Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I

AULA 10

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br

2o. Semestre de 2017

Página do curso:
https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=53869

11/09/2017

RETOMAR O ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

- Rutherford foi capaz de estimar o raio do núcleo, a partir da distância de maior aproximação
- Seção de choque σ

que está relacionada a probabilidade de uma partícula ser espalhada por um núcleo

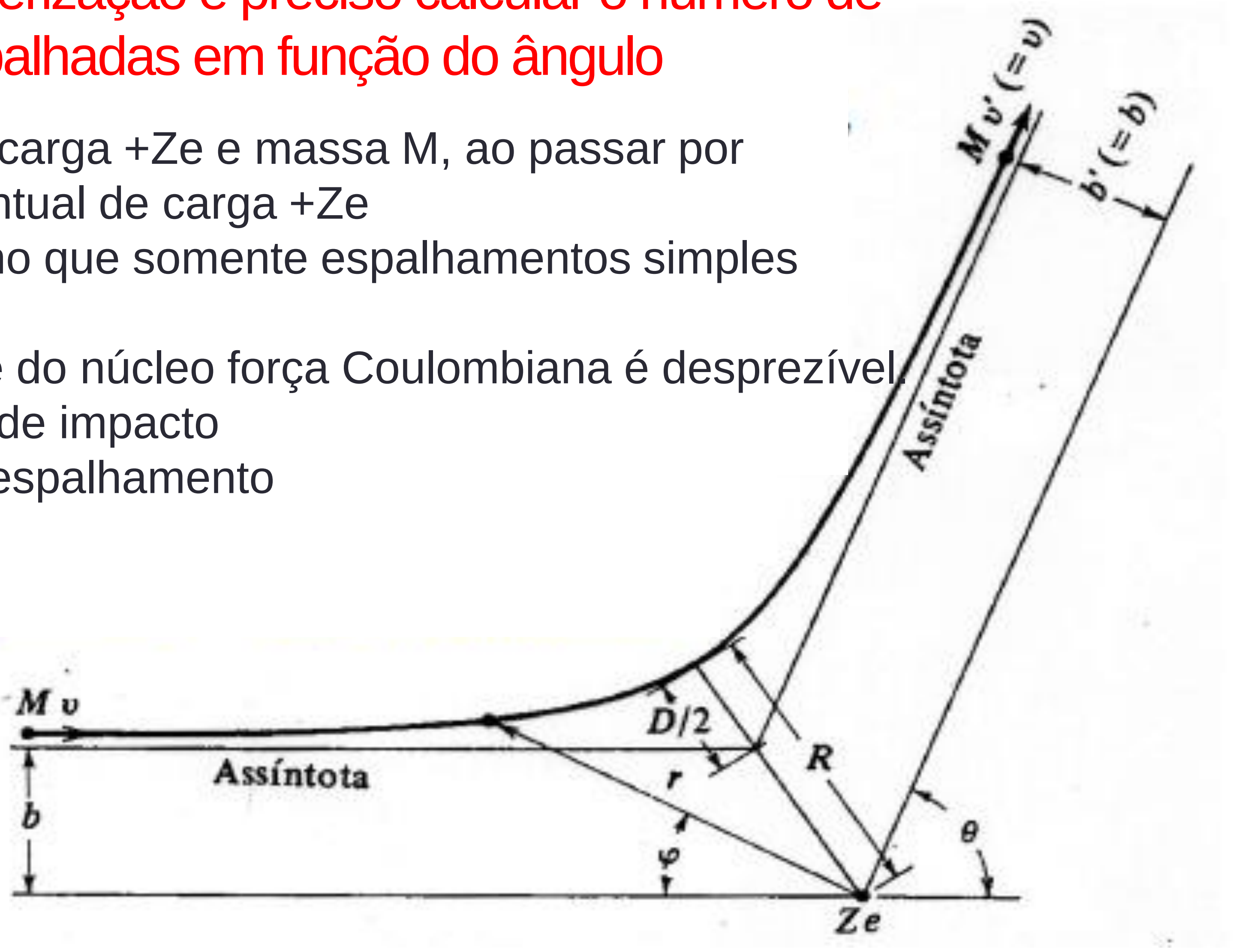
Vemos que na vida real o detector esta posicionado sobre um intervalo de ângulo θ e $\theta+d\theta$

que corresponde a um parâmetro de impacto b e b+db

ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

Melhor caracterização é preciso calcular o número de partículas espalhadas em função do ângulo

