

### 1. MODELOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

#### 1.1. Introdução

Conforme comentado no Capítulo 1, as estruturas subterrâneas apresentam interface extensa de contato com o maciço. As forças de contato nessas interfaces podem ser vistas como incógnitas adicionais numa análise, o que tem conduzido a processos clássicos nos quais se busca prever a forma de distribuição e a intensidade das mesmas. Comumente essa estratégia vem sendo denominada como método ou **modelo de ações impostas**, para diferenciar de modelos nos quais o maciço é representado com suas propriedades e as forças de contato são resultantes de tensões internas que surgem pela aplicação do método de cálculo. Essa outra abordagem dá origem aos denominados **modelos de ações espontâneas**, em que as tensões de contato serão geradas automaticamente (ou espontaneamente) pela aplicação do método de cálculo.

Nesses modelos de ações espontâneas cabe ainda uma subdivisão em dois grupos, quais sejam:

- Modelos de elementos discretos: nos quais o maciço é simulado com molas ou barras;
- Modelos de meio contínuo: nos quais o maciço é representado como um meio contínuo;

Em ambos os casos, soluções analíticas são restritas a poucos casos de geometria mais simples, dando-se ênfase ao uso de métodos numéricos para solução dos problemas.

Para ilustrar a questão, e demonstrar as características da análise de estruturas subterrâneas, veja-se o problema simples apresentado na Figura 1, no qual se representa uma viga simplesmente apoiada e outra, idêntica, colocada diretamente sobre o solo, ambas submetidas a uma força concentrada no meio do vão.

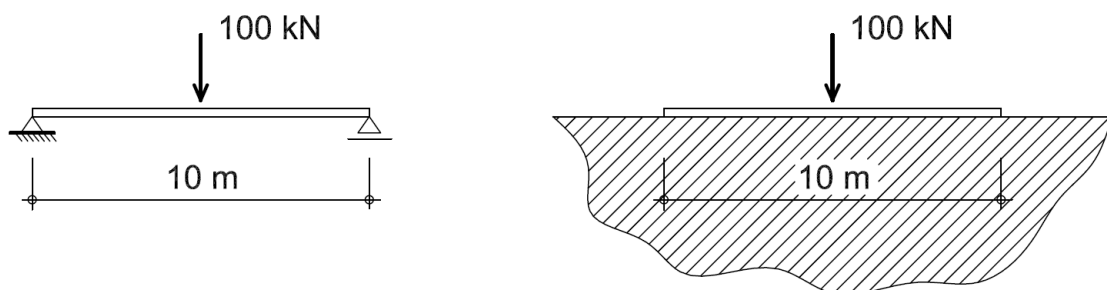


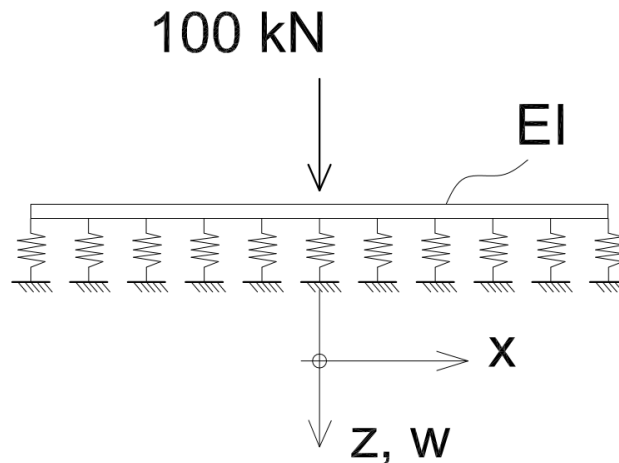
Figura 1 –

Com conhecimento básico de Resistência dos Materiais é simples tirar muitas conclusões sobre a viga da esquerda: trabalho a flexão, deformada conhecida,

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

esforços determinados com equações da estática. Com relação à viga da direita, a situação não é tão bem definida. Uma alternativa é imaginar que o solo possa ser simulado com um modelo de molas elásticas de rigidez “k” (kN/m<sup>2</sup>), também chamado modelo de Winkler, cuja equação diferencial é

$$w^{IV} + \frac{k}{EI}w = 0$$



Onde:

- $w$  = deslocamento vertical;
- $EI$  = produto de rigidez da viga;

Para casos particulares de vigas longas – situação que pode ser definida de forma adequada – a solução da equação é encontrada em textos clássicos de Resistência dos Materiais (p.ex.: NASH, 1982) é:

$$w = A \times e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \operatorname{sen} \lambda x)$$

Sendo “A” e “B”, constantes que são determinadas a partir das condições de contorno e:

$$\lambda^4 = \frac{k}{4EI}$$

No caso particular, as condições de contorno são rotação nula no centro da viga e efeitos nulos para ordenadas “x” com valores grandes ( $x = \pm\infty$ ). Além disso, a força cortante logo à direita da carga é – 50 kN. Isso implica, admitindo a força com valor genérico da carga “P”, na solução abaixo:

$$w(x) = \frac{P}{8 \times \lambda^3 \times EI} e^{-\lambda x} (\operatorname{sen} \lambda x + \cos \lambda x)$$

O momento fletor pode ser expresso por:

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

$$M(x) = EI \times \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{P}{4\lambda} e^{-\lambda x} (\text{sen}\lambda x + \text{cos}\lambda x)$$

E as demais derivadas expressam a força cortante e as reações nas molas.

$$V(x) = EI \times \frac{d^3w}{dx^3}$$

$$p(x) = EI \times \frac{d^4w}{dx^4}$$

O inverso do termo “ $\lambda$ ” (m) é comumente referenciado como comprimento fictício da viga sobre base elástica. Por comparação do seu valor com o comprimento real pode-se, com base na equação, conceituar a viga como “muito longa” quando o mesmo é superior a cerca de três vezes o comprimento da viga – pela teoria,  $\lambda > \pi L$ .

Quanto mais rígida a viga, maiores os esforços na mesma e menores os esforços no solo, que serão mais bem distribuídos. Na Figura apresenta-se exemplo de uma viga com comprimento de 10 m.

Com os dados da Figura abaixo, obtém-se:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{40000}{4 \times 3,26 \times 10^4}} = 1,31 \text{m}^{-1}$$

Ou seja, o comprimento fictício ( $\lambda^{-1}$ ) seria de 76 cm, valor muito inferior ao comprimento real. Logo a viga poderia ser considerada de comprimento infinito, e o momento máximo valeria  $100/(4 \times 0,76) \sim 33 \text{ kN.m}$ .

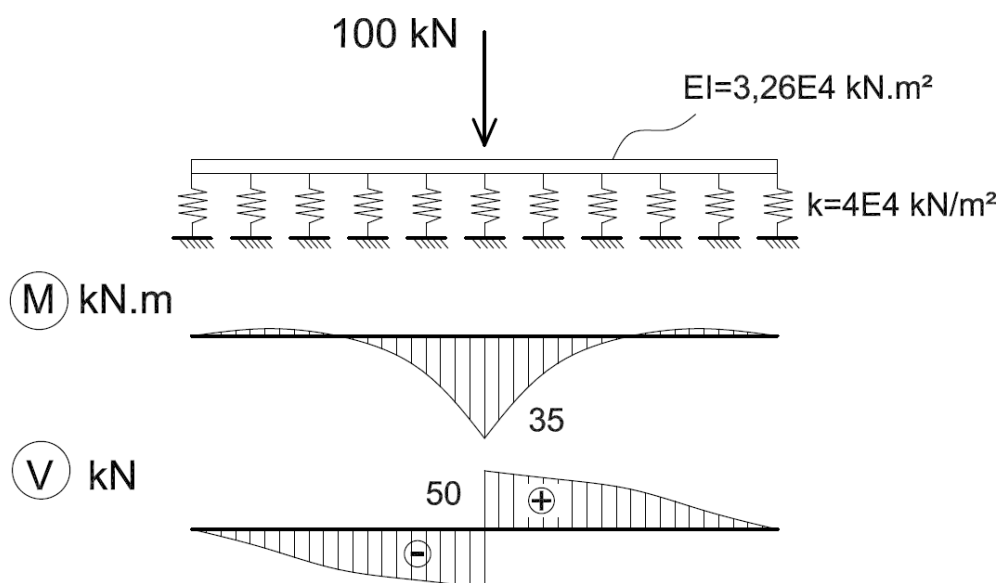
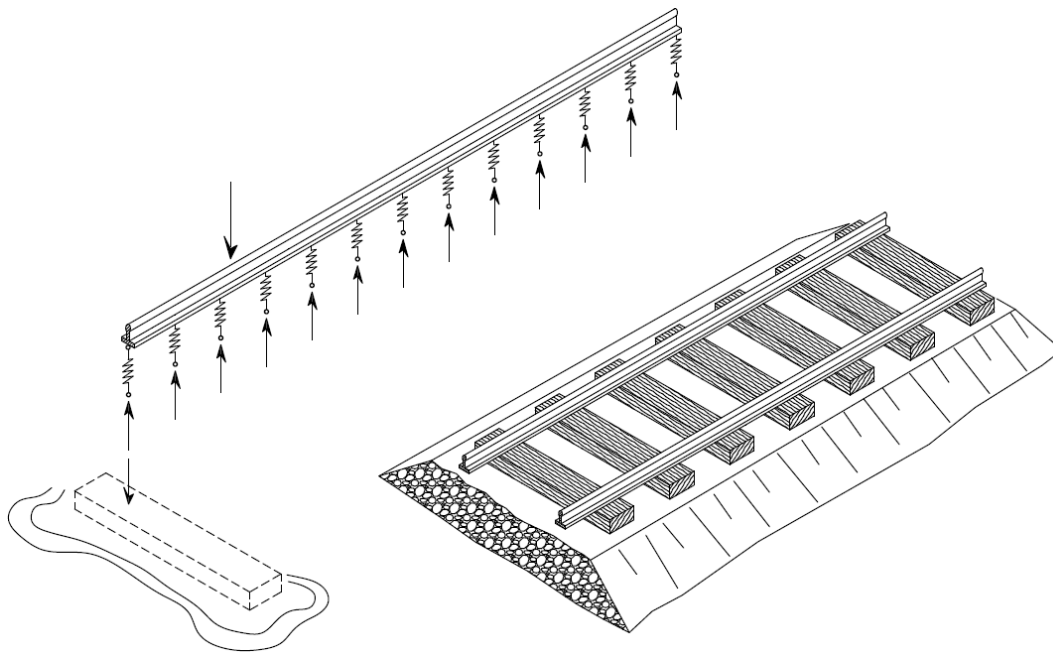


Figura 2 –

Quanto ao valor de “k” a ser empregado, não há como se fazer uma definição precisa haja vista que as molas não representam o solo de maneira perfeita. Mas um valor em torno do módulo de elasticidade que pudesse ser atribuído ao solo parece razoável, consideradas as limitações do modelo, para o caso de um maciço homogêneo, isotrópico que se possa admitir elástico. Estimativas de parâmetros elásticos são discutidas no próximo item.

O modelo de vigas sobre molas tem sua origem associada ao problema de análise estrutural de trilhos de ferrovias, com sua clássica constituição de montagem com dormentes sobre lastro. Nesse sistema, o lastro é executado de forma a proporcionar uma base uniforme para os dormentes. Os dormentes, por sua vez, se constituem em apoios flexíveis que guardam uma pequena distância entre si. Assim, é natural imaginar um modelo de viga sobre molas, ou modelo de Winkler.



