genuinamente ondulatórias que dependem intrinsecamente do caráter vetorial da onda. A **polarização** é uma dessas propriedades.

Para compreendê-la é necessário classificar as ondas de acordo com as direções de propagação e oscilação.

Definição: " Dizemos que uma onda é **longitudinal** se a direção de oscilação coincidir com a direção de propagação. Por outro lado, uma onda é dita **transversal** se a direção de oscilação for perpendicular à de propagação. "

Ondas mecânicas longitudinais como o som ou ondas sísmicas produzem uma compressão e rarefação do meio conforme se propagam e por isso também são denominadas ondas de compressão ou pressão. Diferentemente das ondas longitudinais, as ondas transversais que se propagam em meios tridimensionais possuem graus de liberdade adicionais relativos à direção de oscilação, que geram um espaço bidimensional. Exemplos de ondas transversais são as ondas eletromagnéticas, as na corda de um violão ou ondas na superfície da água.

O fenômeno de polarização corresponde a essa liberdade adicional que as ondas transversais têm para oscilar ao longo de duas direções ortogonais entre si e com respeito à direção de propagação. A polarização da luz já era conhecida por Newton e está presente em nosso cotidiano em lentes polarizadas usadas tanto em óculos de sol quanto câmeras fotográficas. Além disso, a polarização da luz é essencial para o funcionamento de telas LCD e de uma das mais empregadas tecnologias de projeção em 3D.

1- Equações de Maxwell num meio transparente

Da discussão anterior fica clara a necessidade de retornarmos às equações de Maxwell para podermos compreender o caráter transversal das ondas eletromagnéticas. Um meio transparente, como o ar ou o vidro, é necessariamente um isolante, posto que em materiais condutores, a energia eletromagnética é convertida em calor através do efeito Joule, deixando-os, conseqüentemente, opacos. Por simplicidade, consideraremos a propagação da luz na ausência de fontes, ou seja, não há cargas nem correntes livres no meio. Portanto, podemos começar a nossa análise a partir das equações de Maxwell num meio **dielétrico** com $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t \mathbf{D}$$

em que empregamos o **vetor deslocamento elétrico**:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = K \epsilon_0 \mathbf{E},$$

ao supormos que o meio se polariza linearmente com o **vetor de polarização** $\mathbf{P}$ e $K = \epsilon_r$ representa a **constante dielétrica** do meio.

Para encontrarmos a **equação de ondas** tomamos inicialmente o rotacional da **lei de Faraday**:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times (\partial_t \mathbf{B}),$$

supondo que os campos são pelo menos de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4)$, podemos invocar o **teorema de Schwarz** e empregar a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

para obter:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\partial_t (\nabla \times \mathbf{B})$$

usando então a **lei de Gauss** no lado esquerdo e a **lei de Ampère-Maxwell** no lado direito

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t^2 \mathbf{D}.$$

Finalmente, da definição do vetor de deslocamento, concluímos que o campo elétrico satisfaz a equação das ondas:

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -K \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{E} \Rightarrow \partial_z^2 E_i - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 E_i = 0, \quad i=1,2,3$$

em que a velocidade da onda no meio é dada por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{K \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{K}}.$$

Procedendo de forma análoga, a partir da **lei de Ampère-Maxwell**, obtemos a mesma equação para as componentes do campo magnético, i.e.,

$$\partial_z^2 B_i - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 B_i = 0, \quad i=1,2,3.$$

Exercício 1: "Prove a equação de onda para o campo magnético."

Procuramos por soluções das equações de Maxwell que representam uma onda se propagando ao longo da direção $\mathbf{e}_3$. Portanto, basta que consideremos campos elétricos e magnéticos que só dependem das coordenadas z e t , i.e.,

$$\mathbf{E} = E(z, t) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = B(z, t).$$

Nesse caso, as equações de Maxwell amarram não-trivialmente as componentes do campo eletromagnético.

1) Lei de Gauss : $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \kappa \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$
 $\Rightarrow \partial_z E_3(z, t) = 0$

2) Lei de Gauss Magnética : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
 $\Rightarrow \partial_z B_3(z, t) = 0$

3) Lei de Faraday : $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_z E_2(z, t) = \partial_t B_1(z, t) \\ \partial_z E_1(z, t) = -\partial_t B_2(z, t) \\ \partial_t B_3(z, t) = 0 \end{cases}$$

4) Lei de Ampère-Maxwell : $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t \mathbf{D} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \partial_t \mathbf{E}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_z B_2(z,t) = -\frac{1}{v^2} \partial_t E_1(z,t) \\ \partial_z B_1(z,t) = \frac{1}{v^2} \partial_t E_2(z,t) \\ \partial_t E_3(z,t) = 0 \end{cases}$$

Exercício 2: "Demonstre explicitamente as condições obtidas a partir das Equações de Maxwell."

As condições :

$$\begin{cases} \partial_z E_3(z,t) = 0 \\ \partial_t E_3(z,t) = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \partial_z B_3(z,t) = 0 \\ \partial_t B_3(z,t) = 0 \end{cases}$$

demandam que

$$E_3(z,t) = C_1 \quad e \quad B_3(z,t) = C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Como estamos interessados em soluções de onda, soluções estáticas, como as acima para as componentes dos campos elétrico e magnético ao longo do eixo $\hat{O}_z$ podem ser desprezadas, de forma que podemos tomar sem perda de generalidade $C_1 = C_2 = 0$. Posto de outra forma, os campos $\mathbf{E}(z,t)$ e $\mathbf{B}(z,t)$ são **ortogonais** à direção

de propagação. Consequentemente, temos que as ondas eletromagnéticas são transversais.

Notando que uma solução geral da equação unidimensional das ondas

$$\partial_z^2 f(z,t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 f(z,t) = 0$$

é dada pela superposição de duas ondas propagando ao longo do eixo $\hat{O}_z$,

$f_+(z,t) = f_+(z-vt)$ se propagando no sentido positivo e $f_-(z,t) = f_-(z+vt)$

se propagando no sentido negativo, i.e.,

$$f(z,t) = \alpha_+ f_+(z-vt) + \alpha_- f_-(z+vt),$$

podemos clarificar o significado físico das demais condições impostas pelas equações de Maxwell

Exercício 3: "Demonstre que $f_{\pm}(z \mp vt)$ satisfazem a equação unidimensional das ondas."

Se por simplicidade computacional, considerarmos apenas a onda eletromagnética que se propaga no sentido positivo, podemos adotar o seguinte Ansatz para as componentes remanescentes do campo eletromagnético:

$$E_i(z, t) = E_i(\xi) \text{ e } B_i(z, t) = B_i(\xi), \quad i=1, 2 \text{ e } \xi = z - vt.$$

Dessa forma as condições:

$$\begin{cases} \partial_z B_2(z, t) = -\frac{1}{v^2} \partial_t E_1(z, t) \\ \partial_z E_1(z, t) = -\partial_t B_2(z, t) \end{cases}$$

implicam:

$$\begin{aligned} \partial_z B_2(\xi) &= \partial_\xi B_2(\xi) \partial_z \xi = \partial_\xi B_2(\xi) \\ &= -\frac{1}{v^2} \partial_t E_1(\xi) = -\frac{1}{v^2} \partial_\xi E_1(\xi) \partial_t \xi = \frac{1}{v} \partial_\xi E_1(\xi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_\xi (E_1(\xi) - v B_2(\xi)) = 0 \Rightarrow E_1(\xi) - v B_2(\xi) = C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Novamente, como estamos interessados em fenômenos dinâmicos, podemos escolher sem perda de generalidade $C_3 = 0$. Logo,

$$E_1(\xi) = v B_2(\xi).$$

Exercício 4: "Demonstre que a segunda equação do sistema acima também se reduz à condição $E_1(\xi) = v B_2(\xi)$."

Finalmente, as equações restantes:

$$\begin{cases} \partial_z B_1(z,t) = \frac{1}{v^2} \partial_t E_2(z,t) \\ \partial_z E_2(z,t) = \partial_t B_1(z,t) \end{cases}$$

levam à seguinte condição:

$$E_2(\xi) = -v B_1(\xi).$$

Exercício 5: "Demonstre esse fato."

Coletando os resultados obtidos, concluímos que os campos elétrico e magnético de uma onda que se propaga ao longo da direção $\hat{O}_z$ no sentido positivo tem a seguinte forma:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_1(\xi) \mathbf{e}_1 + E_2(\xi) \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{B}(z,t) = -\frac{1}{v} E_2(\xi) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{v} E_1(\xi) \mathbf{e}_2 = \frac{1}{v} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}(z,t).$$

Como não há nada de particular com respeito à direção definida por $\mathbf{e}_3$, podemos trivialmente generalizá-lo para uma onda que se propaga ao longo de uma direção $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ qualquer.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v} \mathbf{u} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu \epsilon_0 \mu_0} \mathbf{u} \times \mathbf{E}$$

Exercício 6 : " Obtenha as expressões dos campos elétrico e magnético que se propagam ao longo da direção $\hat{O}_z$ no sentido negativo. "

Sabemos, por outro lado que, em um meio transparente com índice de refração n , a velocidade da luz é:

$$v = \frac{c}{n}.$$

Comparando com a expressão obtida para v a partir das equações de Maxwell, i.e.,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}},$$

obtemos a relação de Maxwell :

$$n = \sqrt{\epsilon},$$

que relaciona o índice de refração de um meio transparente com a sua constante dielétrica.