- Partícula α de carga +Ze e massa M, ao passar por um núcleo pontual de carga +Ze
- O alvo é tão fino que somente espalhamentos simples ocorrem
- Partícula longe do núcleo força Coulombiana é desprezível
- b – parâmetro de impacto
- θ – ângulo de espalhamento



ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

- b e v parâmetro de impacto e velocidade antes da colisão
- b´ e v´ depois da colisão
  Uma vez que a força agindo sobre as partículas é central, temos que o momento angular do sistema se conserva na colisão

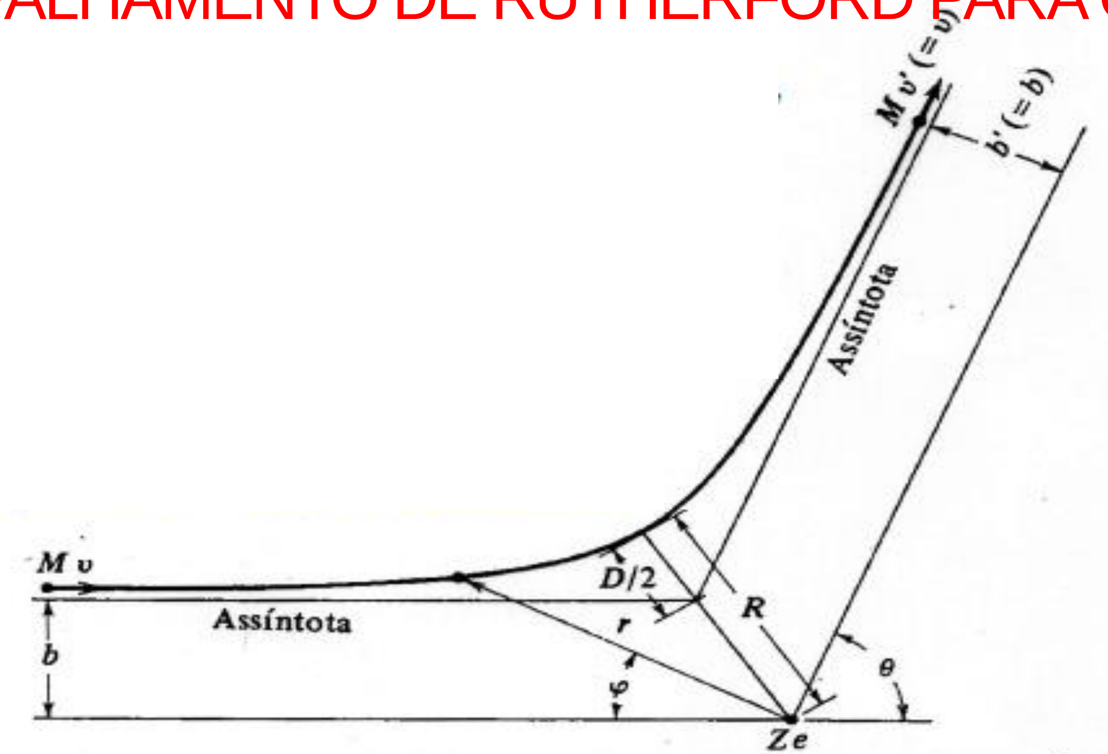
$$L = Mvb = Mv'b'$$

- Supondo colisão elástica e desprezando a E_{cin} adquirida pelo núcleo

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2$$

- v = v´ me diz que a trajetória da partícula espalhada esta no mesmo plano
- b = b´ o parâmetro de impacto não é alterado após a colisão

ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO



Estimativa do raio do núcleo

- A trajetória da partícula α neste espalhamento é descrito por uma hipérbole
- $$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} sen\varphi + \frac{D}{2b^2}(\cos\varphi - 1)$$
- D é a distância de máxima aproximação numa colisão frontal

$E_{pot}=E_{cin}$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{D} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{{}^1\!/_2\, mv^2}$$

ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

- Rutherford foi capaz de estimar o raio do núcleo, a partir da distância de maior aproximação:

$$a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2} m v^2}$$

- Ele obteve valores da ordem de 10^{-15}m (1fm) para partículas α com E de ~5MeV

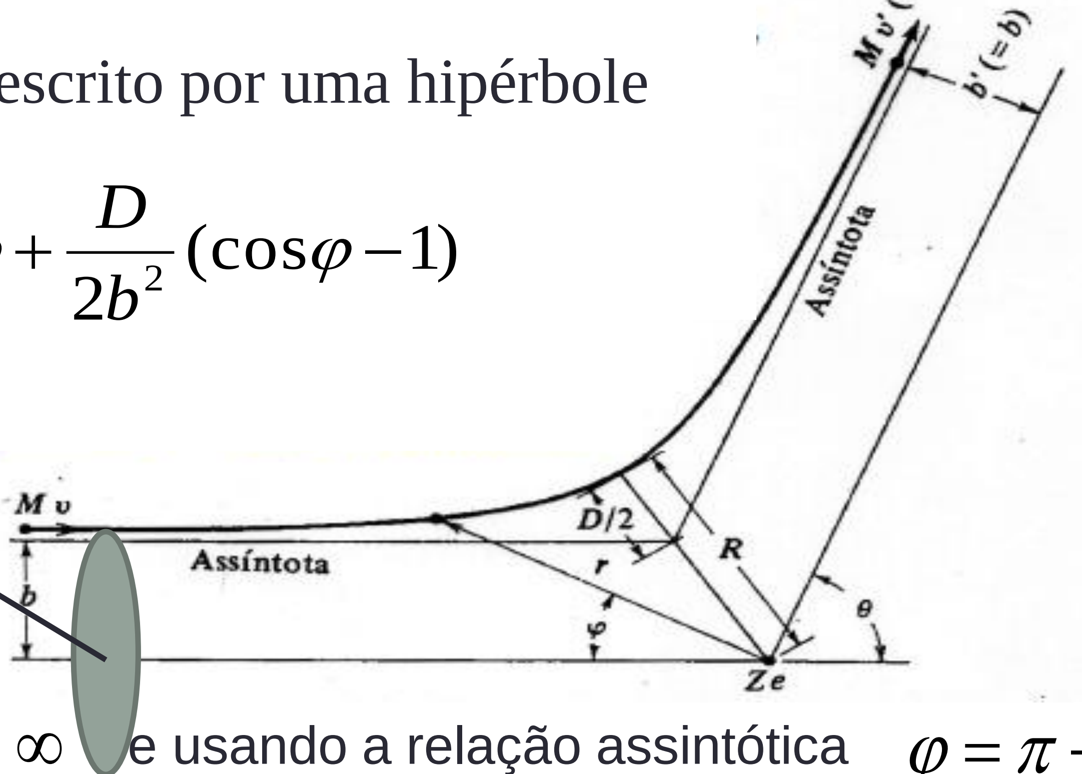
ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

espalhamento é descrito por uma hipérbole

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} sen\varphi + \frac{D}{2b^2}(\cos\varphi - 1)$$