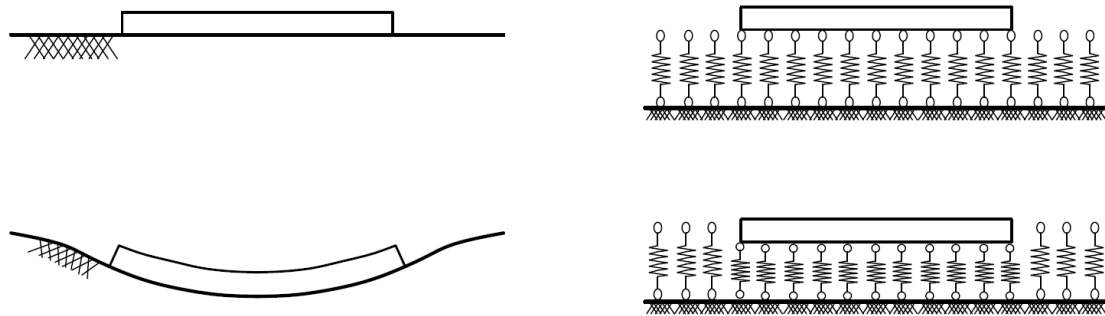
**Figura 3** – Ilustração do modelo de Winkler aplicado a trilho de rodovia.

De acordo com Timoshenko (*History of strength of materials – McGraw-Hill, 1953*) o engenheiro alemão E. Winkler apresentou esse modelo pela primeira vez em 1867, em seu livro sobre Resistência dos Materiais, e indicou essa teoria para análise de trilhos de ferrovias.

No entanto, apesar do modelo de Winkler ser bastante intuitivo e depender de um único parâmetro – que seria a constante de mola  $k$  ( $\text{kN/m}^2$ ) – há dificuldades em estimar o valor de  $k$ , haja vista que essa constante não é uma propriedade do solo que possa ser determinada de maneira objetiva, como já foi comentado anteriormente.

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

Deve-se destacar que as molas do modelo de Winkler trabalham de forma isolada, o que traz uma incompatibilidade para representar a deformação do maciço. Um exemplo simples pode ser apresentado para ilustrar o que se disse. Trata-se de uma barra apoiada de forma contínua sob ação do seu próprio peso; num modelo de Winkler, não ocorre flexão.



**Figura 4** – Esboço da deformada para uma barra apoiada de forma contínua submetida ao próprio peso: (a) esboço da deformada mais próxima da realidade; (b) deformada obtida com modelo de Winkler, demonstrando o fato das molas “não conversarem entre si”.

Em SELVADURAI (1979) encontram-se modelos com dois parâmetros que se constituem em aperfeiçoamento do Modelo de Winkler.

Alternativa seria a consideração do solo como meio contínuo. POULOS & DAVIS (1974) apresentam algumas expressões úteis para caso de meio contínuo elástico. Naturalmente, há de se definirem dois parâmetros nesse caso:  $E$  (módulo de elasticidade) e  $\nu$  (coeficiente de Poisson).

Como comparação, o exemplo da viga, representado na Figura 1, pode ser resolvido com base na figura a seguir (POULOS & DAVIS, 1974, Cap. 12). Para emprego do referido ábaco, deve-se determinar inicialmente a rigidez relativa ( $K$ ), definida como segue:

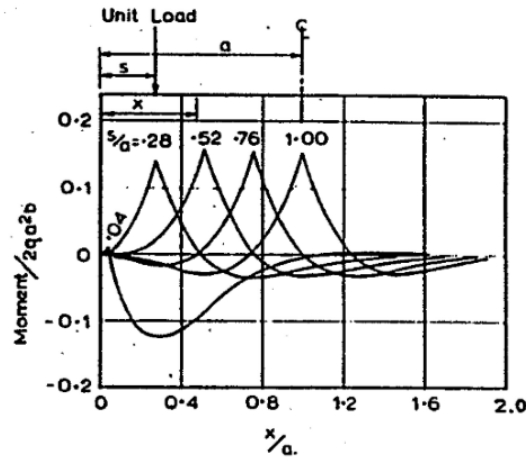
$$K = \frac{E_p I_p (1 - \nu_s^2)}{\pi E_s a^4} \quad \dots (12.15)$$

where  $E_p$  = modulus of strip  
 $I_p$  = moment of inertia of strip section =  $bt^3/6$   
 $E_s, \nu_s$  = moduli of foundation  
 $a$  =  $\frac{1}{2}$  length of strip  
 $b$  =  $\frac{1}{2}$  width of strip.

Para o caso da viga do exemplo anterior, tem-se:

$$K = \frac{3,26 \times 10^4 \times (1 - \nu_s^2)}{\pi E_s \times 5^4}$$

Há que se definirem dois parâmetros, conforme já comentado. Admitindo  $E/(1-\nu^2) = 40.000 \text{ kN/m}^2$ , valor semelhante ao empregado para a constante de mola utilizada no modelo de Winkler, obtém-se  $K = 4,1 \times 10^{-4}$ .



**FIG.12.11 Moment in strip.**  
 $a/b=25, K=4.1 \times 10^{-4}$   
 (Brown, 1969c).

E o valor, por exemplo, de  $M_{m\acute{a}x}$ , pode ser obtido com uso de uma tensão média obtida a partir do valor da carga “P” suposta uniforme na área  $4ab$ . Ou seja,  $q=P/(4ab)$ , que nesse caso vale  $10 \text{ kN/m}^2$ .

O valor de  $M_{m\acute{a}x}$  seria de:

$$M_{m\acute{a}x} = 0,14 \times 2 \times 10 \times 5^2 \times 0,5 = 35 \text{ kN.m}$$

Verifica-se que os valores de  $M_{m\acute{a}x}$  encontrados com o modelo de Winkler ou com solução da Teoria da Elasticidade, nesse caso, são próximos entre si. No entanto, soluções baseadas na Teoria da Elasticidade, ainda que na forma de gráficos, são limitadas. Dessa forma, é mais usual é que sejam feitos modelos numéricos em computador, utilizando-se softwares disponíveis.

No caso de uma estaca vertical, imersa em solo, submetida a esforços na extremidade há algumas diferenças importantes. Primeiro, o módulo de elasticidade do solo é entendido como variável com a profundidade, devido ao aumento da tensão de confinamento – fato demonstrado por ensaios (DAVIS & SELVADURAI, 1996; Fig. 2.11 – p. 59).

Dessa forma, a modelagem como viga sobre apoios elásticos deve levar isso em conta, por meio de variação do valor de “k” com a profundidade. Soares (1984) apresenta soluções para o caso de módulo de reação variável linearmente com a profundidade. LANGER et al (1984) apresentam coletânea de artigos interessantes sobre esse mesmo tema. A referência da ASTM (1953) também apresenta artigos muito interessantes.

### 1.2. Parâmetros para o maciço

A elaboração de um modelo de análise estrutural com consideração da interação entre a estrutura e o maciço, no caso de solo, requer conhecimento do comportamento dos materiais da estrutura e do solo. Em estruturas de superfície, para as situações de serviço, modelos elásticos são correntemente empregados.

Para o solo, qual seria o melhor procedimento? Inicialmente, considere-se que é necessário avaliar o comportamento do material em ensaios de laboratório. Na Figura 5(a), por exemplo, apresenta-se diagrama de tensão desviadora em função da deformação, obtida com ensaio com as seguintes características:

- Ensaio triaxial de compressão por carregamento, isto é, ensaio triaxial convencional;
- A amostra foi, primeiramente, submetida à pressão confinante de 200 kPa e, em seguida, sujeita a compressão axial.
- Trata-se de um solo siltoso, com as seguintes frações granulométricas: argila: 10%; silte: 63%; areia: 27%. Os limites de consistência são: LL=47%; IP=18%.

Observa-se que a tensão de ruptura situa-se entre 500 kPa e 600 kPa. Para valores inferiores a cerca de metade desses limites, o comportamento é bem próximo do linear. Isso sugere que o uso de elasticidade linear pode fornecer uma aproximação adequada.

A dúvida inicial seria como avaliar os parâmetros elásticos. Considerando solo isotrópico há necessidade de avaliar duas constantes elásticas, respectivamente o módulo de Young (E) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Segundo DAVIS & SELVADURAI (1996), por análise do diagrama que relaciona a deformação volumétrica com a deformação axial é possível obter o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Isso porque na fase de aplicação da tensão desviadora a deformação volumétrica ( $\epsilon_v$ ) vale:

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$$

Já que as deformações horizontais são iguais nas duas direções. Pela definição do coeficiente de Poisson:

$$\nu = - \epsilon_3 / \epsilon_1$$

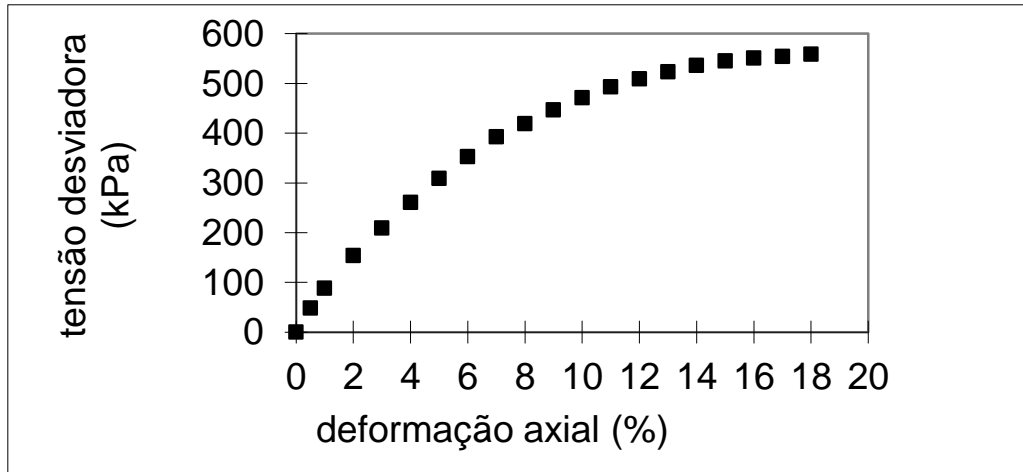
Chega-se à expressão:

$$\nu = 0,5 \times (1 - \epsilon_v / \epsilon_1)$$

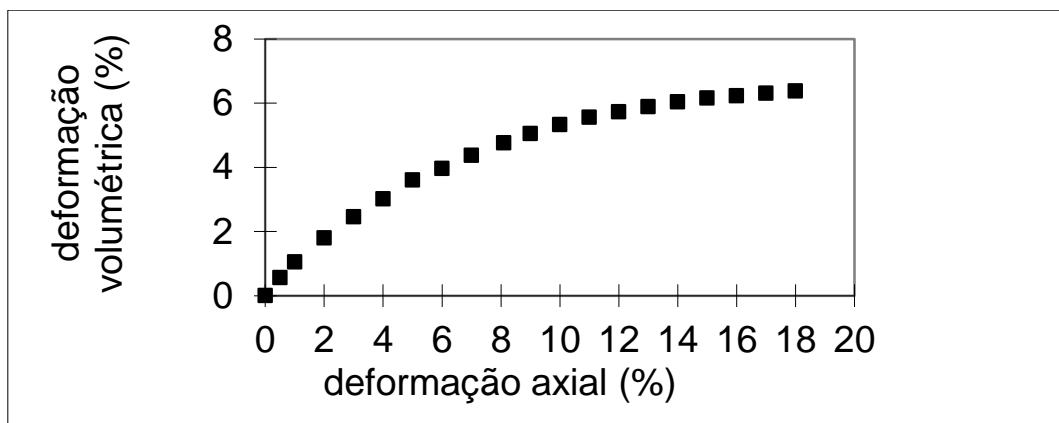
Retornado ao gráfico que relaciona a deformação volumétrica ( $\epsilon_v$ ) com a deformação axial ( $\epsilon_1$ ) (Figura 5(b)), admitindo a região do gráfico em que a

variação de deformação axial é inferior a 5%, pode-se admitir que o valor da variação de deformação volumétrica seria da ordem de 3,6%, o que conduziria ao valor do coeficiente de Poisson de:

$$\nu = 0,5 \times (1 - 3,6/5) = 0,14$$



(a)



(b)

**Figura 5** – Resultados de ensaio triaxial drenado de amostra de solo: (a) Diagrama tensão desviadora x deformação axial; (b) Diagrama deformação volumétrica x deformação axial.

