MECÂNICA 1

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS-2017

1) Uma partícula de massa m se move no espaço sujeita à força cujas componentes em coordenadas esféricas são:

$F_r = \dfrac{2\alpha\cos\theta}{r^3}$, $F_\theta = \dfrac{\alpha \operatorname{sen}\theta}{r^3}$ e $F_\phi=0$ (campo dipolar)

a) Mostre que a projeção do momento angular $\vec{L}$ no eixo z é uma constante do movimento.
b) Mostre que esse campo de forças é conservativo e obtenha o seu potencial $V(\vec{r})$.

2) Uma partícula de massa m se move numa região do espaço onde age uma força $F = \dfrac{y\hat{j} + z\hat{k}}{\left(y^2 + z^2\right)}$.

a) A energia se conserva? Justifique, e, em caso afirmativo, calcule o potencial.
b) Quais as componentes do momento que são conservadas? Justifique.
c) Quais as componentes do momento angular em torno da origem que se conservam? Justifique.

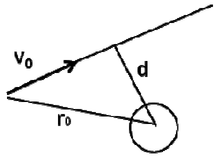
3) Uma partícula está confinada a se movimentar em um plano. Ela é atraída em direção a um ponto P do plano, por uma força dirigida a P e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre a partícula e P.
a) Escreva as energias cinética e potencial da partícula justificando a escolha do sistema de coordenadas.
b) Determine as equações do movimento dessa partícula.
c) Quais grandezas são constantes do movimento e o que essas grandezas representam?
d) Esboce o gráfico do potencial efetivo dessa partícula e descreva quais são os possíveis movimentos nesse caso. Indique valores significativos no gráfico, ou seja: pontos de retorno, pontos de equilíbrio e as energias associadas a esses pontos.

4) Uma partícula de massa m está sujeita ao potencial $V(r)=\frac{1}{2}kr^2$ (oscilador harmônico em três dimensões).
a) Mostre que a trajetória da partícula está sempre contida num plano e identifique esse plano quando, em t=0, a partícula se encontra no ponto $(x,y,z)=(x_0,0,0)$ com velocidade $(v_x,v_y,v_z)=(o,v_0,o)$.
b) Mostre que as componentes da equação de Newton se separam em coordenadas cartesianas e use as respectivas soluções para mostrar que as órbitas do movimento são fechadas.
c) Obtenha a relação entre a energia E e o momento angular L para órbitas circulares.

5) Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central $F=-\frac{k}{r^2}$ com k>0. No ponto P, que dista **a** da origem, sua velocidade é perpendicular a $\vec{r}$ e vale $v_0=\sqrt{\frac{k}{2ma}}$.
a) Esboce o gráfico do potencial efetivo em função de r, indicando o ponto P.
b) Qual é a energia cinética da partícula no ponto de máxima aproximação da origem?
c) O movimento está contido numa região finita do espaço? Justifique.
d) Calcule a frequência de pequenas oscilações radiais em torno do ponto de mínimo e compare com a frequência de revolução (movimento circular). O que se pode concluir sobre as órbitas?

6) Considere um corpo de massa m sujeito à força gravitacional terrestre. O corpo é lançado de um ponto que dista $\vec{r}_0$ do centro da Terra com uma velocidade v_0 cuja direção é perpendicular à linha que liga o corpo ao centro da Terra. Admita que o potencial gravitacional seja nulo no infinito, isto é $V(\infty)=0$.
a) Determine a dependência radial do potencial efetivo $V_{ef}(r)$, em função de M_T, G, m, v_0 e r_0 e a partir de $V_{ef}(r)$ determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja circular.
b) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja parabólica.
c) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja elíptica.
d) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja hiperbólica.
e) Esboce o gráfico de $V_{ef}(r)$ indicando cada um dos casos acima.

7) Descobre-se um asteroide que está a uma distância **r_0=2,0 x 10^9 m** da Terra com uma velocidade de **v_0=1,0 x 10^4 m/s**. A distância entre a trajetória do asteróide nesse ponto e o centro da Terra é **d=3 x 10^7m**.
A que distância mínima do centro da Terra passará o asteroide?