Antes de compararmos tal previsão com resultados experimentais é importante lembrar que

existe **dispersão**, ou seja tanto o índice de refração n quanto a constante dielétrica

variam com a frequência ω . Demandando que qualquer comparação deva ser feita com

respeito a luz monocromática. Além disso, devemos nos restringir a meios dielétricos lineares,

devido à relação que supomos entre os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$.

Substância	$n_{300\mu m}^2$	K
KCl	4,8	4,75
KBr	5,1	4,66
NH ₄ Cl	6,8	6,85

O mesmo vale para gases fracamente dispersivos:

Substância	n^2 (amarelo)	K
Ar	1,000 294	1,000 295
H ₂	1,000 138	1,000 132
CO	1,000 346	1,000 345

2 - Vetor de Poynting

Para campos quase-estacionários no interior de um dielétrico a densidade de energia elétrica aumenta por um fator K, de forma que a densidade total de energia eletromagnética é dada por:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} K \epsilon_0 \|E\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \|B\|^2 \\
 &= \frac{1}{2K\epsilon_0} \|D\|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|B\|^2.
 \end{aligned}$$

A taxa de variação temporal da densidade de energia eletromagnética pode ser facilmente calculada usando as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned}\partial_t U &= \frac{1}{\kappa \epsilon_0} \mathbf{D} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right),\end{aligned}$$

que leva à seguinte equação de continuidade:

$$\nabla \cdot \mathcal{S} + \partial_t U = 0,$$

em que introduzimos a seguinte quantidade

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

denominada **vetor de Poynting**. A equação de continuidade acima expressa a **conservação local da energia**, de modo que o vetor de Poynting corresponde a uma densidade de corrente de energia.

Para as soluções de onda propagante ao longo da direção $\hat{O}_z$ no sentido positivo consideradas na seção anterior, temos que

$$\mathbf{B} = \sqrt{\kappa \epsilon_0 \mu_0} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}.$$

Logo, as densidades de energia elétrica e magnética coincidem:

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 = U_E,$$

e o vetor de Poynting assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{v\mu_0} \mathbf{E} \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) = \sqrt{\frac{\kappa\epsilon_0}{\mu_0}} \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{\kappa\epsilon_0\mu}} \kappa\epsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{e}_z \\ &= v \mathcal{U} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Consequentemente, o vetor de Poynting consiste em uma corrente de densidade de energia com magnitude $\mathcal{U}$ que se propaga com a velocidade da luz no meio $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$.

Exemplo 1: "Calcule as densidades de energia elétrica e magnética e o vetor de Poynting para uma onda plana monocromática."

"Podemos representar uma onda eletromagnética plana monocromática em notação complexa por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}] \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}].$$

Como na região do visível, $\omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$, não temos detectores sensíveis o suficiente para registrar a variação extremamente rápida dessas grandezas. No máximo somos capazes de medir os valores médios temporais sobre um grande número de oscilações.

Como ambas as densidades de energia e o vetor de Poynting envolvem produtos dos campos em notação complexa, é conveniente deduzirmos uma expressão geral para o

valor médio do produto das partes reais de números complexos. Para tanto, sejam

$a, b \in \mathbb{C}$ e considere a seguinte média temporal sobre n períodos:

$$\langle \operatorname{Re}[a e^{-i\omega t}] \operatorname{Re}[b e^{-i\omega t}] \rangle = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} dt \{ \operatorname{Re}[a e^{-i\omega t}] \operatorname{Re}[b e^{-i\omega t}] \}$$

em que $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Notando que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[a e^{-i\omega t}] \operatorname{Re}[b e^{-i\omega t}] &= \frac{1}{2} (\bar{a} e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t}) \cdot \frac{1}{2} (\bar{b} e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{4} (\bar{a}b + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} e^{2i\omega t} + a b e^{-2i\omega t}) \end{aligned}$$

e que

$$\langle e^{\pm 2i\omega t} \rangle = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} dt e^{\pm 2i\omega t} = e^{\pm 2i\omega(t_0-1)} (e^{\pm 2i\omega nT} - 1) = 0,$$

pois $e^{\pm 2i\omega nT} = e^{\pm 4in\pi} = 1$. Portanto,

$$\langle \operatorname{Re}[a e^{-i\omega t}] \operatorname{Re}[b e^{-i\omega t}] \rangle = \frac{1}{4} (\bar{a}b + a\bar{b}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{a}b].$$

Com isso obtemos os valores médios das densidades de energia elétrica e magnética:

$$\langle U_E(r, t) \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2$$

$$\langle U_M(r, t) \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{4\mu_0} |\mathbf{B}|^2.$$

Já para o vetor de Poynting temos:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{B}}] = \operatorname{Re} \mathbf{S}^+,$$

em que introduzimos o chamado vetor de Poynting complexo:

$$\mathbf{S}^+ = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{B}}.$$

Para uma onda plana propagando na direção $\mathbf{u}$ podemos empregar o vínculo existente entre os campos elétrico e magnético para escrever:

$$\mathcal{S}^+ = \frac{1}{2\mu_0 v} \mathbf{E} \times (\mathbf{u} \times \overline{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa \epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{u},$$

de forma que o valor médio do vetor de Poynting é dado por:

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \mathcal{S}^+ = v \langle \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} = \frac{v \kappa \epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{u}.$$

Finalmente, podemos calcular a intensidade I da onda, projetando $\mathcal{S}$ na direção do movimento:

$$I = \langle \mathcal{S} \rangle \cdot \mathbf{u} = v \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{v \kappa \epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2,$$

corroborando a interpretação de $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ como a função de onda vetorial associada à luz. "

3 - Polarização

Vimos anteriormente, que a solução mais geral descrevendo uma onda eletromagnética se propagando na direção $\hat{\mathbf{O}}_z$ no sentido positivo é dada por:

$$|\mathbf{E}(z, t)| = E_1(\xi) \mathbf{e}_1 + E_2(\xi) \mathbf{e}_2, \quad \xi = z - vt,$$

$$|\mathbf{B}(z, t)| = -\frac{1}{v} E_2(\xi) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{v} E_1(\xi) \mathbf{e}_2 = \frac{1}{v} \mathbf{e}_3 \times |\mathbf{E}(z, t)|,$$

em que v é a velocidade de propagação da onda no meio dielétrico

homogêneo e linearmente polarizado. Para uma onda plana monocromática com frequência ω , a dependência temporal deve ser da forma:

$$e^{-i\omega t}.$$

Como

$$z - vt = v \left(-t + \frac{z}{v} \right)$$

e

$$\frac{\omega}{v} = k$$

concluimos que a dependência espacial deve ser da forma:

$$e^{ikz}.$$

Portanto, ao acrescentarmos uma defasagem inicial δ arbitrária, podemos escrever:

$$E_1(\xi) = a e^{i(kz - \omega t + \delta_1)},$$

$$E_2(\xi) = b e^{i(kz - \omega t + \delta_2)},$$

em que $a, b \in \mathbb{R}_+$ são as **amplitudes reais** das componentes transversais e $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ as respectivas **constantes de fase**. Para descrever a polarização da luz, é conveniente agrupar as componentes transversais do campo elétrico em um vetor de duas componentes:

$$|E\rangle = \begin{pmatrix} E_1(\xi) \\ E_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{i\delta_1} \\ b e^{i\delta_2} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)},$$

o vetor: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a e^{i\delta_1} \\ b e^{i\delta_2} \end{pmatrix}$ é conhecido como **vetor de Jones** ou

vetor de polarização.

Nossa próxima meta é descrever a curva traçada pelo vetor $|E\rangle$ no plano, conforme a onda propaga. Por simplicidade computacional, podemos tomar sem perda de generalidade o plano onde projetamos $|E\rangle$ para obter $|E\rangle$, como o plano $z = 0$. Além disso, com uma escolha adequada da origem do nosso sistema de coordenadas, podemos tomar $\delta_1 = 0$.

Assim, em notação real:

$$|E\rangle = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ b \cos(\varphi + \delta) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \varphi &= kz - \omega t, \\ \delta &= \delta_2 - \delta_1. \end{aligned}$$

Claramente, como $|E_1| \leq a$ e $|E_2| \leq b$ tal curva está contida em um retângulo de lados $2a$ e $2b$. Sua equação pode ser obtida ao eliminarmos o parâmetro φ da seguinte forma:

$$\frac{E_2}{b} = \cos(\varphi + \delta) = \cos\varphi \cos\delta - \sin\varphi \sin\delta$$

Notando que:

$$\frac{E_1}{a} = \cos\varphi \Rightarrow \left(\frac{E_1}{a}\right)^2 = \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_1}{a}\right)^2}$$

Logo,

$$\frac{E_2}{b} - \frac{E_1}{a} \cos\delta = \pm \sin\delta \sqrt{1 - \left(\frac{E_1}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_2}{b}\right)^2 - \frac{2E_1E_2}{ab} \cos\delta + \left(\frac{E_1}{a}\right)^2 \cos^2\delta = \sin^2\delta \left[1 - \left(\frac{E_1}{a}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_2}{b}\right)^2 - \frac{2E_1E_2}{ab} \cos\delta + \left(\frac{E_1}{a}\right)^2 = \sin^2\delta. \quad (*)$$

Tal curva é conhecida como **curva de Lissajous** ou **curva de Bowditch**. No caso em questão dependendo da fase relativa δ ela se degenera a uma **elipse** ou um **segmento de reta**. São esses casos particulares que dão origem às diferentes formas de polarização da luz.

