

# Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis

*Waldecir Bianchini*

Instituto de Matemática - UFRJ

11 de novembro de 2016



## Ao Daniel

meu neto

*Uma vida minha que segue ...*

No dia do seu nascimento, você  
chorou e o mundo se alegrou.  
Viva sua vida de modo que, no dia  
de sua morte, o mundo chore e  
você se alegre.  
–Provérbio Cherokee –



*Agradeço, in memoriam, ao Professor Ivo Fernandez Lopez, que nos deixou prematuramente, pela revisão criteriosa deste livro, bem como muitas observações e sugestões valiosas.*



# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Equações Diferenciais de Primeira Ordem</b>	<b>9</b>
1.1	Introdução . . . . .	9
1.2	Equações Separáveis . . . . .	12
1.3	Equações Lineares . . . . .	14
1.4	Existência e Unicidade de soluções . . . . .	16
1.5	Aplicações . . . . .	17
1.5.1	Crescimento e Decaimento Exponencial . . . . .	17
1.6	Exercícios . . . . .	20
<b>2</b>	<b>EDO de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes</b>	<b>23</b>
2.1	Introdução - O Problema Carro-Mola . . . . .	23
2.2	Um pequeno resumo de funções complexas . . . . .	27
2.3	O problema carro-mola com movimento forçado . . . . .	29
2.4	Método dos Coeficientes a Determinar . . . . .	30
2.5	Exercícios . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Parametrização de Curvas</b>	<b>37</b>
3.1	Curvas no Plano . . . . .	37
3.1.1	Introdução . . . . .	37
3.2	Vetores no plano (resumo) . . . . .	39
3.2.1	Operação com vetores no plano . . . . .	40
3.3	Funções vetoriais . . . . .	43
3.3.1	Limite e Continuidade de Funções Vetoriais . . . . .	47
3.3.2	Derivadas de Funções Vetoriais . . . . .	49
3.3.3	Interpretação da Derivada . . . . .	49
3.3.4	Integrais de Funções Vetoriais . . . . .	51
3.4	Comprimento de arco . . . . .	52
3.5	Exercícios . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Espaço Tridimensional - <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>55</b>
4.1	Sistema de Coordenadas Tridimensionais . . . . .	55
4.2	Vetores no Espaço . . . . .	55
4.3	Retas no Espaço . . . . .	56
4.4	Planos no Espaço . . . . .	57
4.5	Curvas no espaço . . . . .	58
4.6	Superfícies Cilíndricas e Quádricas . . . . .	59
4.6.1	Cilindros . . . . .	59
4.6.2	Superfícies Quádricas . . . . .	61
4.7	Exercícios . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Funções de Várias Variáveis</b>	<b>69</b>
5.1	Funções de duas variáveis . . . . .	69
5.1.1	Gráficos e Curvas de Nível . . . . .	71
5.2	Limites e Continuidade . . . . .	73
5.3	Continuidade . . . . .	78
5.4	Derivadas Parciais . . . . .	79
5.4.1	<b>Interpretação Geométrica da Derivadas Parciais</b> . . . . .	82
5.5	Derivadas de Ordem Superior . . . . .	82
5.6	Planos Tangentes . . . . .	84
5.7	Diferenciabilidade . . . . .	89
5.8	A Regra da Cadeia . . . . .	94
5.8.1	Função Composta . . . . .	94
5.8.2	Regra da Cadeia . . . . .	95
5.9	Derivada Direcional . . . . .	98
5.10	O Gradiente e o Cálculo da Derivada Direcional . . . . .	100
5.11	Vetores Gradientes e Curvas de Nível . . . . .	102
5.12	Funções de n variáveis . . . . .	105
5.12.1	Derivadas Parciais e a Regra da Cadeia . . . . .	106
5.12.2	Derivadas Direcionais e Gradiente . . . . .	107
5.12.3	Planos Tangentes . . . . .	108
5.13	Exercícios . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Máximos e Mínimos</b>	<b>115</b>
6.1	Extremos de uma função . . . . .	115
6.2	Máximos e Mínimos Condicionados . . . . .	123
6.2.1	Multiplicadores de Lagrange para funções de 2 variáveis . . . . .	123
6.2.2	Multiplicadores de Lagrange para funções de 3 variáveis e uma restrição . . . . .	126
6.2.3	Multiplicadores de Lagrange para funções de 3 variáveis com 2 restrições . . . . .	128
6.3	Máximos e Mínimos em regiões fechadas e limitadas . . . . .	130
6.4	Exercícios . . . . .	132
	<b>Apêndice</b>	<b>135</b>
	<b>A Cônicas em Cálculo</b>	<b>135</b>
A.1	Parábola . . . . .	136
A.2	Elipse . . . . .	137
A.3	Hipérbole . . . . .	139
A.4	Translação das Cônicas . . . . .	140
	<b>Respostas</b>	<b>145</b>