Por sua vez, analisando o gráfico de tensão-deformação, na mesma faixa de variação da deformação axial (< 5%), no qual a tensão desviadora alcança valor da ordem de 300 kPa, pode-se determinar o módulo de Young:

$$E = 300 / 0,05 = 6000 \text{ kPa} = 6 \text{ MPa}$$

Logo, a partir dos resultados de um ensaio triaxial, podem ser avaliadas as constantes elásticas. O problema aqui é que a prática tem demonstrado que esses valores obtidos em um ensaio triaxial são dependentes da tensão de



## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

confinamento. Uma alternativa seria tentar obter essas constantes a partir de um ensaio edométrico. No entanto, nesse ensaio obtém-se apenas uma relação entre  $E$  e  $\nu$ , que é comumente denominado módulo de elasticidade edométrico ( $E_{edo}$ ), que vale:

$$E_{edo} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Concluindo, a partir de um ensaio triaxial podem-se obter as constantes a partir de dois gráficos. No entanto esses valores variam com a tensão confinante. Num ensaio edométrico, pode-se obter uma relação entre as duas constantes. Disso resulta que os parâmetros elásticos do solo não são tão simples de serem estimados quanto os de materiais estruturais convencionais, tais como aço e concreto. Uma análise dos efeitos da variação dos valores dessas constantes no modelo é adequada.

Há ainda algumas sugestões, em referências bibliográficas, de valores para parâmetros elásticos do solo, baseados em correlações. No entanto, há que se lembrar de que há muitas limitações quanto a esses valores. Apesar disso, apenas como ordem de grandeza, apresentam-se abaixo alguns valores de  $E$  e coeficiente de Poisson apresentados pelo Prof. Teixeira e por Hachich, apud BARKAN et al. (1962). Eventualmente, numa primeira análise, esses valores podem se constituir em referência.

Teixeira (1993)			
Tipo de Solo	$\alpha$	K (kN/m <sup>2</sup> )	$\alpha \cdot K$ (kN/m <sup>2</sup> )
AREIA	3	Puro	900
		Siltosa	700
		Argilosa	550
		com Pedregulhos	1100
SILTE	5	Puro	350
		Arenoso	450
		Argiloso	250
ARGILA	7	Arenosa	300
		Siltosa	200

$$E = \alpha \cdot K \cdot N_{SPT}$$

- argila saturada: 0,5
- argila com areia e silte: 0,3 a 0,42
- argila não saturada: 0,35 a 0,40
- solo arenoso: 0,15 a 0,25
- areia pura: 0,3 a 0,35

Como ordem de grandeza, aplicando-se a tabela acima ao solo que foi ensaiado anteriormente, obter-se-ia valores de  $E$  de  $2250 \cdot N_{SPT}$  (kPa). Pelo ensaio, estimou-se  $E = 6000$  kPa.

Ademais, há de se avaliar o comportamento do material na ruptura, o que requer outra teoria que não a elasticidade. Usualmente, emprega-se a Teoria da Plasticidade e algum critério de resistência adequado ao material. Para solos, é comum admitir-se a validade do critério de Mohr-Coulomb, o qual

depende de dois parâmetros no caso drenado, respectivamente coesão efetiva ( $c'$ ) e ângulo de atrito interno efetivo ( $\Phi'$ ).

Para análise da segurança em ELU devem-se adotar coeficientes de minoração da resistência ( $\gamma_m$ ) e coeficientes de majoração das ações ( $\gamma_f$ ) ou adotar-se um fator de segurança global (F). Usualmente, aplicam-se:

- $\gamma_m = 1,4$ ;  $\gamma_f = 1,4$ ;

O valor de F usualmente varia entre 2,0 e 3,0, conforme se realizem ensaios representativos do solo ou não.

Portanto, imaginando-se uma situação drenada, haverá necessidade de determinar quatro parâmetros do solo para realizar análise representativa das situações em serviço e na ruptura.

Em referências de Mecânica dos Solos, podem-se encontrar maiores detalhes sobre deformabilidade e resistência dos solos, assunto vasto e que está muito além dos objetivos deste texto.

### **1.3. Rigidez dos elementos da estrutura**

#### **1.3.1. Generalidades**

Nesta seção será feita uma breve discussão sobre o comportamento tensão deformação de elementos estruturais de concreto armado. Conforme apresentado no Capítulo 1, diversos outros materiais são empregados em estruturas subterrâneas. No entanto, o concreto armado é provavelmente o material com maior uso.

Será dada ênfase apenas às características dos materiais que interessam diretamente para análise estrutural. Portanto, não serão abordados detalhes dos materiais constituintes: cimento, agregados, água de amassamento e aditivos nem as propriedades do concreto fresco. Para esta finalidade, o aluno deve recorrer a livros de tecnologia do concreto que exploram tais assuntos em profundidade.

Além disso, limita-se o escopo a concretos convencionais, ou, de maneira mais bem definida, a concretos compreendidos nas classes de resistência do grupo I, conforme ABNT NBR 8953, ou seja, até concreto Classe C-50.

#### **1.3.2. Comportamento do concreto à compressão**

A resistência à compressão do concreto é obtida por meio de ensaios de cilindros. A moldagem dos corpos de prova e a realização dos ensaios seguem as normas ABNT NBR 5738 e ABNT NBR 5739.

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

Nos projetos indica-se a resistência à compressão característica  $f_{ck}$ , que, salvo indicação em contrário, refere-se à idade de 28 dias. A ABNT NBR 12655 fornece indicações para que possa ser estimada a resistência à compressão média,  $f_{cmj}$ , correspondente a uma resistência  $f_{ckj}$  especificada.

Em alguns casos é importante obter a evolução da resistência à compressão com a idade, o que pode ser feito por meio de ensaios ou, por meio analítico, em caráter orientativo, conforme a expressão abaixo, extraída do Item 12.3.3 da NBR 6118:

$$f_{ckj} = \beta_1 f_{ck}$$

sendo

$$\beta_1 = \exp\left\{s \left[1 - \left(\frac{28}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

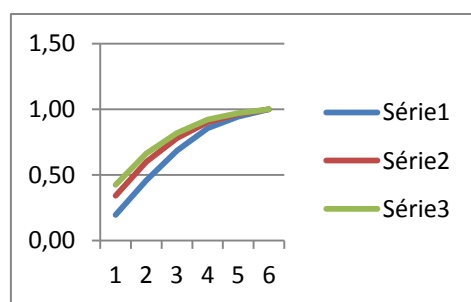
O valor do parâmetro  $s$  utilizado na expressão acima varia em função do tipo de cimento empregado, valendo, para  $t$  em dias:

- $s = 0,38$  para concreto de cimento CIII e IV;
- $s = 0,25$  para concreto de cimento CPI e II;
- $s = 0,20$  para concreto de cimento CPV-ARI;

As tabelas abaixo ilustram a variação de  $\beta_1$ , com o tempo  $t$  em dias, conforme a expressão fornecida pela NBR 6118.

Cimento tipo CIII e CIV		Cimento tipo CPI e CII		Cimento tipo CPV-ARI	
t (dias)	$\beta_1$	t (dias)	$\beta_1$	t (dias)	$\beta_1$
1	0,20	1	0,34	1	0,42
3	0,46	3	0,60	3	0,66
7	0,68	7	0,78	7	0,82
14	0,85	14	0,90	14	0,92
21	0,94	21	0,96	21	0,97
28	1,00	28	1,00	28	1,00
90	1,18	90	1,12	90	1,09
120	1,22	120	1,14	120	1,11
365	1,32	365	1,20	365	1,16
730	1,36	730	1,22	730	1,17

(a)



(b)

**Figura 6** – Variação de  $\beta_1$ , coeficiente que relaciona  $f_{ckj}$  com  $f_{ck}$ : (a) tabelas com variações até 2 anos; (b) gráfico com variação até os 28 dias conforme a NBR 6118 – em caráter orientativo.



**Figura 7** – Ensaio de resistência à compressão de concreto com ruptura tipo coluna – observar fissuras verticais paralelas.

O valor de  $f_{cd}$  é obtido com  $\gamma_c=1,4$ .

Outra propriedade mecânica importante é o módulo de elasticidade do concreto ( $E_c$ ), que pode ser obtido a partir de ensaios de compressão definidos na NBR 8522. Na falta de ensaios pode ser usada a expressão abaixo para o módulo tangente na origem

$$E_{ci} = 5600 \times f_{ck}^{1/2}$$

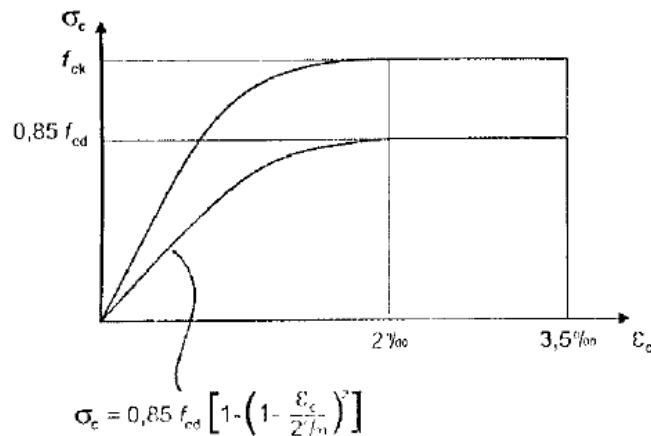
com  $f_{ck}$  e  $E_c$  em MPa. Se a idade do concreto for igual ou superior a sete dias, esta expressão pode ser usada, substituindo-se  $f_{ck}$  por  $f_{ckj}$ . O módulo secante deve ser usado nas análises elásticas e verificações de ELS e pode ser adotado com o seguinte valor

$$E_{cs} = 0,85E_{ci}$$

Para tensões de compressão inferiores a  $0,5f_{ck}$  a NBR 6118 permite que se adote relação tensão deformação linear. Os valores de coeficiente de Poisson e do módulo de elasticidade transversal podem ser adotados como  $\mu=0,2$  e  $G=0,4E_c$ .

A expressão de  $\sigma_c$  no trecho não linear é

$$\sigma_c = 0,85f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right]$$



**Figura 8** – Diagrama tensão deformação do concreto no ELU dado pela NBR 6118.

### 1.3.3. Comportamento do concreto à tração

A resistência à tração indireta  $f_{ct,sp}$  deve ser obtida em ensaios de compressão diametral, conforme a ABNT NBR 7222. Utiliza-se o mesmo equipamento do ensaio de resistência à compressão. O contato entre o corpo-de-prova e os pratos da máquina de ensaio deve dar-se somente ao longo de duas geratrizes diametralmente opostas do corpo de prova – Figura 9.