A- Luz linearmente polarizada

Tomando $\delta = n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$ a equação (*) se torna:

$$\left(\frac{E_2}{b}\right)^2 + 2(-1)^{n+1} \frac{E_1E_2}{ab} + \left(\frac{E_1}{a}\right)^2 = 0$$

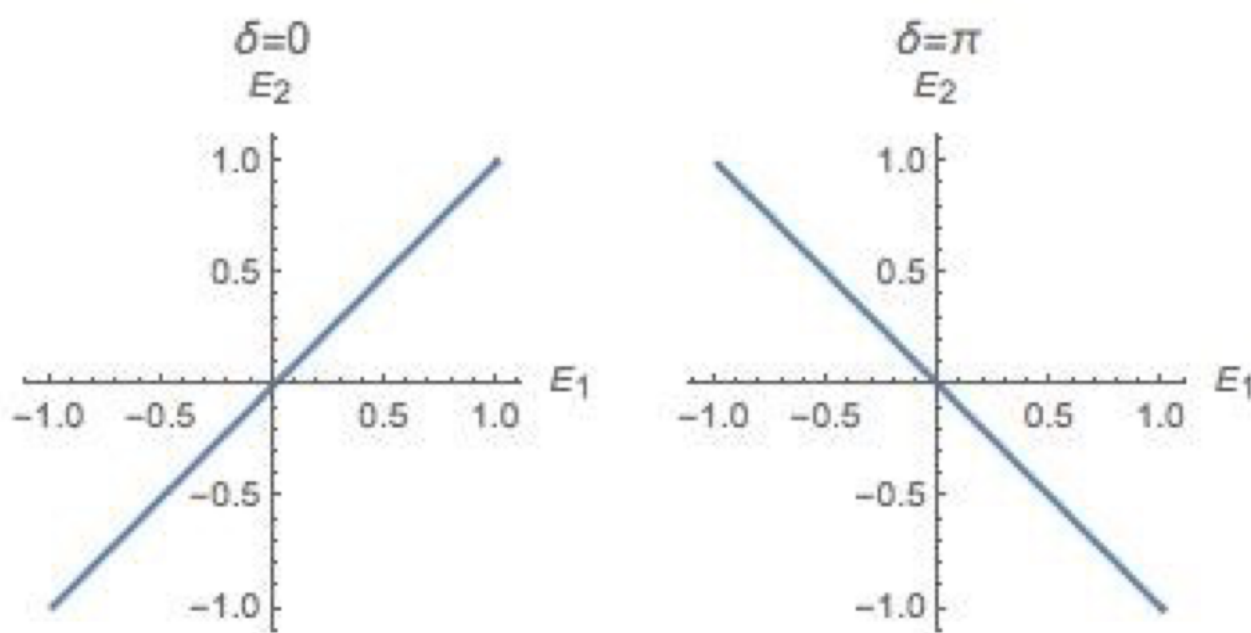
de forma que, para n par temos:

$$\left(\frac{E_1}{a} - \frac{E_2}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow E_2 = \frac{b}{a} E_1,$$

que corresponde a um segmento de reta. Já para n ímpar, temos:

$$\left(\frac{E_2}{b} + \frac{E_1}{a} \right)^2 = 0 \Rightarrow E_2 = -\frac{b}{a} E_1,$$

correspondendo a outro segmento de reta.



Em ambos os casos, temos que o campo elétrico pode ser escrito como

$$|E\rangle = \left[a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{i\varphi}$$

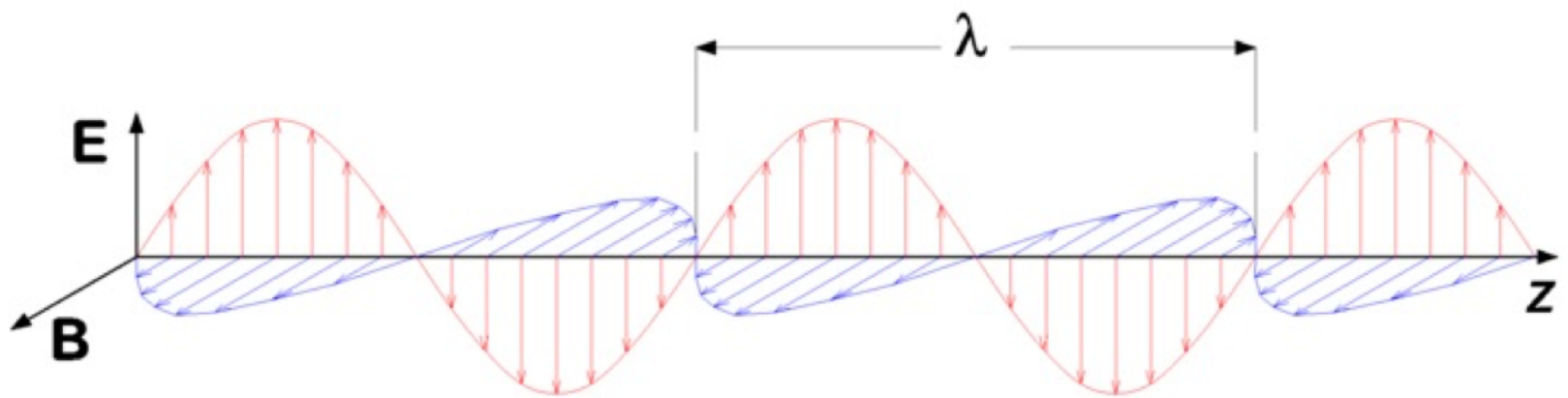
ou seja, o campo elétrico permanece sempre ao longo de uma mesma direção. Naturalmente, o mesmo também ocorre com o campo magnético

$$|B\rangle = \frac{1}{v} \left[\mp b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{i\varphi}.$$

Por esse motivo, diz-se que a onda é linearmente polarizada.

Convencionou-se chamar o plano gerado por $(|E, \omega\rangle)$ de plano de vibração e o gerado por $(|B, \omega\rangle)$ de plano de polarização. Consequentemente,

O perfil de uma onda eletromagnética linearmente polarizada é o seguinte



Fonte: wikipedia

B - Luz Circularmente polarizada

Tomando: $a=b$ e $\delta = (n + 1/2)\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$ em (*), temos:

$$E_2^2 - 2E_1E_2 \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + E_1^2 = a^2 \sin^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_2^2 + 2E_1E_2 \sin(n\pi) + E_1^2 = a^2 \cos^2(n\pi)$$

$$\Rightarrow E_1^2 + E_2^2 = a^2.$$

De forma que o vetor $|E\rangle$ descreve um círculo de raio a . Notando que

$$e^{i\delta} = e^{i\pi n} e^{i\frac{\pi}{2}} = (-1)^n i.$$

podemos escrever o campo elétrico da seguinte forma

$$|E\rangle = a \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)^n i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{i\varphi}$$

e o magnético

$$|B\rangle = \frac{a}{c} \left[(-1)^{n+1} i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{i\varphi}.$$

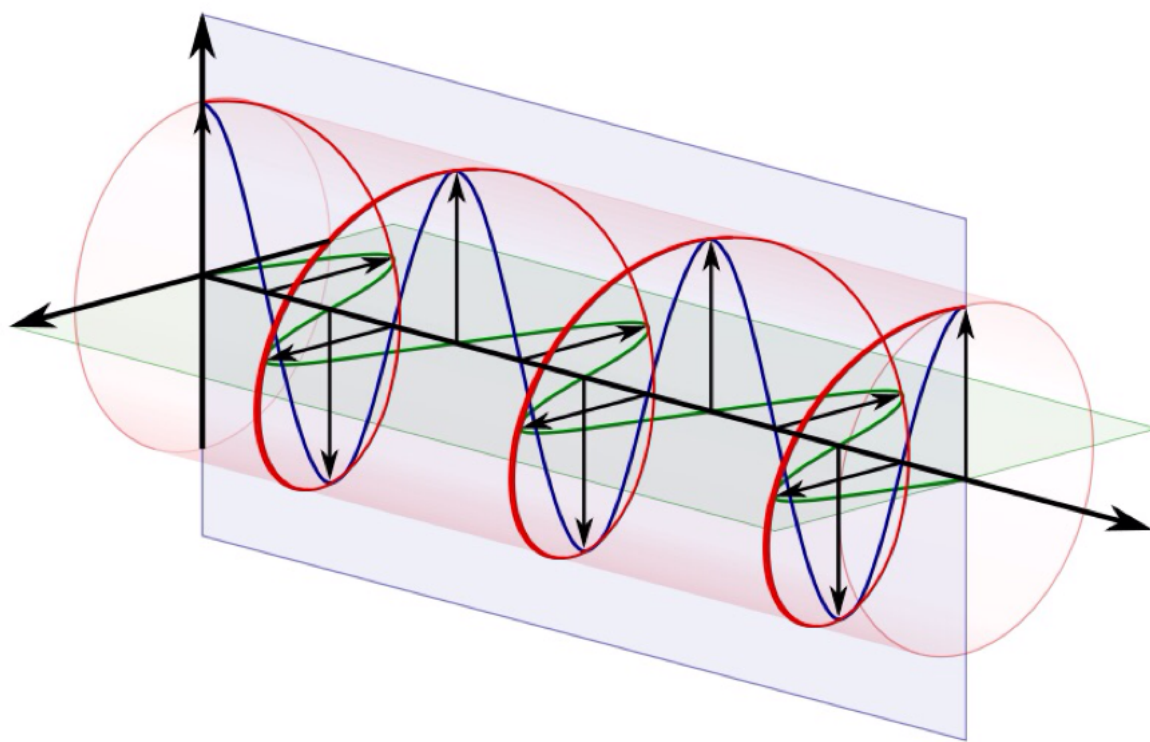
Para n par :