Nota: A figura  que aparece no decorrer deste livro indica que existe no endereço:

[www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/interativo](http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/interativo)

uma página com uma JGI - Janela Gráfica Interativa - em java (applet java) referente àquele objeto de estudo.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais de Primeira Ordem

---

### 1.1 Introdução

Equações diferenciais é um dos tópicos da matemática com aplicações em quase todos os ramos da ciência. Física, Química, Biologia, Economia são algumas destas áreas. Para entender melhor, toda equação contendo derivadas de funções são chamadas de equações diferenciais. Portanto, o estudo de equações diferenciais e suas aplicações dependem do que se entende por derivada de uma função, tópico este já estudado em Cálculo I. As equações abaixo são alguns exemplos de equações diferenciais que estudaremos neste e no próximo capítulo.

$$y' + 2xy = 3x^2, \quad xy' + \operatorname{sen} xy = e^x, \quad 3y'' + 4y' + 5y = \cos x$$

As duas primeiras equações diferenciais são chamadas de primeira ordem e a última de segunda ordem, devido à derivada de maior ordem ser um e dois, respectivamente.

Uma equação diferencial que descreve algum processo físico, químico, biológico, econômico ... etc, é chamada de modelo matemático do processo em questão e chegar a esta equação a partir das descrições destes processos é chamado de modelagem do problema. Chegar a estes modelos e resolvê-los é o que veremos a seguir.

**Exemplo 1.1** *Se  $f$  é uma função contínua, vimos em Cálculo I que calcular a  $\int f(x) dx$  é encontrar uma primitiva  $F$  da função dada  $f$ , ou seja, é determinar uma função  $F$  tal que,  $F' = f$ , isto é,*

$$F' = f \iff \int f(x) dx = F(x)$$

*Esta equação foi a primeira equação diferencial que resolvemos e a primitiva  $F$  nada mais é que uma solução para esta equação diferencial. Por exemplo, resolver  $F'(x) = \cos(x)$  é equivalente a*

$$F(x) = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c,$$

*o que nos mostra que esta equação diferencial tem infinitas soluções, já que a constante  $c$  é qualquer. O estudo da existência e unicidade de soluções é um dos aspectos mais interessantes desta teoria.*

**Exemplo 1.2** *Considere um corpo de massa  $m$  caindo na superfície da terra. Se desprezarmos a resistência do ar, chamando de  $v$  sua velocidade em um determinado instante de tempo  $t$  e de  $a$  sua aceleração, a única força atuante é a do seu próprio peso  $p = mg$ , onde  $g$  é a constante gravitacional. Pela segunda lei de Newton teremos*

$$F = ma = p = mg \quad \implies \quad \frac{dv}{dt} = g \implies v(t) = gt + c \quad (1.1)$$

Se o objeto partiu do repouso, sua velocidade inicial  $v(0) = 0$ , e, então,  $v(t) = gt$ . Se o objeto partiu com uma velocidade inicial  $v(0) = v_0$ , então,  $v(t) = gt + v_0$ . A equação 1.1 nos diz que toda solução  $v(t)$  tem inclinação  $g$ , isto é, a aceleração não varia com o tempo e a velocidade tem sempre a mesma inclinação. Isto é mostrado no gráfico abaixo, chamado de campo de direções ou vetores, onde desenhamos pequenos segmentos de reta com coeficiente angular  $g = 9,8$ .