Na Figura 3, apresentam-se valores teóricos das tensões decorrentes da compressão diametral. Observa-se que o estado de tensões é biaxial –  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  – mas, apesar disso, o valor de resistência à tração que é obtido por esse ensaio é pouco maior do obtido no ensaio de resistência de tração axial. A explicação provável é o fato das fissuras se iniciarem no interior do corpo-de-prova, de acordo com LEONHARDT (1977).



**Figura 9** – Ensaio de resistência à tração do concreto por compressão diametral.

A ruptura é brusca. A Figura 10 ilustra um ensaio feito com armação contra fendilhamento no interior do concreto, demonstrando a fissuração transversal

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

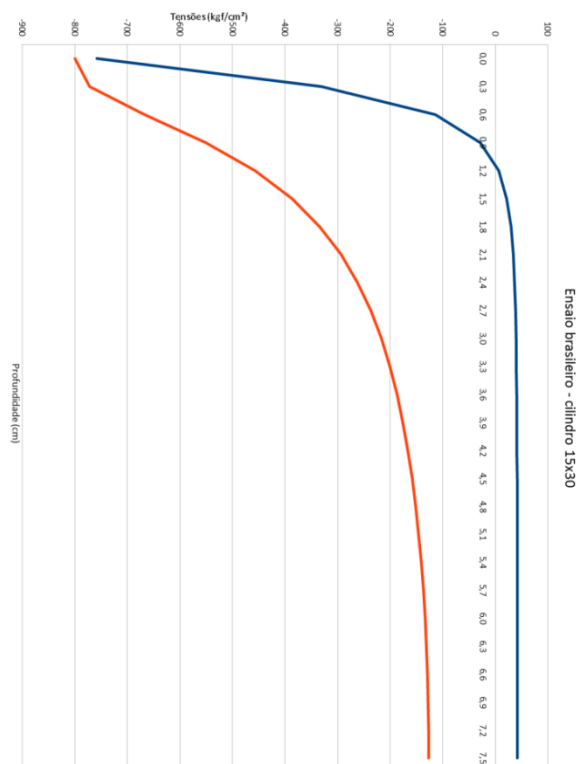
contida por esta armação. Deve-se observar que a tensão de compressão é elevadíssima (Figura 11).



**Figura 10** – Ensaio de compressão diagonal com armadura de fendilhamento.

Dados	
D (cm)	15,00
L (cm)	30,00
2a (cm)	1,25
P (kgf)	30000,00

y (cm)	$\sigma_y$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_x$ (kgf/cm <sup>2</sup> )
0,0	-758	-800
0,3	-331	-772
0,6	-114	-667
0,9	-28	-550
1,2	7	-457
1,5	22	-387
1,8	30	-334
2,1	34	-293
2,4	37	-262
2,7	38	-237
3,0	40	-217
3,3	40	-200
3,6	41	-187
3,9	41	-175
4,2	41	-166
4,5	42	-158
4,8	42	-151
5,1	42	-145
5,4	42	-141
5,7	42	-137
6,0	42	-134
6,3	42	-131
6,6	42	-129
6,9	42	-128
7,2	42	-127
7,5	42	-127



**Figura 11** – Valores teóricos de tensões ( $\sigma_y$ =horizontal) e ( $\sigma_x$ =vertical) em ensaio de compressão diametral fornecidos com aplicação da Teoria da Elasticidade.

Outro ensaio que pode ser utilizado para determinar a resistência à tração do concreto é o de flexão, conforme a ABNT NBR 12142. O valor assim obtido é

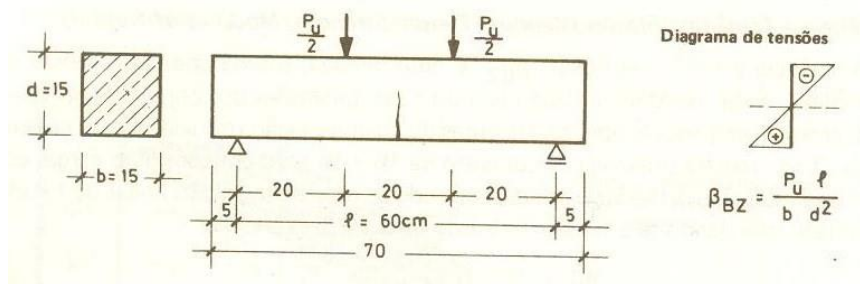


chamado  $f_{ct,f}$ . A figura a seguir ilustra tal ensaio (LEONHARDT, 1977). Uma barra prismática de concreto simples é disposta sobre dois apoios e duas forças concentradas são aplicadas nos terços do vão. A resistência à tração na flexão pode ser obtida com

$$f_{ct,f} = \frac{P_u \times \ell}{b \times d^2}$$

A resistência à tração na flexão ( $f_{ct,f}$ ) é comumente chamada módulo de ruptura.

(Observação: O esquema da Figura 12 não foi extraído da ABNT NBR 12142)



**Figura 12** – Ensaio de flexão (LEONHARDT, 1977).

A resistência à tração direta pode ser determinada, conforme a NBR 6118, por  $0,9f_{ct,sp}$  ou  $0,7f_{ct,f}$ . Na falta de ensaios podem ser obtidos os valores representativos pelas expressões abaixo:

$$f_{ctm} = 0,3 \times f_{ck}^{2/3}$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \times f_{ctm}$$

$$f_{ctk,inf} = 1,3 \times f_{ck}$$

Onde  $f_{ctm}$  é o valor médio da resistência à tração;  $f_{ctk,inf}$  e  $f_{ctk,sup}$  são, respectivamente os valores inferior e superior da resistência característica superior. Os valores de  $f_{ck}$  e  $f_{ctm}$  devem estar em MPa. Se  $f_{ckj}$  for superior a 7,0MPa, as expressões acima podem ser utilizadas para cálculo de  $f_{ctkj}$ , segundo a norma.

### 1.3.4. Comportamento do aço

O aço empregado nas armaduras passivas de estruturas de concreto pode ser CA-25, CA-50 e CA-60, tendo suas características dadas na ABNT NBR 7480. O coeficiente de conformação superficial  $\eta_b$  é indicado na Tabela 1 e será útil para estudo do comportamento conjunto dos materiais.

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

**Tabela 1** – Relações entre  $\eta_b$  e  $\eta_1$  para os diversos tipos de superfície.

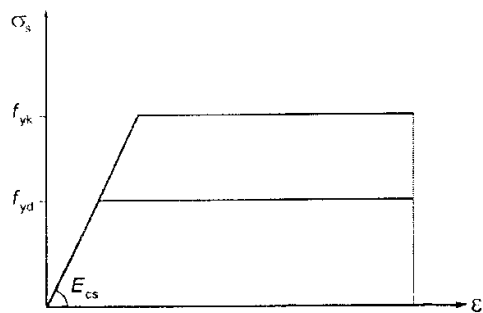
Tipo de barra	Coeficiente de conformação superficial	
	$\eta_b$	$\eta_1$
Lisa (CA-25)	1,0	1,0
Entalhada (CA-60)	1,2	1,4
Alta aderência (CA-50)	$\geq 1,5$	2,25

É conveniente lembrar que os aços tipo CA-25, que são lisos, devem sempre ser providos de ganchos nas extremidades para proporcionar ancoragem mecânica.

As outras características importantes podem ser relacionadas:

- $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ \text{ C}^{-1}$ ;
- $E_s = 210\text{GPa}$ ;
- $\gamma_s = 78,5\text{kN/m}^3$ ;

A relação tensão deformação simplificada utilizada para ELU e ELS é apresentada na Figura 13 a seguir, que serve para aços com e sem patamar de escoamento. Na determinação de  $f_{yk}$  para aços sem patamar de escoamento deve-se utilizar a tensão correspondente à deformação permanente de 0,2%. Os ensaios devem ser feitos conforme a norma ABNT NBR ISSO 6892.



**Figura 13** – Diagrama tensão deformação para aços de armaduras passivas para ELU e ELS recomendado pela NBR 6118.

Cuidados adicionais devem ser tomados com relação à ductilidade e à soldabilidade (ABNT NBR 8965) dos aços de armaduras passivas.

Em caso de solicitações dinâmicas há que se observar a resistência à fadiga do aço empregado.

De forma geral, as tensões no aço de estruturas de concreto armado, são limitadas pelo concreto. Dessa forma:

- No ELU, a máxima deformação de compressão deve respeitar o limite de 2‰, e o máximo alongamento deve ser limitado a 10‰;



- No ELS, a tensão no aço pode ser limitada pelo limite de abertura de fissuras que se deseja impor. Em geral essa tensão varia entre 140 MPa e 360 MPa.

### 1.3.5. Comportamento conjunto dos materiais

Inicialmente, com finalidade de introduzir alguns conceitos importantes quanto a este tópico, descreve-se o comportamento de um tirante de concreto armado com base em LEONHARDT (1977). Para tal, considere-se uma barra de concreto com seção quadrada e com uma barra de aço centrada e com comprimento ligeiramente superior ao da barra de concreto (Figura). Um esforço de tração  $N$  é aplicado pela barra de aço. Se as deformações do aço e do concreto são iguais, então numa região convenientemente afastada do ponto de introdução do esforço  $N$  têm-se as seguintes tensões no concreto ( $\sigma_c$ ) e no aço ( $\sigma_s$ ), obtidas por condições de compatibilidade, visto tratar-se de problema hiperestático:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_i}$$

$$\sigma_s = n \frac{N}{A_i}$$

onde

$$A_i = A_{cn} + nA_s$$

A notação precisa ser bem esclarecida:

- $A_c$  = Área da seção da barra de concreto;
- $A_s$  = Área da seção da barra de aço;
- $A_{cn}$  = Área líquida ( $n=net$ ) da seção da barra de concreto =  $A_c - A_s$ ;
- $A_i$  = Área ideal (também chamada área homogeneizada);
- $n$  = razão modular, que é a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto, ou seja,  $n=E_s/E_c$ .

Observe-se ainda que no equacionamento acima está implícito que a tensão  $\sigma_c$  é inferior à resistência à tração do concreto. Porém, em dado momento, atinge-se a resistência à tração do concreto, que então irá apresentar fissuras, neste caso, perpendiculares à linha de ação do esforço  $N$ . A teoria não permite identificar onde surgirá a primeira fissura. Devido à fissura, a força de tração, na seção fissurada, transmite-se bruscamente para a armadura, e a tensão no aço passa a valer:

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

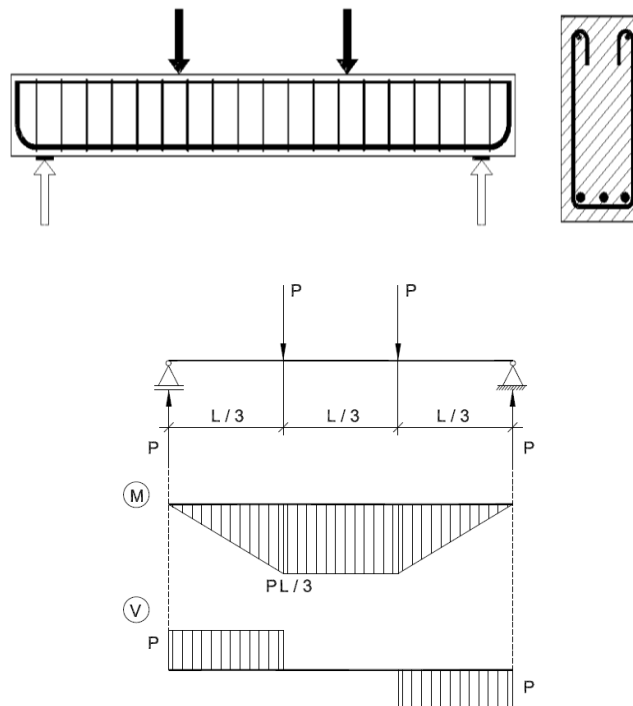
$$\sigma_s = \frac{N}{A_s}$$

Esse fato, de mudança de comportamento após a fissuração, levou estudiosos do concreto armado a introduzirem desde cedo dois conceitos que serão muito utilizados ao longo do curso, quais sejam:

- Estádio I: o concreto não está fissurado na zona de tração e absorve as forças de tração;
- Estádio II: o concreto está bastante fissurado na zona de tração; as forças de tração devem ser totalmente absorvidas pela armadura.