$$area = \pi b^2$$

Seção de choque de espalhamento



- Fazendo $r \to \infty$ e usando a relação assintótica $\varphi = \pi - \theta$

$$\frac{1}{b} sen\varphi = -\frac{D}{2b^2}(\cos\varphi - 1)$$

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2} m v^2}$$

$$b = \frac{D}{2} \frac{(1 - \cos\varphi)}{sen\varphi}$$

$$b = \frac{D}{2} \cot g \frac{\theta}{2}$$

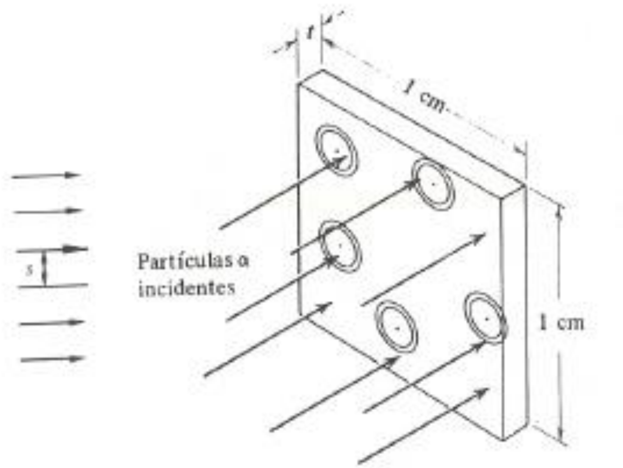
$$\theta = 0, b = \infty$$

$$\theta = 180^o, b = 0$$

Espalhamento α

- No espalhamento de uma partícula por um núcleo deve-se considerar:
  - Folha de espessura ***t*** com densidade ρ
  - Estamos supondo que a folha é tão fina que a probabilidade de que um núcleo esteja na "sombra" de outro é insignificante.

Chamaremos de n o número de núcleos (átomos) por unidade de volume



$$n = \frac{\rho(g/cm^3).N_A(\acute{a}tomos/mol)}{M(g/mol)}$$

$$n = \frac{\rho N_A}{M}\frac{\acute{a}tomos}{cm^3}$$

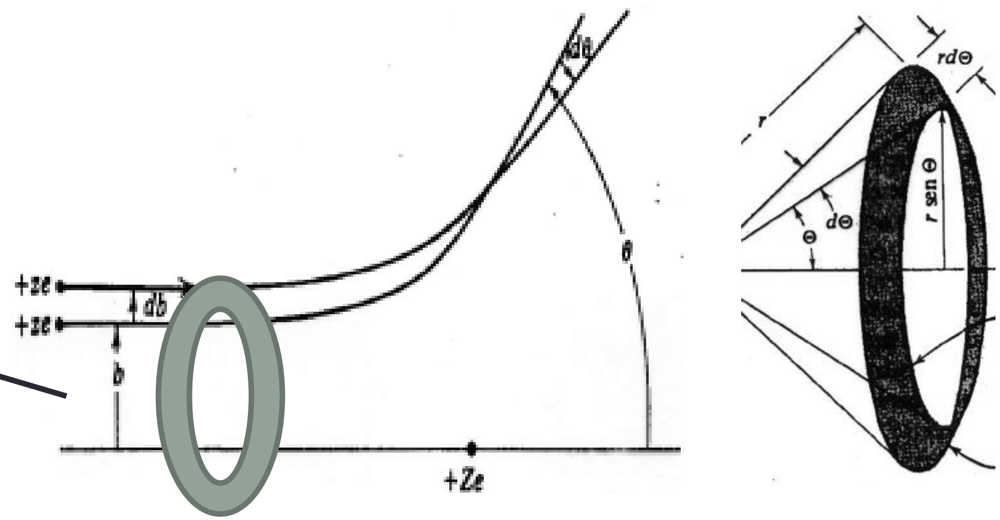
Se a folha tem uma espessura **t** (cm) temos que ***nt*** é o número de átomos por unidade de área (átomos/cm^2)