8) Observa-se um cometa a uma distância de 1,00 x 10^8 km do Sol, viajando em direção a ele à velocidade de 51,6 km por segundo, num ângulo de 45^0 em relação ao raio do Sol. Escreva a equação para a órbita do cometa, em coordenadas polares, com a origem no Sol e o eixo x passando pela posição em que o cometa foi observado. Considere a massa solar como 2,00 x 10^{30} kg.

9) A distância de periélio (mais próxima) ao Sol do planeta Marte é de 2,06 x 10^8 km, e a distância do afélio(máxima) é de 2,485 x 10^8 km. Suponha que a Terra se mova no mesmo plano em círculo de raio 1,49 x 10^8 km e um período de um ano. A partir desses dados, determine a velocidade de Marte no periélio. Suponha que uma nave espacial Mariner seja lançada de forma que seu periélio esteja na órbita terrestre e o seu afélio, no periélio de Marte. Determine a velocidade do Mariner relativa a Marte, no ponto onde eles se encontram. Qual deles tem a velocidade maior? Qual deles tem a maior velocidade angular durante o período de vôo?

10) Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força $\vec{F} = -k\vec{r}$, k>0(oscilador harmônico isotrópico). O momento angular da partícula é L.
a) Determine a energia potencial.
b) Mostre que o menor valor da energia para essa partícula é: $E_{min} = \left(\frac{kL^2}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$.
c) Mostre que para uma dada energia total $E \geq E_{min}$ a trajetória está situada dentro de um anel $r_1 \leq r \leq r_2$, com $r_1 = \sqrt{\frac{E}{k}}\left[1-\sqrt{\frac{kL^2}{mE^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$ e $r_2 = \sqrt{\frac{E}{k}}\left[1+\sqrt{\frac{kL^2}{mE^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$ onde r_1 e r_2 são as raízes da equação $E = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$.

11) Uma partícula de carga q e massa m, em repouso num campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{k}$, é submetida, no instante t=0, a um campo elétrico oscilante $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen} \omega t\,\hat{i}$. Determine o seu movimento.
Resolva esse mesmo problema para o caso em que $\omega = \frac{qB_0}{m}$.

12) Considere que a órbita da Terra em torno do Sol seja circular e que a massa do Sol subitamente se reduza à metade. Qual será, nesse caso, a órbita da Terra? A Terra escapará do sistema solar?

13) Determine a lei de força para um campo central, que permite à partícula mover-se em órbita espiral dada por $r = k\theta^2$, onde k é uma constante.

14) Considere a família de órbitas para um potencial central onde a energia é uma constante. Mostre que se existir uma órbita circular estável, o momento angular associado a essa órbita, é o de maior valor em relação a todas as outras possíveis órbitas.

15) Considere que a órbita da Terra em torno do Sol seja circular e que a massa do Sol subitamente se reduza à metade. Qual será, nesse caso, a órbita da Terra? A Terra escapará do sistema solar?

16) De acordo com a teoria da força nuclear de Yukawa, a força entre um nêutron e um próton tem o seguinte potencial: $V(r) = -\dfrac{Ke^{-\alpha r}}{r}, K > 0$.

a) Determine a força, comparando-a com a força da lei do inverso do quadrado da distância.

b) Discuta os tipos de movimento que podem ocorrer, caso uma partícula de massa m se desloque sob a ação de tal força.

c) Determine L e E para o movimento em círculo de raio a. Determine o período do movimento circular e o período de pequenas oscilações radiais.

17) Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central cujo potencial é dado por $V(r)= Kr^4$, com $K>0$.

a) Para que valores da energia e do momento angular a órbita será um círculo de raio **a** em torno da origem?

b) Qual será o período do movimento circular?

c) Se a partícula for ligeiramente afastada dessa órbita, qual será o período de pequenas oscilações em torno de **a**? A órbita será fechada?