No exemplo, a zona de tração é toda a seção transversal da barra, mas, em vigas, conforme será visto adiante, a zona de tração é restrita a uma parte da seção. A aderência aço concreto desempenha fundamental importância em todos os estádios de comportamento de um elemento de concreto armado e ou protendido e será estudada, sucintamente, adiante.

Considere-se agora uma viga simplesmente apoiada submetida a duas forças concentradas aplicadas nos terços de vão (Figura 14). Considere-se ainda que o peso-próprio da viga é pequeno frente às duas forças e será desprezado para análise – em ensaios de laboratório, no caso de vigas leves, é comum aplicarem-se as forças de baixo para cima, eliminando assim o peso-próprio e facilitando a visualização das fissuras que surgem no concreto em decorrência do carregamento.



**Figura 14** – Esquema de viga para análise de flexão.

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

---

A região central da viga encontra-se em flexão pura – não há variação de momento fletor entre as duas forças aplicadas pois desprezou-se o peso-próprio. As duas regiões extremas apresentam variação de momentos fletores e conseqüentemente forças cortantes. A viga é provida de armaduras longitudinais e transversais (estribos).

Será dada atenção à região central da viga nesta aula, a fim de se estudar o dimensionamento a momento fletor, que envolve o estudo da seção transversal e determinação da armadura longitudinal. Posteriormente, tal ensaio será retomado para que se apresente o dimensionamento à força cortante, com cálculo da armadura transversal, e outros tópicos relacionados ao detalhamento da armadura longitudinal. Salvo casos especiais, nas vigas, a resistência a momento fletor é o fator decisivo para definição das dimensões da seção transversal, ficando o estudo da força cortante como estudo posterior, embora indispensável, da verificação da segurança.

De maneira análoga ao que foi definido na terceira aula, são diferenciados alguns estádios de comportamento da viga, à medida que o carregamento vai sendo aumentado. Inicialmente, serão vistos o Estádio I e o Estádio II, referindo-se a uma seção situada no terço médio do vão.

No Estádio I, enquanto o carregamento é pequeno, as tensões de tração são inferiores à resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ ). Portanto, toda a seção transversal colabora na resistência ao momento fletor. Quando se alcança o valor de  $f_{ct}$  o concreto irá apresentar a primeira fissura. Não é possível prever a posição em que esta primeira fissura irá aparecer, pois o momento fletor e as características da seção são constantes, porém, suponha-se que seja no meio do vão – caso se considere o peso-próprio da viga, esta será a posição mais provável.

Ao momento fletor associado à formação da primeira fissura dá-se o nome de momento de fissuração ( $M_{cr}$ ). O valor de  $M_{cr}$  pode ser obtido com a expressão

$$M_{cr} = W f_{ct}$$

Deve-se utilizar, na expressão acima, a resistência à tração na flexão do concreto. A norma permite que, para seções retangulares, se utilize um valor 50% superior à resistência à tração do concreto determinada a partir de  $f_{ck}$ , conforme visto na terceira aula.

Após a abertura da fissura, a seção fissurada passa para o chamado Estádio II. Nos dois primeiros estádios do comportamento da seção, as seguintes hipóteses são admitidas como válidas:

- As seções planas permanecem planas;
- Os materiais seguem a Lei de Hooke;

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

- No Estádio I o concreto resiste à tração e à compressão;
- No Estádio II, o concreto não colabora na resistência à tração.

A análise da seção, nos dois estádios, é feita geralmente com o método da seção homogeneizada, ou seção ideal, que é visto adiante.

A seção da peça de concreto armado é homogeneizada com uso da razão modular ( $n=E_s/E_c$ ). Basicamente, a ideia consiste em transformar a área de aço em área de concreto equivalente e então proceder aos cálculos como se fosse uma seção homogênea.

A seção homogeneizada também é chamada seção ideal. O valor de  $n$  irá variar em função do módulo de elasticidade do concreto ( $E_c$ ). A posição da linha neutra da seção pode ser obtida pela expressão abaixo, com referência à Figura 2, para uma viga de seção retangular com armadura simples.

$$x_I = \frac{[(\frac{1}{2})b_w h^2 + nA_s d]}{(b_w h + nA_s)}$$

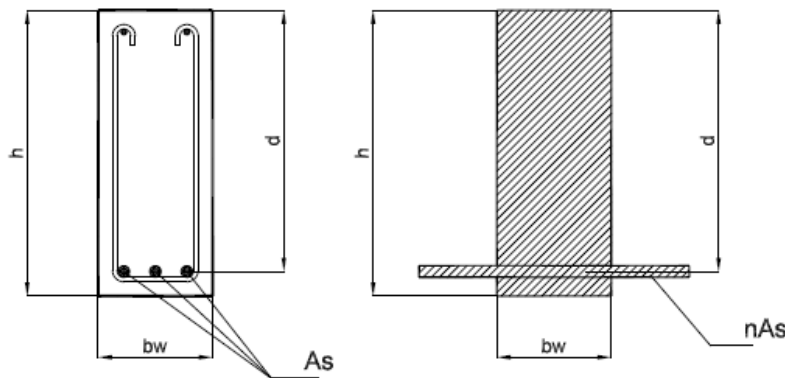
Também se torna importante determinar o momento de inércia da seção no Estádio I ( $I_I$ ), o que pode ser feito com a expressão:

$$I_I = \frac{1}{12}b_w h^3 + b_w h \left(x_I - \frac{h}{2}\right)^2 + nA_s(d - x_I)^2$$

As expressões para cálculo de tensões normais no concreto ( $\sigma_c$ ) e no aço ( $\sigma_s$ ) para um dado valor de momento fletor ( $M \leq M_{cr}$ ) são as seguintes:

$$\sigma_c = \frac{My}{I_I}$$

$$\sigma_s = n \frac{M(d - x_I)}{I_I}$$

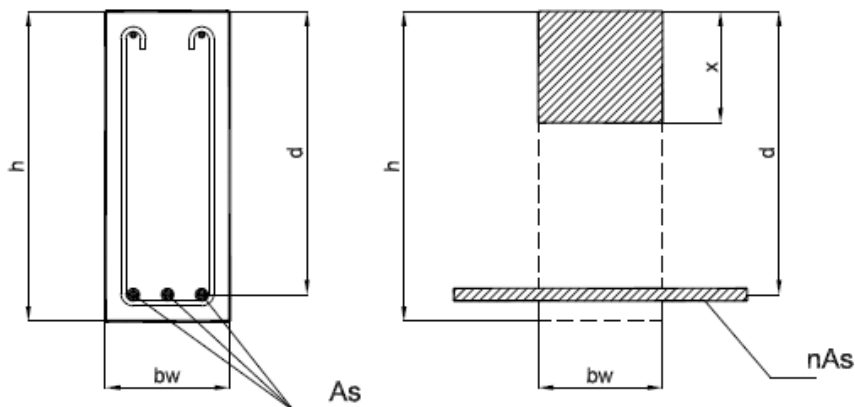


**Figura 15** – Definições para seção retangular com armadura simples no Estádio I.

Para análise de seção em Estádio II, utiliza-se o mesmo procedimento feito no item anterior, sendo que nesse caso, não se considera o concreto tracionado. A posição da linha neutra e o valor do momento de inércia são calculados como segue:

$$x_{II} = \frac{-nA_s \pm \sqrt{(nA_s)^2 - 4\left(\frac{b_w}{2}\right)(-nA_s d)}}{2 \times \frac{b_w}{2}}$$

$$I_{II} = \frac{b_w x^3}{3} + nA_s (d - x_{II})^2$$



**Figura 16** – Definições para seção retangular com armadura simples no Estádio II.

Conhecidos a posição da linha neutra e o momento de inércia no Estádio II, as tensões normais, para um dado valor de momento fletor ( $M \geq M_{cr}$ ) podem ser calculadas pelas mesmas expressões de cálculo de tensões no Estádio I, usando-se agora  $x_{II}$  e  $I_{II}$ .

É possível demonstrar ainda que, fixando-se valores admissíveis das tensões de tração ( $\sigma_{adm,t}$ ) no aço e de máxima compressão no concreto ( $\sigma_{adm,c}$ ), pode-se definir uma nova variável  $r = \sigma_{adm,t} / \sigma_{adm,c}$ , de modo que

$$x_{II} = \frac{r}{n + r}$$

### 1.3.6. Exemplo de cálculo das propriedades geométricas de seções de concreto armado

A fim de ilustrar a aplicação das expressões dadas acima, será estudada uma seção com os dados definidos abaixo.

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

VIGA COM SEÇÃO RETANGULAR E ARMADURA SIMPLES					
seção retangular		Concreto		Armadura	
bw (cm)	20	fck (MPa)	25	φ (mm)	20
h (cm)	50	Ec (MPa)	23800	As,unit	3,15
d' (cm)	5,00	n=Es/Ec	8,8	N	3
d (cm)	45,00			As (cm <sup>2</sup> )	9,45
Io (cm <sup>4</sup> )	208333,3			ρ (%)	0,945

O valor de **n** foi calculado usando-se módulo de elasticidade do concreto dado pela expressão da NBR6118, e com  $E_s=210\text{GPa}$ . A posição da linha neutra e o momento de inércia assumem os seguintes valores:

Estádio I		Estádio II	
xLN (cm)	26,54	xLN (cm)	15,65
I1 (cm <sup>4</sup> )	239119,3	I2 (cm <sup>4</sup> )	97381,01

Vale a pena analisar os resultados atentamente.

Calculando-se o momento de inércia da seção bruta de concreto ( $bh^3/12$ ), desprezando-se o aço, encontra-se  $I_o=208333,33\text{cm}^4$ .

A existência da armadura faz com que o momento de inércia aumente ligeiramente, indo para  $I_1=239119,3\text{cm}^4$  – acréscimo de 15%. Enquanto a posição da linha neutra mudou de 25cm ( $h/2$ ) para 26,54cm. Como era de se esperar, a presença da armadura na parte inferior da seção faz com que a linha neutra desça um pouco.

No Estádio II, o concreto tracionado não colabora e ocorre redução do momento de inércia – no caso  $I_{II}/I_1=0,40$ , para taxa de armadura de 0,945%. E a linha neutra se desloca para cima.

Pode-se estimar o momento de fissuração ( $M_{cr}$ ) da seção a partir dos cálculos a seguir, adotando-se a resistência à tração média do concreto. Dessa forma:

$$f_{ctm} = 0,3(f_{ck})^{2/3} = 2,56\text{MPa} = 0,256\text{kN/cm}^2$$

e o momento de fissuração será dado por

$$M_{cr} = \frac{1,5 \times 0,256 \times 239119,3}{(50 - 26,54)} = 3914\text{kNxc} = 39,14\text{kNxm}$$

Portanto, teoricamente, para valores de momento fletor inferiores a 39,14kNxm, a seção não apresentaria fissuras. Para valores de momento fletor superiores a seção apresentaria fissura que se prolongaria até a posição da linha neutra no Estádio II ( $x_{II}$ ).