Seção de choque σ

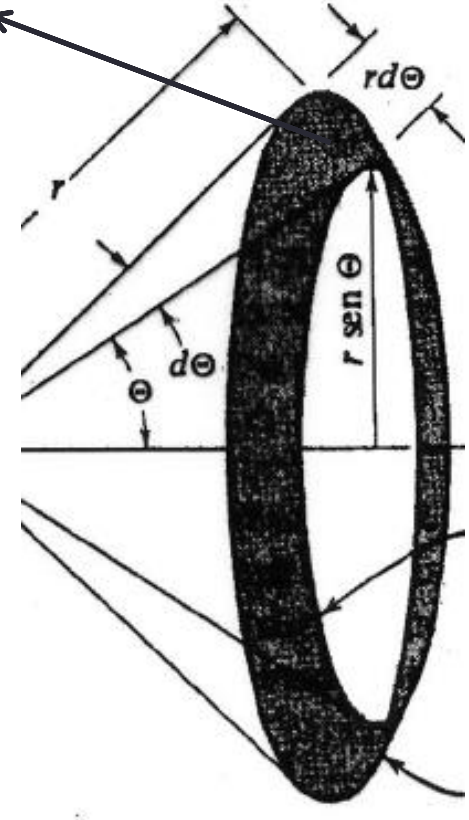
- Está relacionada a probabilidade de uma partícula ser espalhada por um núcleo

Vemos que na vida real o detector esta posicionado sobre um intervalo de ângulo θ e θ+dθ
que corresponde a um parâmetro de impacto b e b+db

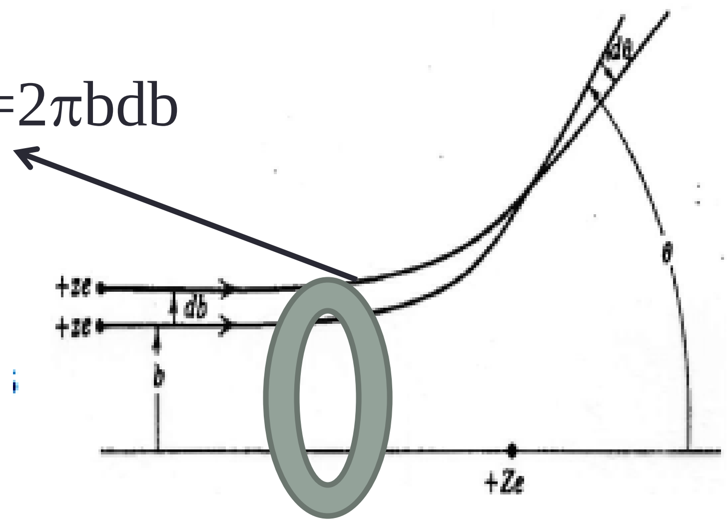
Área=2πbdb



dA=(2πrsenθ)(rdθ)



Área=2πbdb



- A probabilidade de uma partícula α passar por um desse anéis é P(b)db e é igual :

$$P(b)db = nt2\pi bdb$$

$$b = \frac{D}{2}\cot g\frac{\theta}{2}$$

$$db = -\frac{D}{2}\frac{1}{2}\operatorname{cosc}^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$P(b)db = 2\pi nt\frac{D}{2}\cot g\frac{\theta}{2}\left(-\frac{D}{2}\frac{1}{2}\operatorname{cosc}^2\frac{\theta}{2}d\theta\right)$$

$$P(b)db = -\pi nt\frac{D^2}{4}\cot g\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{sen^2\,\theta/2}\right)d\theta$$

- A probabilidade de α passar por um desse anéis P(b)db, é igual a:.

$$P(b)db = 2\pi nt\frac{D}{2}\cot g\frac{\theta}{2}\left(-\frac{D}{2}\frac{1}{2}\operatorname{cosc}^2\frac{\theta}{2}d\theta\right)$$

$$\cot g\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\theta/2}{sen\,\theta/2}$$

$$P(b)db = -\pi nt\frac{D^2}{4}\cot g\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{sen^2\,\theta/2}\right)d\theta$$

$$2sen\,\theta/2\cos\theta/2 = sen\theta$$

$$\cos\theta/2 = \frac{sen\theta}{2sen\,\theta/2}$$

$$\boxed{P(b)db = -\frac{\pi ntD^2}{8}\frac{sen\theta}{sen^4\,\theta/2}d\theta}$$

- P(b)db é igual a probabilidade de que as partículas sejam espalhadas entre $\theta + d\theta$
- O sinal negativo aparece pois uma redução de b provoca um aumento em θ.