$$|E\rangle = a e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

temos luz circularmente polarizada para a esquerda, pois ao tomarmos a parte real, obtemos

$$\text{Re}[|E\rangle] = a \cos \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - a \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que corresponde a um círculo percorrido no sentido horário (positivo de acordo com a regra da mão esquerda).



Fonte: wikipedia

Para n ímpar:

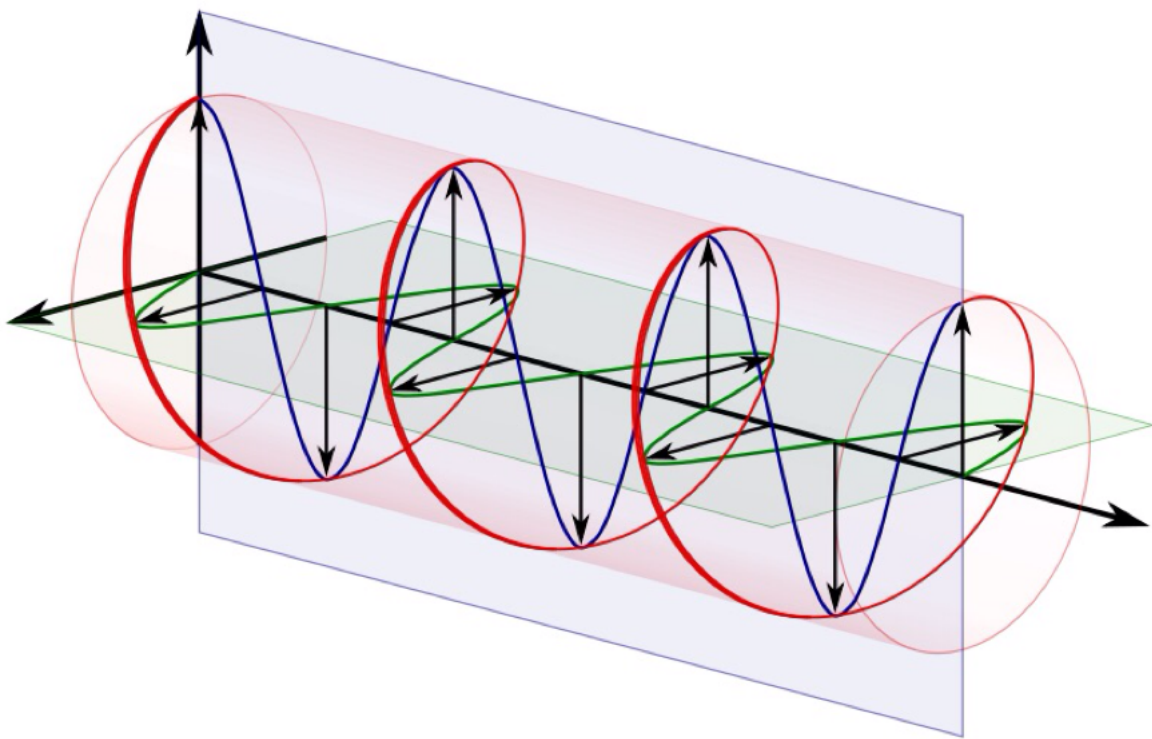
$$|E\rangle = a e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

a luz está circularmente polarizada para a direita. A justificativa da nomen-

clatura é similar. Tomando a parte real da expressão anterior:

$$\text{Re}[|E\rangle] = a \cos \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

concluimos que a circunferência é percorrida no sentido antihorário (positivo de acordo com a regra da mão direita).



Fonte: wikipedia

É usual representar os vetores de polarização circular por:

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

que assim como os vetores:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forneem uma base ortonormal para o plano transversal à direção de propagação.

Exercício 7: "Demonstre que os vetores $\mathcal{E}_{\pm}$ constituem uma base ortonormal para o plano $\text{span}\{|E\rangle, |B\rangle\}$ e mostre que: $\mathcal{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)$. Sugestão: lembre que o plano de polarização pode ser representado pelo espaço vetorial $V = \{\mathbb{R}^2, \mathbb{C}\}$."

Consequentemente, qualquer onda plana monocromática pode ser representada como uma superposição de ondas linearmente polarizadas

$$|E\rangle = E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2$$

ou ondas circularmente polarizadas

$$|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (E_1 - iE_2) \mathcal{E}_+ + (E_1 + iE_2) \mathcal{E}_- \}$$

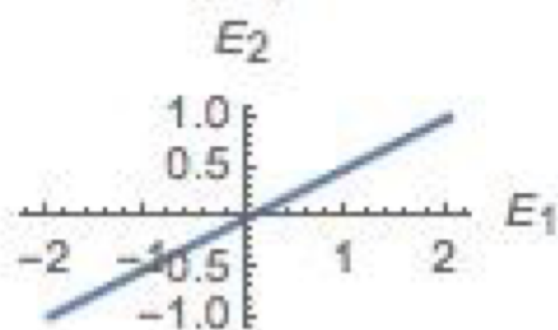
C- Luz elipticamente polarizada

No caso mais geral da curva de Lissajous descrita pela equação (*)

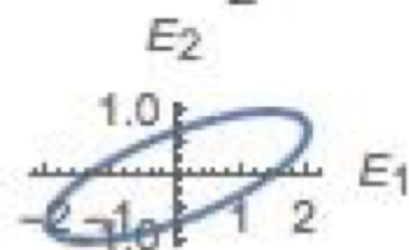
$$\left(\frac{E_2}{b}\right)^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{a b} \cos \delta + \left(\frac{E_1}{a}\right)^2 = \sin^2 \delta,$$

temos elipses para $\delta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. A figura seguinte mostra a forma da curva de polarização para diferentes regimes da defasagem δ para amplitudes $a=2$ e $b=1$.

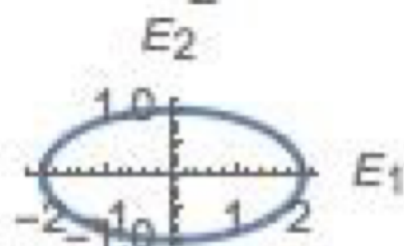
$$\delta=0$$



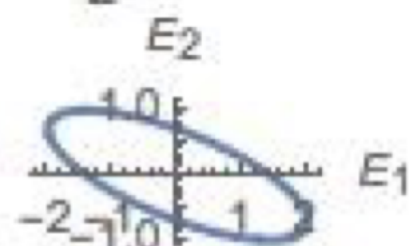
$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$



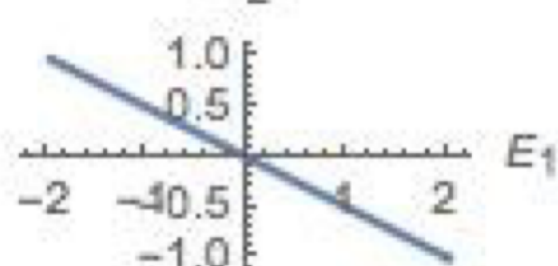
$$\delta = \frac{\pi}{2}$$



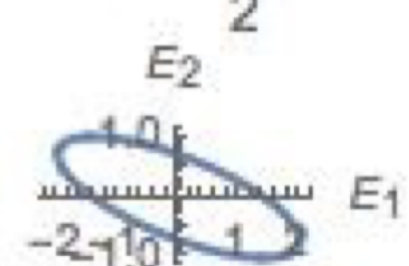
$$\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$$