### 1.4. Exemplo de análise

Apresenta-se exemplo de análise de uma estrutura de contenção por diferentes métodos. Procura-se discutir as diversas formas de modelagem de uma estrutura cuja interação com o solo seja importante para fins de análise. A estrutura aqui apresentada é simples com a finalidade de se constituir em um modelo didático. Estruturas com maior grau de interação são apresentadas nos outros capítulos.

O objetivo específico é analisar as diversas técnicas de modelagem, com ênfase na discussão das características e dos resultados de diferentes modelos que podem ser empregados para representar as interações físicas entre os elementos de uma dada estrutura e o maciço.

Para isso, apresentam-se três modelos para representar a mesma estrutura:

- Modelo de ações impostas, formado por uma estrutura plana sujeita a carregamento auto equilibrado;
- Modelo de ações impostas, formado por estrutura sobre apoios elásticos, resolvido com auxílio de programa de computador para análise de estruturas reticuladas planas;
- Modelo de ações espontâneas, no qual a estrutura e o solo são representados por elementos finitos. O solo é modelado como material elastoplástico perfeito;

A terminologia usada acima, que classifica os modelos em “ações espontâneas” ou “ações impostas”, foi proposta pelo Prof. Maffei, e, no caso específico, refere-se à maneira como são consideradas as forças de contato entre a estrutura e o maciço. Num modelo de ações impostas, procura-se adivinhar a distribuição e o valor dessas ações. Num modelo de ações espontâneas, essas ações surgem como consequência do equilíbrio da estrutura em contato com o maciço. No que segue, os modelos de ações impostadas estão sendo tratados sob a denominação comum de “modelos clássicos”.

#### 1.4.1. Descrição da estrutura em análise

Trata-se de um muro de arrimo de flexão, em concreto armado, formado por uma laje com espessura de 50 cm e uma parede com espessura de 40 cm. A altura de aterro é de 5 m. A base do muro tem 3,60 m de largura. Será analisada uma faixa de 1 m de comprimento.

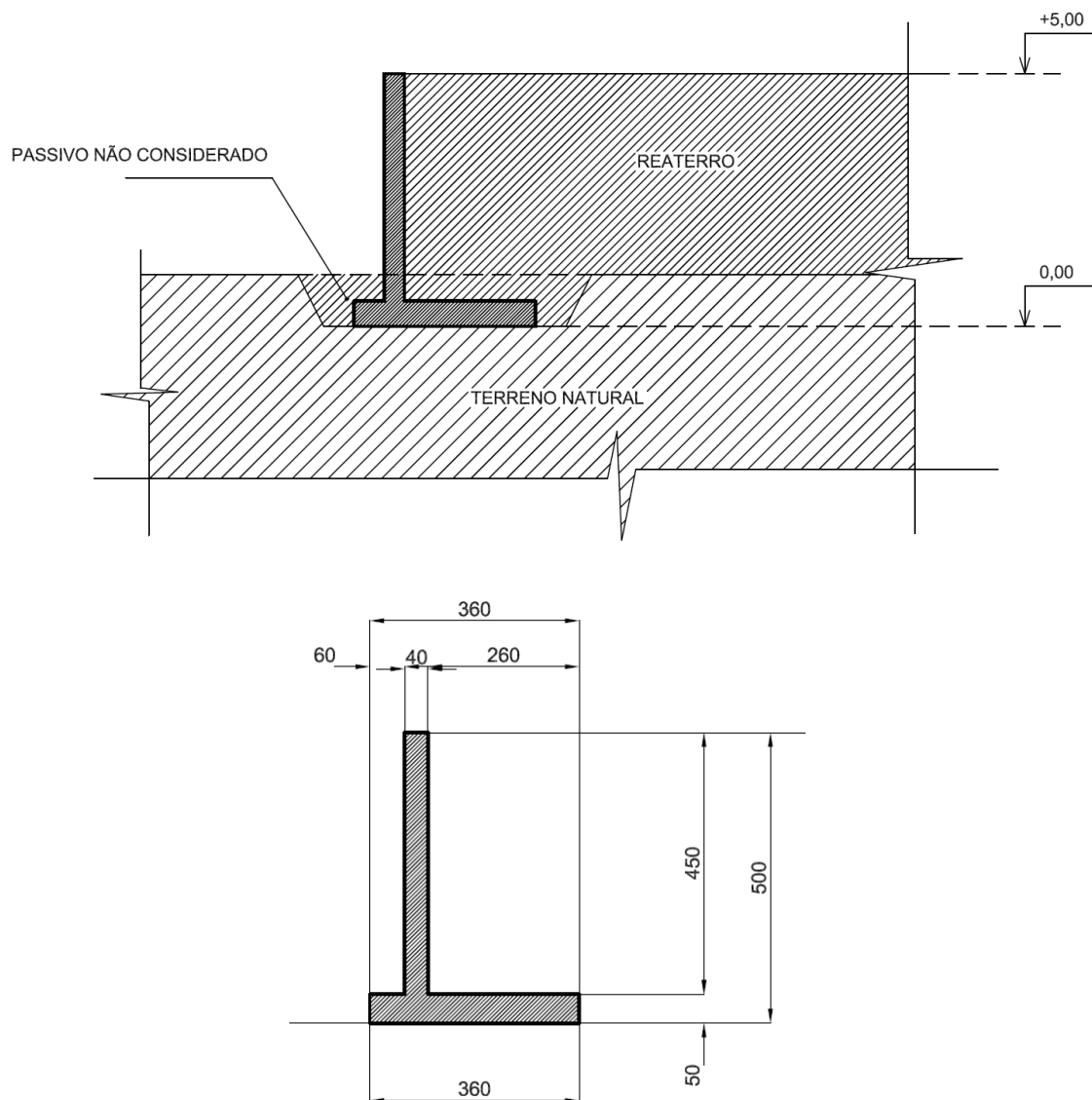


Figura 17 – Descrição da estrutura analisada.

O terreno natural é formado por argila arenosa com SPT médio de 10 até uma profundidade de 12 m. Não há presença de água até essa profundidade. Com base nos dados geotécnicos foram estabelecidos os seguintes parâmetros de análise para o terreno natural:

- Peso específico  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ;
- Para análise elástica:
  - Módulo de elasticidade = 40.000 kPa;
  - Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$
- Para análise plástica:
  - Coesão  $c = 30 \text{ kPa}$ ;
  - Ângulo de atrito interno  $\Phi = 25^\circ$ ;



## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

O aterro será considerado com os mesmos parâmetros elásticos e ainda com as seguintes propriedades:

- Peso específico  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ;
- Coesão  $c = 4 \text{ kPa}$ ;
- Ângulo de atrito interno  $\Phi = 30^\circ$ ;

O método construtivo pode ser descrito pelas seguintes etapas:

- Escavação até a cota de assentamento da laje de fundação;
- Execução da estrutura;
- Reaterro da escavação;
- Aterro;

### 1.4.2. Análise por método clássico

Inicialmente, será feito modelo de estrutura plana, conforme a figura abaixo. Serão analisados os estados limites de tombamento e deslizamento. Também será determinado o valor das tensões normais extremas na base do muro e as tensões na estrutura de concreto.

O cálculo do empuxo será feito considerando estado ativo, sendo as tensões dadas por:

$$\sigma = k_a \times \sigma_v - 2 \times c \times \sqrt{k_a}$$

Com os dados apresentados no item anterior, os valores de tensão são dados no diagrama abaixo, juntamente com as cargas.

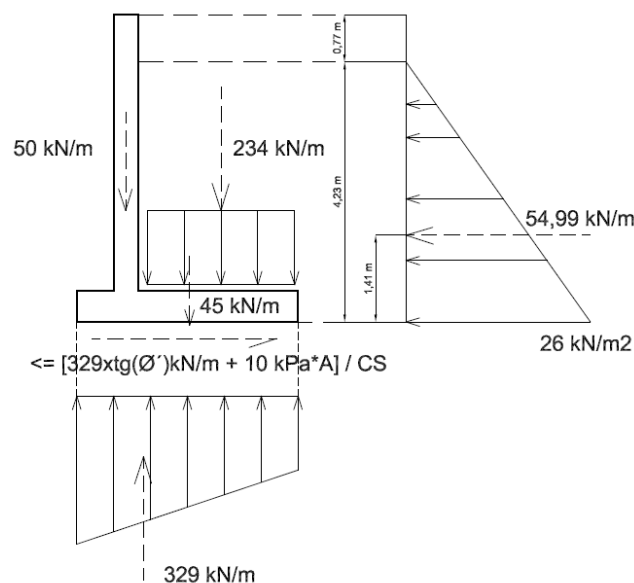


Figura 18 –

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

Cumpra apresentar uma observação quanto ao diagrama de empuxos adotado. Foi desconsiderado o trecho em que ocorreria tração entre o solo e o muro, conduzindo a um trecho de apenas 4,23 m de altura sujeito a tensões horizontais. Em situações de projeto é comum que seja feita a comparação entre esse diagrama de empuxo e valores mínimos recomendados por norma. Além disso, pode haver penetração de água na trinca formada entre o solo e o muro, o que poderia gerar empuxo hidrostático. Porém, frente aos objetivos desse artigo, será considerado o diagrama de empuxo dado pela expressão acima.

Com as ações determinadas, serão verificados:

- Tombamento:
  - Momento de tombamento =  $54,99 \times 4,23 / 3 = 77,5$  kNm;
  - Momento estabilizante =  $234 \times 2,3 + 45 \times 1,8 + 50 \times 0,8 = 659,2$  kNm;
  - Coeficiente de segurança =  $5,3 \gg 1,5$  (OK);
- Deslizamento (adotando  $\Phi' = 2/3 \Phi$ ; adesão = 10 kPa);:
  - Força horizontal = 54,99 kN/m;
  - Força resistente disponível =  $10 \text{ kPa} \times 3,6 \text{ m}^2 + 329 \times \text{tg}(16,7) = 36 + 98,5 = 134,5$  kN;
  - Coeficiente de segurança =  $2,45 > 1,5$  (OK);
- Tensões na base:
  - $M = 77,5 - 234 \times 0,5 + 50 \times 1 = 10,5$  kNm (momento em relação ao CG);
  - $N =$  força normal na base = 329 kN;
  - $e = M/N = 10,5 / 329 = 0,03$  m  $\ll (H/6) = 0,6$  m;
  - $\sigma_{\text{máx}} = (N/A) \times (1 + 6e/B) = 91,39 \times (1 + 6 \times 0,03/3,6) = 96$  kPa;
  - $\sigma_{\text{mín}} = 91,39 \times (1 - 6e/B) = 87$  kPa;
  - Admitindo  $\sigma_{\text{adm}}$  da ordem de  $20 \times \text{SPT} = 200$  kPa (OK);