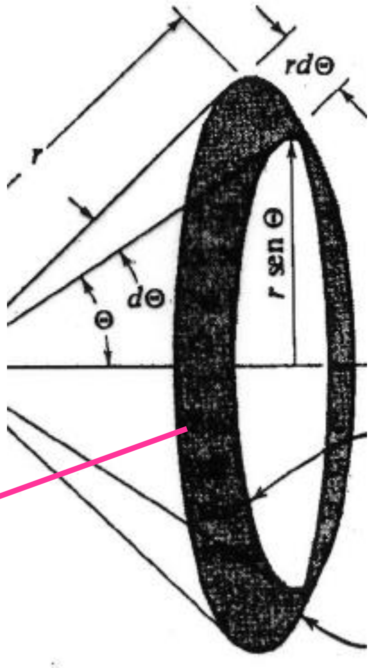
- Assim o número de partículas α de um feixe de intensidade I espalhada entre ***θ+dθ*** será :

$$N(\theta)d\theta = -P(b)dbI \qquad P(b)db = -\frac{\pi ntD^2}{8}\frac{sen\theta}{sen^4 \theta/2}d\theta$$

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Z_1Z_2e^2}{1/2\, mv^2} \qquad N(\theta)d\theta = \frac{I\pi ntD^2}{8}\frac{sen\theta}{sen^4 \theta/2}d\theta$$

Equação de espalhamento de Rutherford

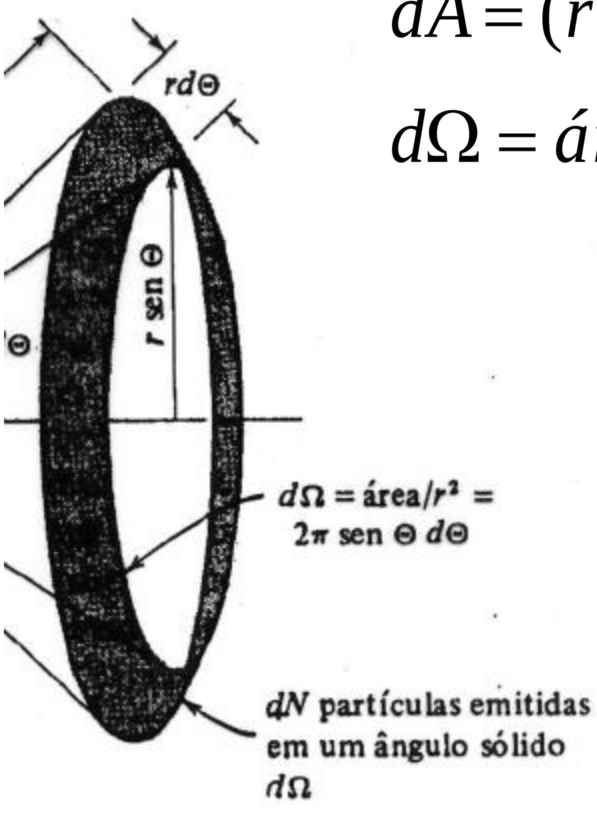
- As N partículas α cujo ângulo de espalhamento esta entre ***θ+dθ*** passam por uma zona esférica de raios r com centro no átomo responsável pelo espalhamento:



$$dA = (rd\theta).(2\pi r sen\theta)$$

$$dN \leftarrow N(\theta)d\theta = \frac{I\pi n t D^2}{8}\frac{sen\theta\, d\theta}{sen^4 \theta/2} \qquad D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\underbrace{\tfrac{1}{2} m_\alpha v^2}_{E_\alpha}}$$

- O número de partículas α espalhadas em um ângulo sólido dΩ em torno de um ângulo de espalhamento θ



$$dA = (r d\theta).(2\pi r sen\theta)$$

$$d\Omega = área / r^2$$

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{Int\cancel{2}\pi D^2}{16}\frac{\cancel{sen\theta d\theta}}{sen^4 \theta/2}\frac{1}{\cancel{2\pi sen\theta d\theta}}$$

$$dN = \frac{IntD^2}{16}\frac{1}{sen^4 \theta/2}d\Omega$$

$$dN = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2 \frac{1}{4}\frac{Int}{sen^4 \theta/2}d\Omega$$