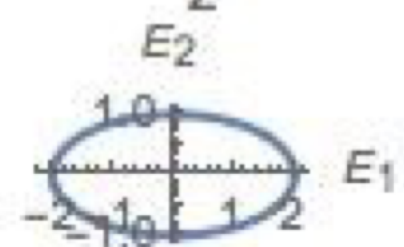
$$\delta = \pi$$



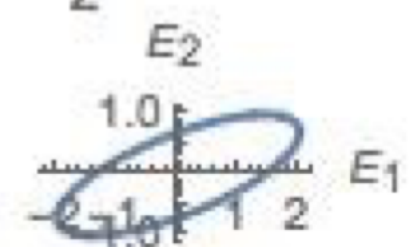
$$\pi < \delta < \frac{3\pi}{2}$$



$$\delta = \frac{3\pi}{2}$$

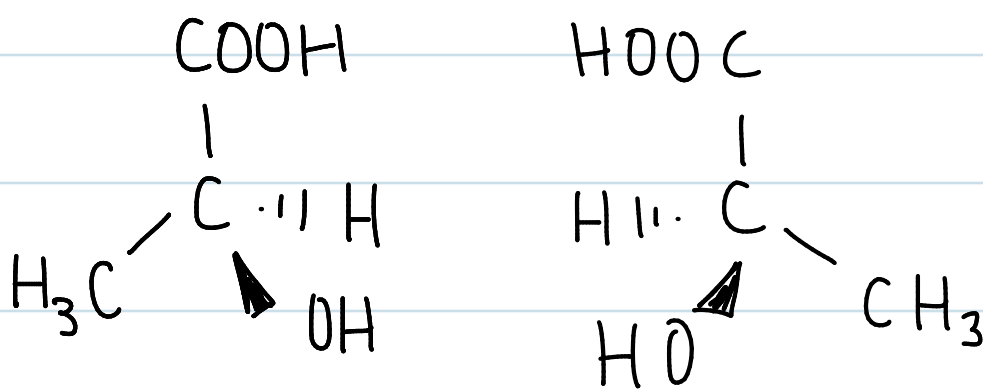


$$\frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$$



4 - Atividade Ótica Natural

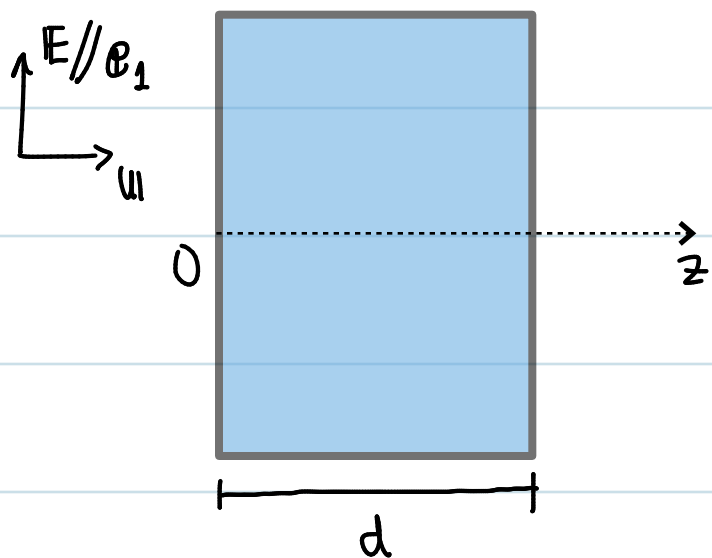
Existem substâncias na natureza que, apesar de serem transparentes, possuem índices de refração **diferentes** para luz circularmente polarizada para direita ou esquerda. Essa propriedade é uma consequência de estruturas quirais que privilegiam um sentido de rotação da luz. Na química, tais substâncias recebem o nome de **enantiômeros** ou **isômeros óticos** e são caracterizadas pela presença de átomos **quirais** que possibilitam duas configurações que não são sobreponíveis. Um exemplo é o ácido láctico:



Consideremos, pois, a incidência de uma onda plana linearmente polarizada sobre um meio composto por um certo enantiômero com espessura d . Desprezando o fator temporal na fase, temos:

$$E_0 = E_0 e^{ik_0 z} e_1, \quad z \leq 0.$$

Escolhendo a origem na face de entrada, escrevemos:



$$E_0 = E_0 e_1, \quad z = 0$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-)$$

em que decomponemos a onda incidente na superposição de duas ondas circularmente polarizadas. Como os fatores de propagação

são diferentes para as diferentes polarizações circulares, dentro do meio devemos ter

$$E(z) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ e^{ik_+ z} \mathcal{E}_+ + e^{ik_- z} \mathcal{E}_- \}, \quad z > 0$$

em que introduzimos $k_{\pm} = n_{\pm} k_0$ com $n_{\pm} (n_{\pm})$ o índice de refração para polarização circular para esquerda (direita). Denotando o índice de refração médio do meio por:

$$\bar{n} = \frac{1}{2} (n_+ + n_-)$$

e a diferença entre os índices por:

$$\delta n = n_+ - n_-$$

temos:

$$n_{\pm} = \bar{n} \pm \frac{1}{2} \delta n \Rightarrow k_{\pm} = \bar{n} k_0 \pm \delta n k_0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 E(z) &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i k_0 n z} \left(e^{\frac{i}{2} \delta n k_0 z} \mathcal{E}_+ + e^{-\frac{i}{2} \delta n k_0 z} \mathcal{E}_- \right) \\
 &= \frac{E_0}{2} e^{i \bar{n} k_0 z} \left\{ \left(e^{\frac{i}{2} \delta n k_0 z} + e^{-\frac{i}{2} \delta n k_0 z} \right) \mathcal{E}_1 \right. \\
 &\quad \left. + i \left(e^{\frac{i}{2} \delta n k_0 z} - e^{-\frac{i}{2} \delta n k_0 z} \right) \mathcal{E}_2 \right\} \\
 &= E_0 e^{i \bar{n} k_0 z} \left\{ \cos\left(\frac{\delta n k_0 z}{2}\right) \mathcal{E}_1 - \sin\left(\frac{\delta n k_0 z}{2}\right) \mathcal{E}_2 \right\}.
 \end{aligned}$$

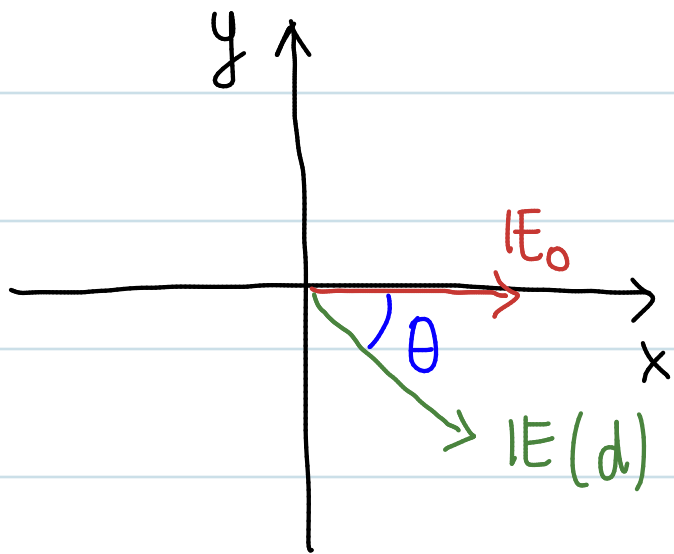
Assim, após atravessar a espessura d do enantiômero, teremos:

$$E(d) = E_0 e^{i \bar{n} k_0 d} \left\{ \cos\left(\frac{\delta n k_0 d}{2}\right) \mathcal{E}_1 - \sin\left(\frac{\delta n k_0 d}{2}\right) \mathcal{E}_2 \right\},$$

indicando que ocorreu uma rotação da direção de polarização. O ângulo θ

é dado por:

$$\theta = - \frac{\delta n k_0 d}{2}.$$



Essa rotação é proporcional à espessura do meio atravessada e à diferença δn

entre os índices de refração. Se $n_+ > n_-$

a rotação é no sentido horário (para a direita) e a substância é dita **destrogiro**. Já, se $n_+ < n_-$, a rotação é no sentido anti-horário (para a esquerda) e a substância é dita **levógiro**.

Açúcares de origem biológica e que podem ser metabolizados por seres vivos são unicamente destrogíros. Consequentemente, açúcares

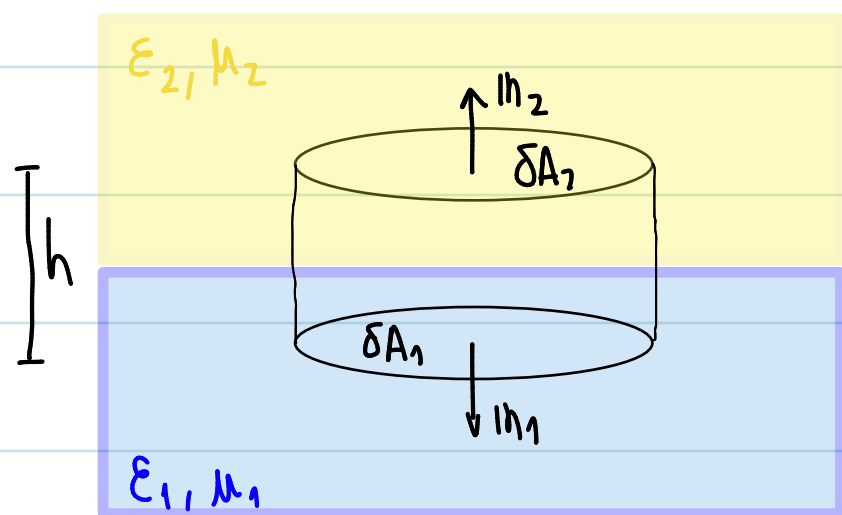
levógios sintetizados artificialmente não são digeridos por seres vivos. Como os índices de refração $n_{\pm}$ são proporcionais à concentração da respectiva substância na solução, a atividade ótica pode ser utilizada para determinar a composição de soluções em **sacarímetros**.