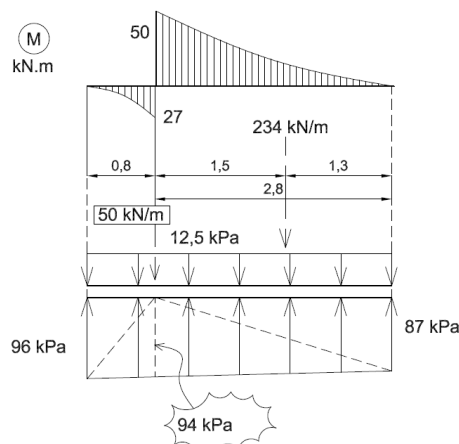
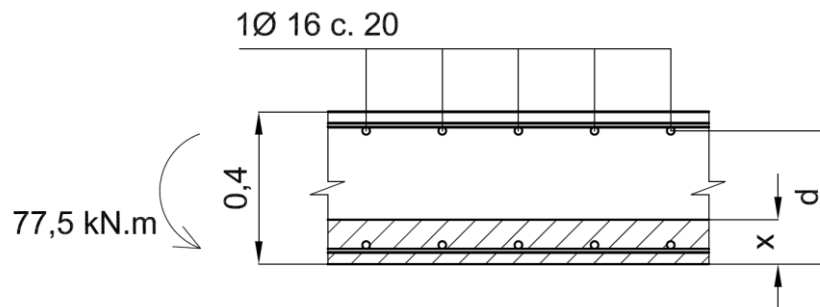


Figura 19 –

- Tensões na estrutura de concreto (admitindo Estádio II):
  - $M_{\text{máx}} = 77,5 \text{ kNm}$ ;
  - Admitindo  $\sigma_{\text{adm,conc}} = 10 \text{ MPa}$  e  $\sigma_{\text{adm,aço}} = 300 \text{ MPa}$ , tem-se com  $n=15$  e  $r=30$ ,  $x/d = 1/3$ , ou seja, com  $d=35 \text{ cm}$ ,  $x = 11,67 \text{ cm}$ ;
  - Assim,  $z = 31,11 \text{ cm}$  e  $R_c = R_{st} = 249 \text{ kN}$ ;
  - Dessa forma:  $\sigma_{c,\text{máx}} = 249 * 2 / (100 * 11,67) = 0,43 \text{ kN/cm}^2 = 4,3 \text{ MPa} < 10,0 \text{ MPa}$  (OK);
  - E, para o aço:  $A_s \geq 249/30 = 8,3 \text{ cm}^2/\text{m}$ , digamos 1  $\Phi 16$  c. 20 ( $10,0 \text{ cm}^2/\text{m}$ );



**Figura 20 –**

### 1.4.3. Consideração do maciço com elementos discretos

Também foi feito modelo de barra com apoios elásticos. Os carregamentos considerados serão o empuxo de terra e o peso de solo sobre a laje. Para estimar o valor da constante elástica “k” foi feito o seguinte procedimento:

- Foi estimado o recalque ( $\Delta$ ) sob uma placa rígida de área quadrada unitária ( $B = L = 1 \text{ m}$ ), carregada com carga “P”, utilizando-se expressão da Teoria da Elasticidade; para isso, foram adotados os parâmetros do terreno natural mostrados no item anterior;
- Adotou-se  $k = p / \Delta$ , chegando-se a;

$$K = \frac{\beta_z \sqrt{BLE}}{(1 - \nu^2)} = 1,1 \frac{E}{(1 - \nu^2)}$$

A expressão acima foi extraída de POULOS & DAVIS (1974). Não é uma analogia perfeita, em absoluto. Como foi comentado anteriormente, poder-se-ia adotar um valor próximo do módulo de elasticidade do solo.

Com os valores de “E” e “v” foi determinado  $k = 45.833 \sim 45.000 \text{ kN/m}$  por unidade de comprimento. Para isso,  $\beta_z$  foi adotado com valor de 1,1.

A rigidez relativa vale, nesse caso, considerando  $E_{\text{concreto}} = 20 \text{ GPa}$ :

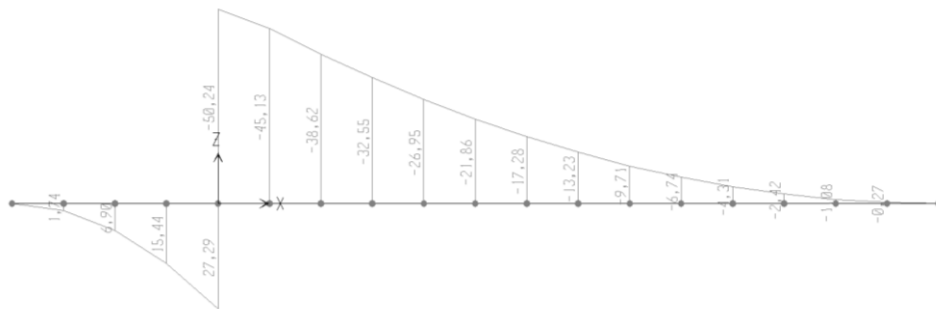
## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = 0,48 \text{ m}^{-1}$$

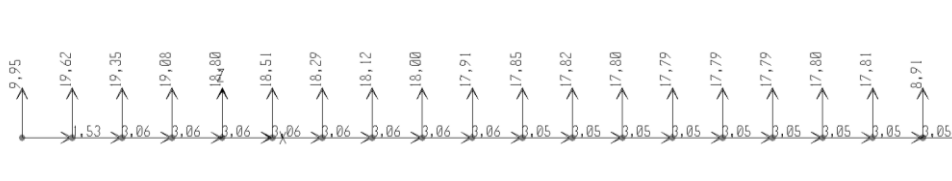
Ou seja, o comprimento fictício é de 2,07 m. Como o comprimento real é de 3,6 m, a viga é muito rígida.

Adotando espaçamento entre nós de 0,2 m, o valor de “k” para o modelo será 9000 kN/m.

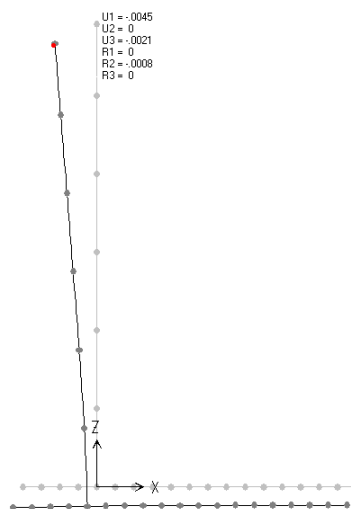
Alguns resultados são mostrados nas figuras a seguir.



(a)



(b)



(c)

Figura 21 –

Observa-se que o diagrama de momento fletor (Figura 21a) na base apresenta valores muito próximos dos encontrados no cálculo anterior (Figura 19). As tensões na base (Figura 5b) valem 99,5 kPa e 89,1 kPa, e não são muito diferentes daquelas observadas também na Figura 19. Como o elemento estrutural é muito rígido, a distribuição linear de tensões na base fornece uma boa aproximação.

### 1.4.4. Consideração do maciço como meio contínuo

Foi elaborado um modelo de elementos finitos no software “Plaxis”. O modelo é bidimensional e considera estado plano de deformação. A geometria do modelo e suas vinculações são apresentados nas figuras abaixo.

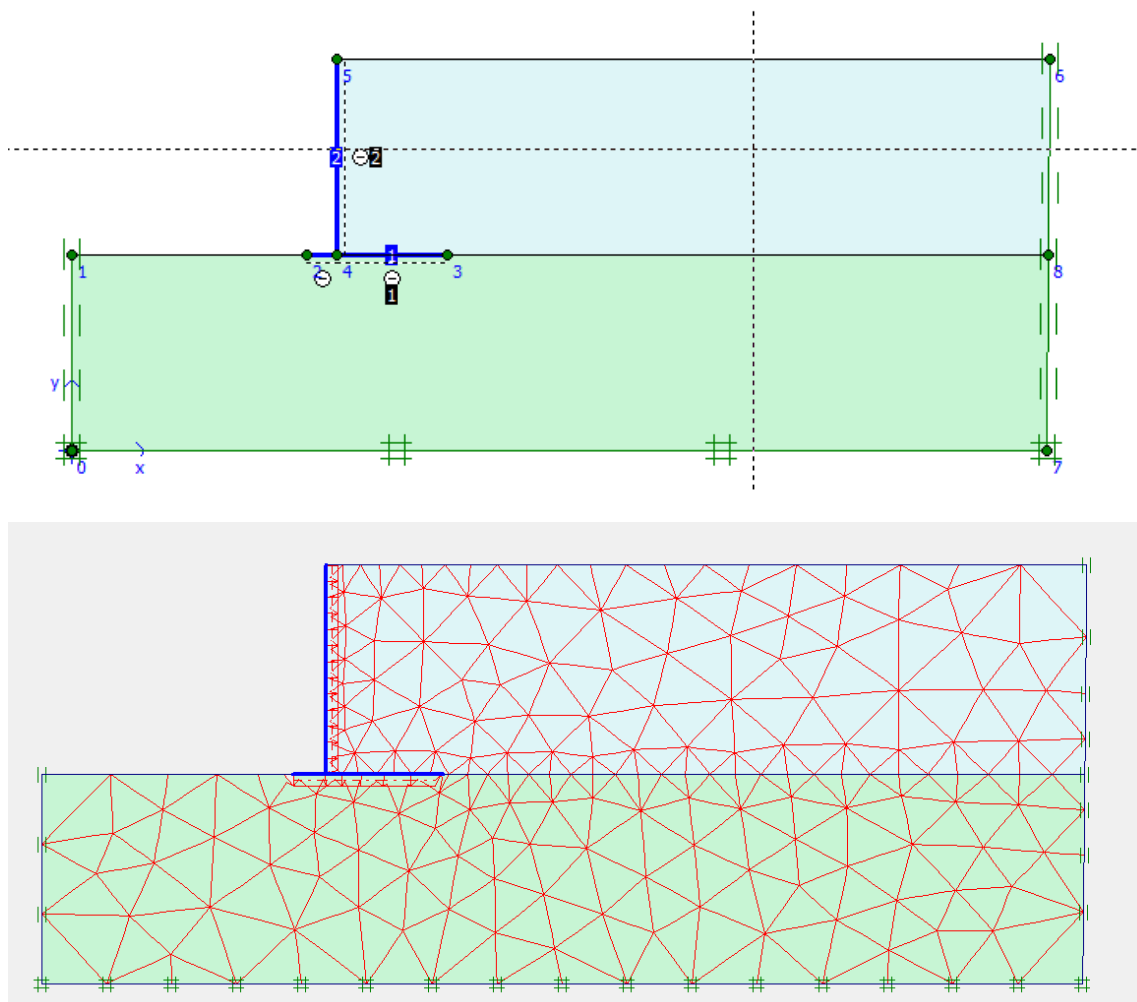


Figura 22 –

O terreno natural foi modelado até profundidade de 5,0 m abaixo da cota de escavação. Considerando ainda que a escavação para fundação é pequena, admitiu-se a cota de escavação no nível do terreno.

O estado de tensões inicial foi calculado na situação anterior à execução do muro e do aterro, de acordo com o método executivo proposto. A figura abaixo ilustra o estado inicial de tensões, observando-se que a tensão efetiva vertical máxima é de 99,27 kN/m<sup>2</sup>. Esse valor pode ser obtido considerando o peso específico do solo e a profundidade máxima no modelo, chegando-se a 20 kN/m<sup>3</sup> x 5 m = 100 kN/m<sup>2</sup> ~ 99,27 kN/m<sup>2</sup>.