- O número de partículas α espalhadas em um ângulo sólido dΩ em torno de um ângulo de espalhamento θ

$$dN = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2 \frac{1}{4} \frac{Int}{sen^4 \theta/2} d\Omega$$

Pontos importantes:

- O espalhamento é proporcional a Z_1^2 e Z_2^2
- O termo Mv^2 é a energia cinética da partícula a incidente, e o espalhamento é inversamente proporcional a energia cinética desta partícula
- O espalhamento é inversamente proporcional a 4 potencia de sen (θ/2)
- O espalhamento é proporcional a espessura da folha de metal n

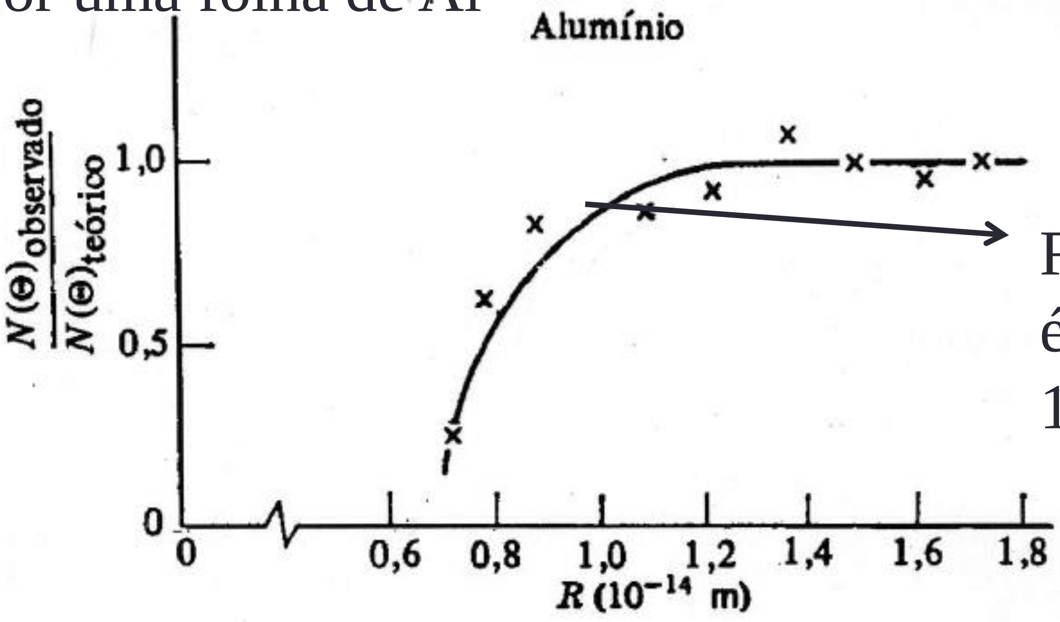
$$dN \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} . I.n.t.d\Omega$$

Secão de choque de Rutherford

Secão de choque diferencial de Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2 \frac{1}{sen^4 \theta/2}$$

Fornece o número de partículas espalhadas em um dado elemento de ângulo sólido dΩ. Dados obtidos pelo grupo de Rutherford para o espalhamento de partículas α de várias energias a um ângulo fixo grande por uma folha de Al



Raio do núcleo de Al é aproximadamente 10^{-14}m = 10F

Modelo de Rutherford

De acordo com o modelo de Rutherford o número de partículas espalhadas α por núcleo observadas na tela de um cintilômetro de área A será a uma distância r da folha espalhadora:

$$\Delta N = Int\left(\frac{A}{r^2}\right)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2\frac{1}{4}\frac{1}{sen^4 \theta/2}$$

Intensidade do feixe α

é o número de núcleos por unidade de área (átomos/cm^2)