5 - Condições de Contorno

Para abordarmos os problemas de **reflexão** e **refração** de ondas eletromagnéticas, precisamos compreender o comportamento do campo eletromagnético na interface entre dois meios materiais distintos. Neste ponto é importante justificar o tratamento dessa interface por uma superfície de descontinuidade. De fato, do ponto de vista microscópico, a transição entre dois meios não é abrupta, ocorrendo ao longo de uma região que cobre várias camadas atômicas. Contudo, a espessura h dessa camada de transição é muito pequena quando comparada com os comprimentos de onda típicos no visível. Portanto, podemos aplicar as equações de Maxwell em sua forma integral à camada de transição e tomar posteriormente o limite $h \rightarrow 0$.

A- Componentes normais

Considere a interface entre dois meios caracterizados por suas permissividades elétricas e permeabilidades magnéticas ϵ_1, μ_1 e ϵ_2, μ_2 . Seja então um



cilindro com altura h e bases com áreas δA_1 e δA_2 atravessando a interface entre os meios 1 e 2.

Integrando a lei de Gauss nesse cilindro, obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbb{D} d^3x = \int_V \rho d^3x$$

Usando o teorema da divergência, temos:

$$\oint_{\partial V} \mathbb{D} \cdot \ln d^2x = \int_V \rho d^3x.$$

Supondo que o cilindro seja pequeno o suficiente para tomarmos os campos elétricos aproximadamente constantes em cada um dos meios, podemos escrever

$$\mathbb{D}_1 \cdot \ln_1 \delta A_1 + \mathbb{D}_2 \cdot \ln_2 \delta A_2 + (\text{fluxo na superfície lateral}) = \int_V \rho d^3x,$$

em que os subscritos identificam os campos nos diferentes meios. Tomando,

então o limite $h \rightarrow 0$, temos que a área lateral do cilindro desaparece,

implicando o anulamento do fluxo através dela. Por outro lado, como existe uma

carga finita dentro do cilindro, devemos fazer $\rho \rightarrow \infty$ conforme $h \rightarrow 0$.

Portanto, a densidade de carga superficial sobre a interface $\bar{\rho} = \rho h$ permanece finita e podemos escrever:

$$\int \rho d^3x = \int \bar{\rho} d^2x.$$

Ademais, nessa situação temos que: $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 \equiv \mathbf{n}_{12}$ e $\delta A_1 = \delta A_2 \equiv \delta A$,

levando a:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} \delta A = \bar{\rho} \delta A \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \bar{\rho}$$

Logo, a componente normal do vetor de deslocamento elétrico apresenta uma descontinuidade na interface entre meios proporcional à densidade superficial de carga acumulada sobre tal interface.

Procedendo de forma similar com a equação de Gauss magnética:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

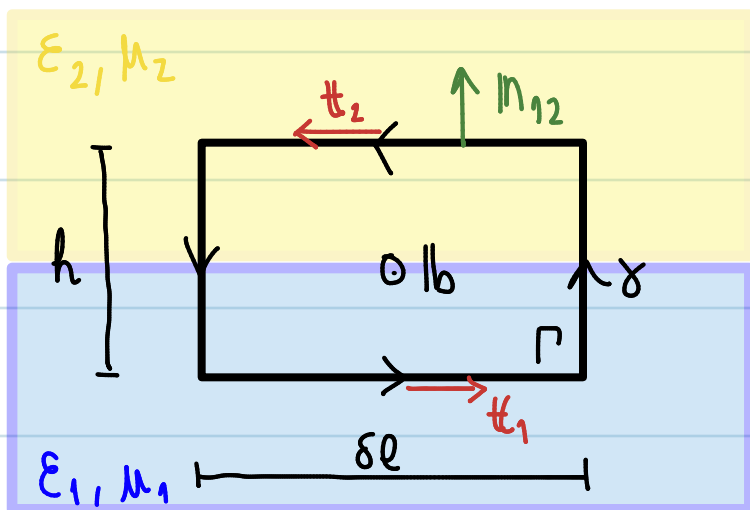
obtemos a seguinte condição de contorno:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0$$

Exercício 8: " Demonstre a condição de contorno para a componente normal do campo magnético. "

B - Componentes tangenciais

Seja novamente a interface entre dois meios caracterizados por ϵ_1, μ_1 e ϵ_2, μ_2 e considere um circuito retangular orientado γ com altura h e



base δl entre os dois meios. Integrando

a lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

sobre a superfície limitada por γ e invo-

cando o teorema de Stokes, temos:

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{l}_b \, d^2x = - \int_{\Gamma} (\partial_t \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_b \, d^2x, \quad \partial \Gamma = \gamma$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\Gamma} \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{l}_b \, d^2x,$$

Novamente, supondo as dimensões de γ pequenas o suficiente para tomarmos o campo elétrico aproximadamente constante ao longo dos lados do retângulo paralelos à interface, obtemos:

$$|\mathbf{E}_2| \cdot \mathbf{t}_2 \delta l + |\mathbf{E}_1| \cdot \mathbf{t}_1 \delta l + Q = - \int_{\Gamma} \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{l}_b \, d^2x,$$

em que a quantidade Q representa a contribuição dos lados do retângulo γ perpendiculares à interface à circulação do campo elétrico. Notamos que os vetores unitários tangentes $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ satisfazem as seguintes relações:

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12} = -\mathbf{t}_1,$$

em que $\mathbf{b}$ é o vetor unitário normal à superfície Γ e $\mathbf{n}_{12}$, o vetor unitário normal à interface entre os meios 1 e 2. Tomando o limite $h \rightarrow 0$, temos

que $Q \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ e que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{b} \, d^2x = 0,$$

pois $\partial_t \mathbf{B}$ permanece finita conforme a área limitada pela curva γ desaparece. Temos, portanto, que:

$$(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2 + \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1) \delta l = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$$

Finalmente, notando que a orientação de $\mathbf{b}$ contido em um plano paralelo à interface é arbitrária, concluímos que:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$$

Logo, as componentes tangenciais do campo elétrico são contínuas na interface entre dois meios.

Exercício 9: " Demonstre que as componentes tangenciais do campo $\mathbf{H}$ apresentam

uma descontinuidade na interface proporcional à densidade de corrente superficial $\bar{J}$, i.e.,

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \bar{\mathbf{J}}.$$

Sugestão: parta da equação de Ampère-Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}$ e proceda analogamente."

Para meios transparentes como os que temos considerado, $\rho = 0$ e $\bar{J} = 0$.

Logo, todas as componentes dos campos elétrico e magnético são contínuas na interface.

6 - Reflexão e Refração

Nesta seção, ao estudar a propagação de ondas planas monocromáticas através da interface de dois meios, deduzimos a lei de Snell e as fórmulas de Fresnel. Para tanto, consideramos uma onda plana monocromática incidindo sobre a interface entre dois meios transparentes com índices de refração n_1 e n_2 .

Na situação mais geral devemos considerar além dessa onda incidente, uma onda refletida e uma onda transmitida (refratada). Os fatores de propagação dessas três ondas são:

⊗ Onda Incidente: $e^{i\varphi_i} = e^{i(k_i \cdot x - \omega t)}$

⊗ Onda Refletida: $e^{i\varphi_r} = e^{i(k_r \cdot x - \omega t)}$

⊗ Onda Transmitida: $e^{i\varphi_t} = e^{i(k_t \cdot x - \omega t)}$

Escolhendo nosso sistema de coordenadas de forma que a interface entre os meios coincida com o plano $y=0$, obtemos condições de contorno em $y=0$ que devem ser satisfeitas por todos os pontos sobre tal plano em todos os instantes de tempo. Em particular, os fatores de fase devem coincidir para $y=0$, levando a:

$$e^{i\varphi_i}|_{y=0} = e^{i\varphi_r}|_{y=0} = e^{i\varphi_t}|_{y=0}$$

$$\Rightarrow k_i \cdot x|_{y=0} = k_r \cdot x|_{y=0} = k_t \cdot x|_{y=0}$$

Escrevendo:

$$k_i = n_1 k_0 u^i, \quad k_r = n_1 k_0 u^r, \quad k_t = n_2 k_0 u^t$$

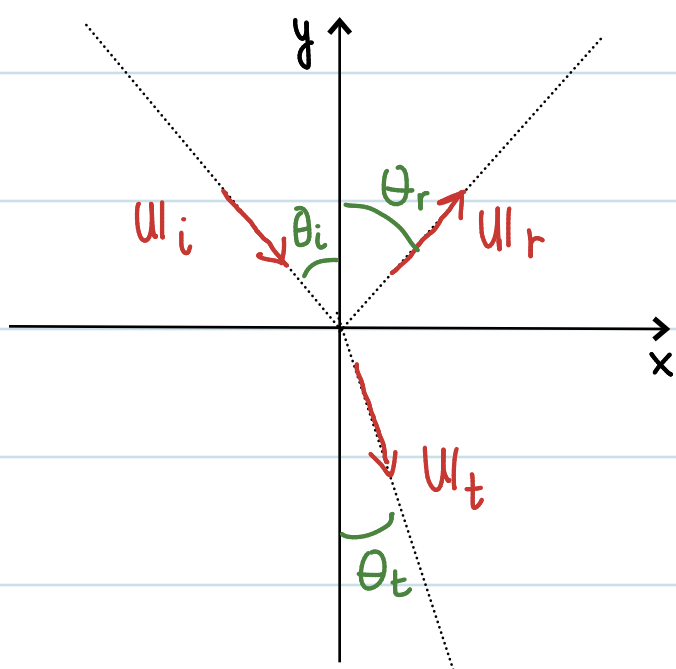
obtemos:

$$n_1 k_0 (u_1^i x + u_3^i z) = n_1 k_0 (u_1^r x + u_3^r z) = n_2 k_0 (u_1^t x + u_3^t z).$$