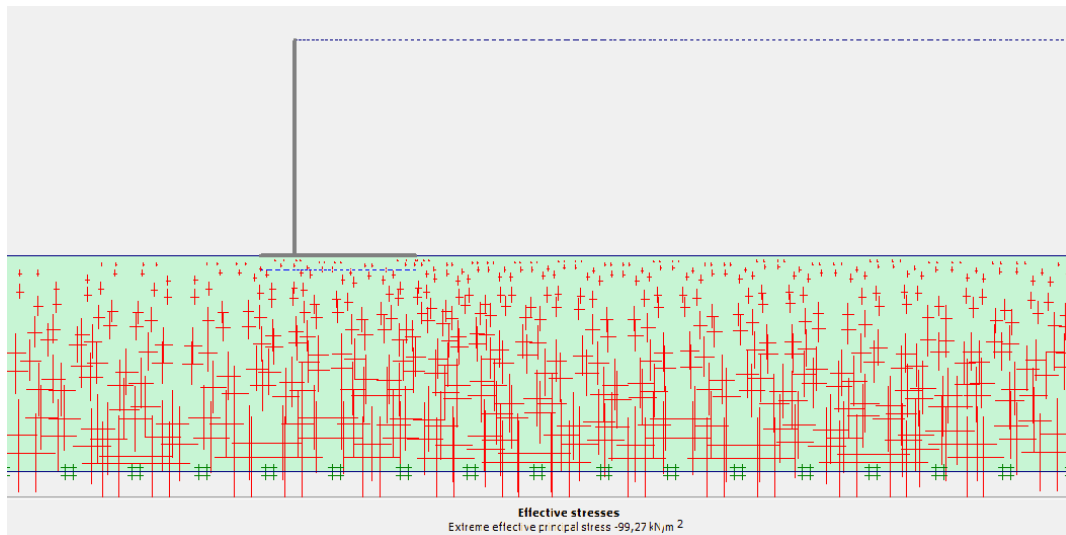


Figura 23 –

Na figura abaixo se apresenta a deformada obtida, observando-se que o deslocamento máximo foi da ordem de 17 mm, valor bastante superior ao obtido no modelo clássico, que foi da ordem de cinco milímetros. Observar ainda que no modelo ocorre “descolamento” entre o muro e o solo, no topo.

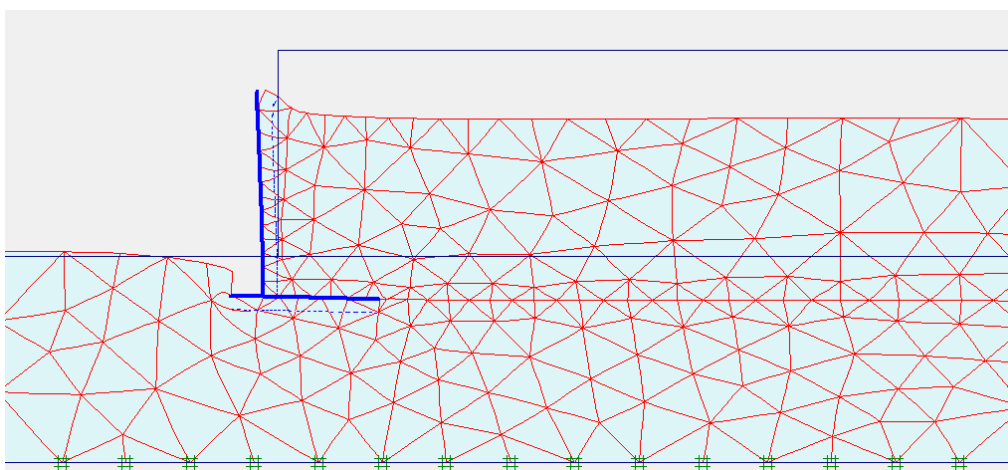
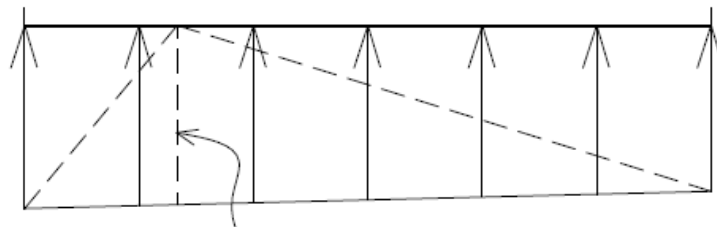


Figura 24 –

### 1.4.5. Comparação entre alguns resultados

Comparando-se inicialmente as tensões na base da sapata, verifica-se diferença significativa nas duas bordas do elemento estrutural, conforme se apresenta na figura abaixo onde se observam as distribuições dessas tensões obtidas com método clássico e com MEF. Os valores extremos são muito diferentes, obtendo-se valores de 234 kPa pelo MEF e de 96 kPa pelo método clássico. No entanto essas grandes diferenças são em pontos localizados. A tensão média não apresenta diferença significativa de valores, pois no modelo de elementos finitos ela é da ordem de 95 kPa a 100 kPa.



(a)



(b)

**Figura 25 –**

Na figura a seguir apresenta-se a comparação entre os empuxos de terra considerados no modelo clássico e aquele obtido com MEF. A distribuição dessas tensões de contato é bastante diferente, como pode ser visto na figura. No método clássico, a distribuição é triangular, enquanto a tensão obtida no modelo de elementos finitos se distribui de maneira não linear. Os valores máximos são relativamente próximos, obtendo-se 31 kPa no modelo de elementos finitos e 26 kPa no modelo clássico.

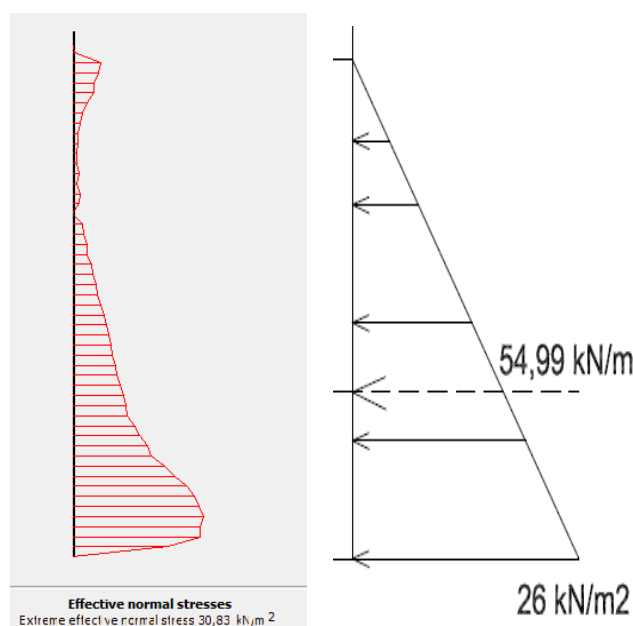


Figura 26 –

Por fim, compara-se o diagrama de momento fletor na sapata. Observa-se diferença significativa entre os valores máximos. No modelo de elementos finitos, o valor extremo (40,65 kN.m) ocorre à esquerda da parede, ao contrário do que é registrado no modelo clássico.

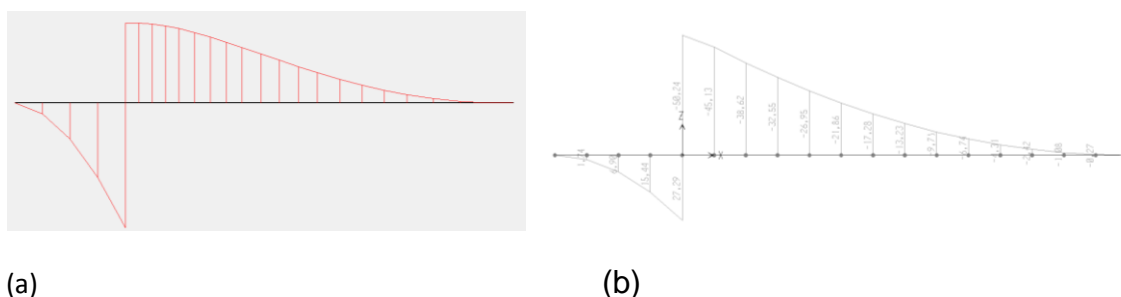


Figura 27 – Comparação entre momentos fletores na sapata: (a) modelo de elementos finitos com o maciço representado por meio contínuo; (b) modelo clássico com estrutura sobre apoios elásticos

De forma geral, observam-se maiores diferenças na distribuição de momentos fletores na sapata, bem como nos valores extremos dessa grandeza. O momento fletor à esquerda da parede apresentou, no modelo de elementos finitos, valor máximo quase 50% superior ao do modelo clássico. Essa diferença poderia provocar detalhamentos de armaduras distintos. A razão para tal diferença pode ser atribuída a duas causas:

- A diferença entre os empuxos de terra;
- A diferença entre as tensões de contato na base da sapata;



## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

---

Porém, esses valores obtidos com o MEF carecem ainda de análise mais aprofundada, tendo em vista que o modelo utiliza diversos parâmetros que merecem um estudo visando determinar suas variabilidades e os efeitos sobre os resultados.

Um exemplo desses parâmetros é o atrito entre o solo e o concreto da estrutura. Os resultados aqui apresentados consideraram interface rígida, sem deslocamentos relativos entre solo e estrutura. Seria interessante avaliar o efeito de se admitir algum deslizamento relativo entre os elementos.

Outro exemplo é a rigidez dos elementos estruturais, que pode ser afetada pela fissuração e deformação lenta do concreto, que não foi levada em conta no modelo de elementos finitos nem nos modelos clássicos. Como os modelos clássicos foram baseados em estruturas isostáticas, a variação de rigidez não alteraria o equilíbrio de forças, mas tão somente os deslocamentos. No entanto, no modelo de elementos finitos esse parâmetro influenciaria os resultados.

Por fim, mas não menos importante, no modelo de elementos finitos foi empregado o conceito de “ligar a gravidade” após o aterro completo. No entanto, o aterro será feito por camadas. Isso pode ser considerado no cálculo definindo-se o processo construtivo de forma mais detalhada.

Pode-se concluir que apesar de ser uma estrutura simples, os resultados encontrados apresentam diferenças que poderiam conduzir a detalhamentos distintos da estrutura.

Considerando-se que o modelo de elementos finitos demanda uma maior quantidade de parâmetros, seria importante realizar análise dos efeitos da variação desses parâmetros sobre as respostas.

Porém, está além dos objetivos deste texto realizar tal análise. O objetivo maior é apresentar as diferentes técnicas de modelagem que podem ser aplicadas a problemas de interação solo-estrutura, por meio de um exemplo simples.

### **BIBLIOGRAFIA**

ABNT\_NBR 6118. Projeto e execução de estruturas de concreto. Rio de Janeiro: ABNT, 2004.

DAVIS, R. O.; SELVADURAI, A. P. S. Elasticity and geomechanics. Cambridge University Press, 1996.

FUSCO, P. B. Estruturas de concreto: solicitações normais. Rio de Janeiro, Gaunabara Dois, 1978.

## Estruturas subterrâneas – Capítulo 3

---

LANGER / MOSLEY / THOMPSON editors. Laterally loaded deep foundations. ASTM special technical publications 835, 1984.

LEONHARDT, F. & MÖNNING, E. Construções de concreto. V.1. Rio de Janeiro, Interciência, 1977.

NASH, W. A. Resistência dos materiais. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982.

PINHEIRO, L. M. Concreto armado: tabelas e ábacos. São Carlos, EESC.

POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. Elastic solutions for soil and rock mechanics. John Wiley & Sons, 1974.

SELVADURAI, A. P. S. Elastic analysis of soil-foundation interaction. Elsevier/North Holland Inc. New York, 1979.

SOARES, C. A. Estacas totalmente enterradas, com extremidades livres, sob esforços de extremidades: coeficiente de reação do solo com distribuição triangular. São Paulo, 1984.

SYMPOSIUM ON LATERAL LOAD TESTES ON PILES. ASTM Special Technical Publication No. 154. Presented at the fifty-sixth annual meeting. Atlantic City, N. J., July I, 1953.

WANG, C. & SALMON, C. G. *Reinforced concrete design*. 6 ed. John Wiley & Sons, 2002.