Fator devido a área do cintilômetro e a distância deste da folha espalhadora

partículas α

Partículas espalhadoras

Energia cinética das partículas α antes do espalhamento

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Partículas α são produzidas pela desintegração do ^{226}Ra e 450 partículas por minuto são produzidas em um cintilômetro para um ângulo θ =45º. Se as condições experimentais forem mantidas e o detector for deslocado de modo a observar as partículas no ângulo de 90º, qual será o número de partículas observadas por minuto?

$$\Delta N = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2 \frac{1}{4} \frac{Int}{sen^4 \theta/2} \left(\frac{A}{r^2}\right)$$

$$\Delta N = C \frac{1}{sen^4 \theta/2}$$

$$450 = C \frac{1}{sen^4 45/2}$$

$$C = 450 * sen^4 (45/2)$$

Quando descolocamos o detector para 90º,

$$\Delta N = C \frac{1}{sen^4 90/2}$$

$$\Delta N = 450 \frac{sen^4 45/2}{sen^4 90/2} = 450 \frac{0.021}{0.25}$$

$$\Delta N = 37.8 \approx 38 particulas/\min$$

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Um feixe de partículas α com E_k = 6,0MeV incide em uma folha de prata com 1,0μm de espessura. A corrente do feixe é de 1,0nA. Quantas partículas α serão contadas por um pequeno cintilômetro com 5mm² de área situado a 2,0cm da folha com um ângulo de 75º? (dados: Ag: Z=47, ρ=10,5g/cm³, M=108g/mol)

$$\Delta N = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \left(\frac{Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2 \frac{Int}{sen^4 \theta/2} \left(\frac{A}{r^2}\right)$$

1) Intensidade do feixe de α

$$I = \frac{i}{q} = \frac{1nA}{2e} = \frac{1x10^{-9}(C/s)}{2x1.6x10^{-19}C}$$

$$I = 0{,}312x10^{10} = 3{,}12x10^{9}\,\frac{alfas}{s}$$

2) Número de núcleos (átomos por unidade de volume)

$$n = \frac{\rho(g/cm^3).N_A(\acute{a}tomos/mol)}{M(g/mol)}$$

$$n = \frac{10{,}5(g/cm^3).6{,}02x10^{23}(\acute{a}tomos/mol)}{108(g/mol)}$$

$$n = \frac{\rho N_A}{M}\,\frac{\acute{a}tomos}{cm^3}$$

$$n = 5{,}85x10^{22}\,\frac{\acute{a}tomos}{cm^3} = 5{,}85x10^{28}\,\frac{\acute{a}tomos}{m^3}$$

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Um feixe de partículas α com $E_k = 6{,}0MeV$ incide em uma folha de prata com 1,0μm de espessura. A corrente do feixe é de 1,0nA. Quantas partículas α serão contadas por um pequeno cintilômetro com $5mm^2$ de área situado a 2,0cm da folha com um ângulo de 75º? (dados: Ag: Z=47, ρ=10,5g/cm³, M=108g/mol)

$$\Delta N = \frac{Int}{sen^4 \theta/2} * \left(\frac{A}{r^2}\right) * \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \left(\frac{Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2$$

3) Correção área do cintilômetro

$$\frac{A}{r^2} = \frac{5mm^2}{(2cm)^2} = \frac{5x10^{-6}m^2}{(2x10^{-2})^2 m^2}$$

$$\Delta N = \frac{3{,}12x10^9 x5{,}85x10^{28} x10^{-6} x5x10^{-6}}{0{,}137x\left(2x10^{-2}\right)^2} x\left(\frac{9x10^9 x47x(1{,}6x10^{-19})^2}{2x6x10^6 x1{,}6x10^{-19}}\right)^2$$

$$\Delta N = \frac{91{,}26x10^{25}}{0{,}137x4x10^{-4}} x(56{,}4)^2 x(10^{-16})^2$$

$$\Delta N = 529x10^3 x10^{-3}$$

$$\Delta N = 529 alfas/s$$