Como tais relações têm que permanecer válidas para todos os valores de x e z , concluímos que:

$$\begin{cases} n_1 u_1^i = n_1 u_1^r = n_2 u_1^t \\ n_1 u_3^i = n_1 u_3^r = n_2 u_3^t \end{cases} \sim \begin{cases} u_1^i = u_1^r, & u_3^i = u_3^r \\ u_1^i = \frac{n_2}{n_1} u_1^t, & u_3^i = \frac{n_2}{n_1} u_3^t \end{cases}$$

Essas quatro equações demandam que tanto a onda transmitida quanto a refletida devem permanecer no mesmo plano da onda incidente, uma vez que tais equações demandam a colinearidade das projeções dos vetores u^i , u^r e u^t no plano $y=0$. Denominamos o plano gerado por u^i e pela normal à interface no ponto de incidência de **plano de incidência**. Podemos, então, sem perda de generalidade, fixar o plano de incidência como o plano $z=0$. Neste caso, temos a seguinte situação:



$$u_1^i = \sin \theta_i, \quad u_2^i = -\cos \theta_i, \quad u_3^i = 0$$

$$u_1^r = \sin \theta_r, \quad u_2^r = \cos \theta_r, \quad u_3^r = 0$$

$$u_1^t = \sin \theta_t, \quad u_2^t = -\cos \theta_t, \quad u_3^t = 0$$

De forma que as condições obtidas para as componentes de u^i , u^r e u^t implicam:

$$u_1^i = u_1^r \Rightarrow \sin \theta_i = \sin \theta_r,$$

$$\Rightarrow \theta_i = \theta_r, \quad \theta_i, \theta_r \in [0, \pi/2]$$

$$u_1^i = \frac{n_2}{n_1} u_1^t \Rightarrow \sin \theta_i = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_t.$$

Com isso obtemos as leis de reflexão e de Snell para refração. Contudo, tais expressões determinam apenas as direções de propagação dos raios

refletidos e transmitidos, sem fornecer nenhuma informação sobre suas intensidades. Tais amplitudes podem ser facilmente determinadas a partir das condições de contorno que encontramos para o campo eletromagnético na seção anterior.

Conforme vimos anteriormente os campos eletromagnéticos podem ser sempre representados como a superposição de duas polarizações lineares. Dessa forma, é conveniente escolher uma delas como **perpendicular** ao plano de incidência, ou seja, paralela ao eixo $\hat{O}_z$, e a outra **paralela** ao plano de incidência. Com isso podemos representar os campos elétricos incidente, refletido e refratado da seguinte forma:

$$u^i = \sin \theta_1 e_1 - \cos \theta_1 e_2,$$

$$\varphi_i = k_i \cdot x - \omega t = n_1 k_0 u^i \cdot x - \omega t = n_1 k_0 (x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1) - \omega t,$$

$$E^i = E_{\perp}^i e^{i\varphi_i} e_3 + E_{\parallel}^i e^{i\varphi_i} (\cos \theta_1 e_1 + \sin \theta_1 e_2),$$

em que $E_{\perp}^i$ e $E_{\parallel}^i$ representam respectivamente as amplitudes das componentes perpendicular e paralela ao plano de incidência do campo elétrico incidente. Naturalmente,

$$B^i = \frac{1}{v_1} \{ u^i \times e_3 E_{\perp}^i e^{i\varphi_i} + E_{\parallel}^i e^{i\varphi_i} e_3 \},$$

$$\mathbf{u}^r = \sin \theta_1 \mathbf{e}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{e}_2,$$

$$\varphi_r = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t = n_1 k_0 \mathbf{u}^r \cdot \mathbf{x} - \omega t = n_1 k_0 (x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1) - \omega t,$$

$$\mathbf{E}^r = E_{\perp}^r e^{i\varphi_r} \mathbf{e}_3 + E_{\parallel}^r e^{i\varphi_r} (-\cos \theta_1 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{e}_2),$$

$$\mathbf{B}^r = \frac{1}{v_1} \left\{ \mathbf{u}^r \times \mathbf{e}_3 E_{\perp}^r e^{i\varphi_r} + E_{\parallel}^r e^{i\varphi_r} \mathbf{e}_2 \right\},$$

e

$$\mathbf{u}^t = \sin \theta_2 \mathbf{e}_1 - \cos \theta_2 \mathbf{e}_2,$$

$$\varphi_t = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x} - \omega t = n_2 k_0 \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{x} - \omega t = n_2 k_0 (x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2) - \omega t,$$

$$\mathbf{E}^t = E_{\perp}^t e^{i\varphi_t} \mathbf{e}_3 + E_{\parallel}^t e^{i\varphi_t} (\cos \theta_2 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_2 \mathbf{e}_2),$$

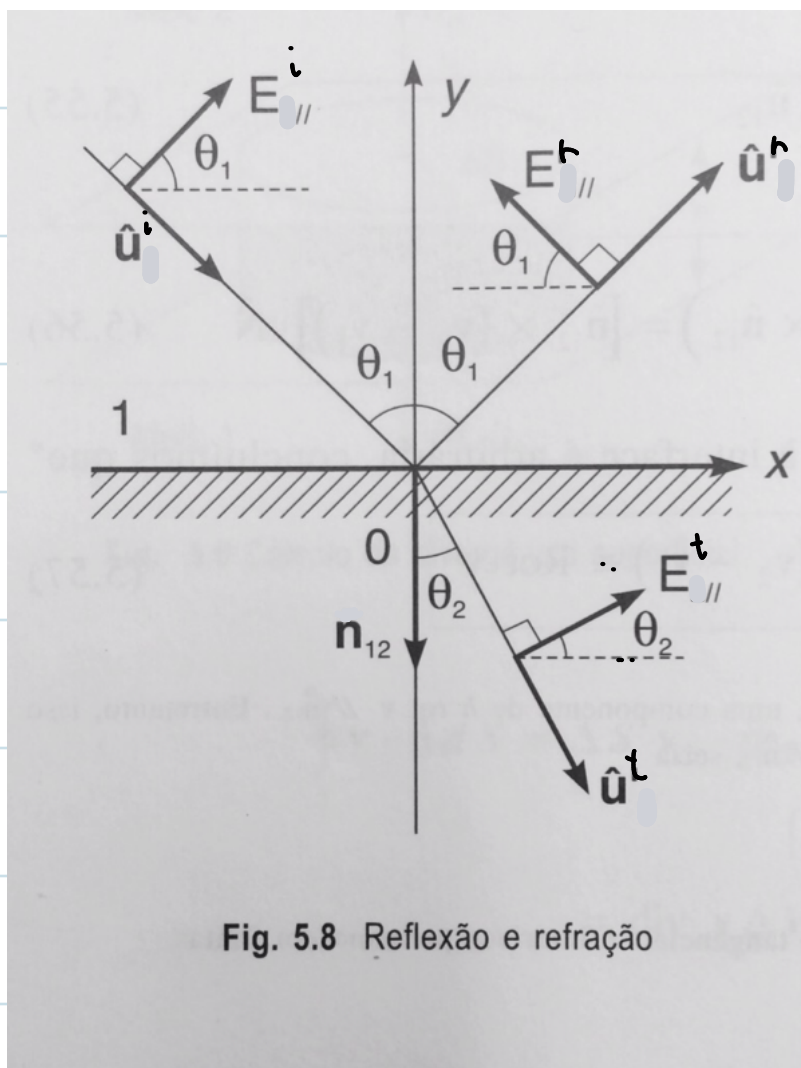
$$\mathbf{B}^t = \frac{1}{v_2} \left\{ \mathbf{u}^t \times \mathbf{e}_3 E_{\perp}^t e^{i\varphi_t} + E_{\parallel}^t e^{i\varphi_t} \mathbf{e}_3 \right\}.$$

Consequentemente, o campo elétrico no meio 1 é dado pela superposição dos campos incidente e refletido:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r \\ &= (E_{\perp}^i e^{i\varphi_i} + E_{\perp}^r e^{i\varphi_r}) \mathbf{e}_3 + (E_{\parallel}^i e^{i\varphi_i} - E_{\parallel}^r e^{i\varphi_r}) \cos \theta_1 \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (E_{\parallel}^i e^{i\varphi_i} + E_{\parallel}^r e^{i\varphi_r}) \sin \theta_1 \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

enquanto que o campo elétrico no meio 2 corresponde ao campo transmitido

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}^t \\ &= E_{\perp}^t e^{i\varphi_t} \mathbf{e}_3 + E_{\parallel}^t e^{i\varphi_t} (\cos \theta_2 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_2 \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$



A figura ao lado mostra o plano de incidência da situação que descrevemos. Por simplicidade, foram omitidos o campo magnético e as componentes transversais do campo elétrico. Como não há cargas nem correntes acumuladas na interface entre os meios 1 e 2, temos que todas as componentes de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são contínuas. Tomando $\mathbf{n}_{12} = -\mathbf{e}_2$, temos para as

componentes tangenciais à interface:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)|_{x=0} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_1|_{x=0} = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_2|_{x=0}$$

$$\Rightarrow (E_{\perp}^i + E_{\perp}^r)\mathbf{e}_1 - (E_{\parallel}^i - E_{\parallel}^r)\mathbf{e}_3 \cos \theta_1 = E_{\perp}^t\mathbf{e}_1 - E_{\parallel}^t\mathbf{e}_3 \cos \theta_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{\perp}^i + E_{\perp}^r = E_{\perp}^t \\ (E_{\parallel}^i - E_{\parallel}^r) \cos \theta_1 = E_{\parallel}^t \cos \theta_2 \end{cases}$$

Similarmente, o campo magnético no meio 1 corresponde à superposição dos campos magnéticos das ondas incidente e refletida:

$$B_1 = \frac{1}{v_1} \{ \omega^i \times e_3 E_{\perp}^i e^{i\varphi_i} + \omega^r \times e_3 E_{\perp}^r e^{i\varphi_r} + (E_{\parallel}^i e^{i\varphi_i} + E_{\parallel}^r e^{i\varphi_r}) e_3 \}$$

Como:

$$\omega^i \times e_3 = -\sin\theta_1 e_2 - \cos\theta_1 e_1$$

$$\omega^r \times e_3 = -\sin\theta_1 e_2 + \cos\theta_1 e_1$$

temos:

$$B_1 = \frac{1}{v_1} \{ (-E_{\perp}^i e^{i\varphi_i} + E_{\perp}^r e^{i\varphi_r}) \cos\theta_1 e_1 + (-E_{\perp}^i e^{i\varphi_i} - E_{\perp}^r e^{i\varphi_r}) \sin\theta_1 e_2 + (E_{\parallel}^i e^{i\varphi_i} + E_{\parallel}^r e^{i\varphi_r}) e_3 \}.$$

Para o meio 2, apenas o campo magnético da onda transmitida contribui.

Notando que:

$$\omega^t \times e_3 = -\sin\theta_2 e_2 - \cos\theta_2 e_1,$$

temos que:

$$B_2 = \frac{1}{v_2} \{ -E_{\perp}^t e^{i\varphi_t} \cos\theta_2 e_1 - E_{\perp}^t e^{i\varphi_t} \sin\theta_2 e_2 + E_{\parallel}^t e^{i\varphi_t} e_3 \}.$$

De forma que a continuidade das componentes magnéticas tangenciais à interface demanda:

$$n_{12} \times (B_2 - B_1)|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow e_2 \times B_1|_{x=0} = e_2 \times B_2|_{x=0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_1} \{ (E_{\perp}^i - E_{\perp}^r) \cos\theta_1 e_3 + (E_{\parallel}^i + E_{\parallel}^r) e_1 \} = \frac{1}{v_2} \{ E_{\perp}^t \cos\theta_2 e_3 + E_{\parallel}^t e_1 \}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{v_1} (E_{\perp}^i - E_{\perp}^r) \cos \theta_1 = \frac{1}{v_2} E_{\perp}^t \cos \theta_2 \\ \frac{1}{v_1} (E_{\parallel}^i + E_{\parallel}^r) = \frac{1}{v_2} E_{\parallel}^t \end{cases}$$

Observamos que as equações relacionadas a amplitude incidente com as refletida e transmitida se separam naturalmente em dois grupos independentes, um envolvendo apenas as componentes transversais ao plano de incidência e o outro com apenas as amplitudes paralelas. Justificamos, assim, a conveniência da escolha das polarizações lineares paralela e perpendicular ao plano de incidência.

Assim como no caso da difração, estamos interessados nas amplitudes relativas, definidas por:

$$\textcircled{*} \text{ Amplitudes de reflexão: } R_{\perp} = A_{\perp}^r / A_{\perp}^i, \quad R_{\parallel} = A_{\parallel}^r / A_{\parallel}^i$$

$$\textcircled{*} \text{ Amplitudes de transmissão: } T_{\perp} = A_{\perp}^t / A_{\perp}^i, \quad T_{\parallel} = A_{\parallel}^t / A_{\parallel}^i.$$

Em termos dessas grandezas, as equações obtidas constituem dois sistemas de duas equações com duas incógnitas, que resolveremos a seguir.

$\textcircled{*}$ Amplitudes transversais

$$\begin{cases} E_{\perp}^i + E_{\perp}^r = E_{\perp}^t \\ \frac{1}{v_1} (E_{\perp}^i - E_{\perp}^r) \cos \theta_1 = \frac{1}{v_2} E_{\perp}^t \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + R_{\perp} = T_{\perp} \\ 1 - R_{\perp} = \frac{v_1 \cos \theta_2}{v_2 \cos \theta_1} T_{\perp} \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos:

$$2 = \left(1 + \frac{v_1}{v_2} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right) T_{\perp} = \left(1 + \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right) T_{\perp}$$

em que usamos a relação entre a velocidade de propagação da luz v_j em um meio com índice de refração n_j e a velocidade da luz no vácuo, $v_j = \frac{c}{n_j}$. Invocando a lei de Snell,

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2},$$

obtemos:

$$2 = \left(1 + \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{\cos \theta_1 \sin \theta_2} \right) T_{\perp} = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \sin \theta_2} T_{\perp}$$

$$\Rightarrow T_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)}$$

Substituindo esse resultado na primeira equação do sistema, obtemos:

$$R_{\perp} = T_{\perp} - 1 = - \frac{\sin (\theta_1 - \theta_2)}{\sin (\theta_1 + \theta_2)}.$$

⊗ Amplitudes paralelas

$$\begin{cases} \frac{1}{v_1} (E_{\parallel}^i + E_{\parallel}^r) = \frac{1}{v_2} E_{\parallel}^t \\ \cos \theta_1 (E_{\parallel}^i - E_{\parallel}^r) = \cos \theta_2 E_{\parallel}^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + R_{\parallel} = \frac{v_1}{v_2} T_{\parallel} \\ 1 - R_{\parallel} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} T_{\parallel} \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos:

$$2 = \left(\frac{v_1}{v_2} + \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right) T_{\parallel} = \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} + \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right) T_{\parallel} = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin \theta_2 \cos \theta_1} T_{\parallel}$$

$$\Rightarrow T_{//} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2} ,$$

em que utilizamos a lei de Snell em termos da velocidade de propagação da luz no meio, a saber,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} .$$

Finalmente, substituindo esse resultado na segunda equação, concluímos que :

$$R_{//} = 1 - \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} T_{//} = \frac{\tan (\theta_1 - \theta_2)}{\tan (\theta_1 + \theta_2)} .$$

Tais resultados são conhecidos como **fórmulas de Fresnel** para as amplitudes de reflexão e transmissão.

As fórmulas de Fresnel se simplificam enormemente para o caso da incidência normal, que corresponde a tomarmos $\theta_1 = \theta_2 = 0$:

$$T_{//} = T_{\perp} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} ,$$

$$R_{//} = -R_{\perp} = -\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} .$$

Exercício 10 : " Demonstre as fórmulas de Fresnel para a incidência normal . "

De fato, se $\theta_1 = 0$, o plano de incidência não está definido. Já a

diferença de sinal entre $R_{//}$ e $R_{\perp}$ resulta do fato de termos adotado convenções opostas para as orientações de $E_{//}^r$ e $E_{\perp}^r$, a saber, orientamos $E_{\perp}^r$ no mesmo sentido de $E_{\perp}^i$, ao passo que $E_{//}^r$ está no sentido oposto a $E_{//}^i$.

Finalmente, observamos que na reflexão da luz ao atravessar de uma interface entre um meio menos refringente (e.g., o ar) e um mais refringente (e.g., o vidro), temos de $n_1 < n_2$ que $n_1 - n_2 < 0$ de forma que, das fórmulas de Fresnel para incidência normal, obtemos:

$$R_{//} = R_{//}^r / R_{//}^i > 0$$

$$R_{\perp} = R_{\perp}^r / R_{\perp}^i < 0$$

mostrando que nesse caso as direções de E^i e E^r são opostas, correspondendo à defasagem de π discutida anteriormente.