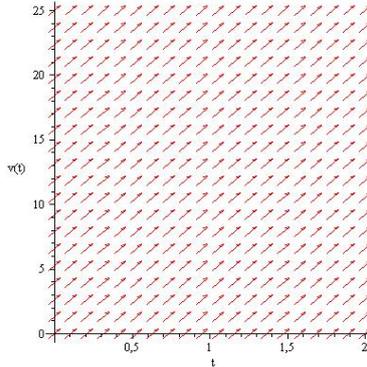


Figura 1.1: Campo de direções para a equação  $\frac{dv}{dt} = g$

Chamando de  $x(t)$  a posição do objeto em cada instante de tempo  $t$ , temos que

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = gt + v_0 \implies x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c$$

Se o objeto parte de uma posição inicial  $x(0) = x_0$ , tem-se  $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$ .

**Exemplo 1.3** Considere o problema anterior, agora, com o ar oferecendo uma resistência proporcional à velocidade. As forças atuantes no sistema, agora, são o peso e a resistência do ar. Assim, pela segunda lei de Newton,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \implies \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \tag{1.2}$$

sendo  $k$  a constante de resistência. ⓘ

Podemos fazer uma análise do comportamento da solução desta equação diferencial sem resolvê-la, como fizemos no exemplo 1, através do seu campo de direções. Para isto, vamos dar valores às constantes envolvidas na equação 1.2. Considere  $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ ,  $m = 20 \text{ kg}$  e o coeficiente de resistência do ar  $k = 5 \frac{kg}{s}$ . ⓘ

Observe que o campo de vetores na figura 1.2 é traçado no plano  $t \times v$  sem resolver a equação 1.2, dando-se um valor para a velocidade  $v$ , por exemplo  $v = 60$  e obtendo-se o valor de  $\frac{dv}{dt} = -5,2$  para todo valor de  $t$ . Com isso traça-se pequenos segmentos de retas, ou vetores, para determinados valores de  $t$ , equidistantes, ao longo da reta  $v = 60$  com o mesma declividade. Olhando para a figura, observe que se o objeto partir com velocidade acima de  $40 \text{ m/s}$ , ou abaixo, esta velocidade tende a diminuir ou crescer, respectivamente, e se aproximar da velocidade terminal ou de equilíbrio que, como se vê no gráfico, deve ser próxima de  $40 \text{ m/s}$ .

Voltemos para a resolução da equação 1.2. Chamando  $\frac{k}{m} = h$ , observe que

$$\frac{dv}{dt} = g - hv \iff \frac{1}{g - hv} \frac{dv}{dt} = 1 \tag{1.3}$$

Integrando ambos os lados com respeito à variável  $t$ , obtém-se:

$$\int \frac{1}{g - hv} \frac{dv}{dt} dt = \int dt = t + c_1 \tag{1.4}$$

Agora, para calcular a integral do lado esquerdo acima, observe que se  $v = v(t)$ , então,  $dv = v'(t)dt$ . Fazendo esta substituição, tem-se:

$$\int \frac{1}{g - hv} \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{1}{g - hv} dv \quad (1.5)$$

Agora, fazemos a substituição  $u = g - hv \Rightarrow du = -h dv$ , assim,

$$\int \frac{1}{g - hv} dv = -\frac{1}{h} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{h} \ln |u| + c_2 = -\frac{1}{h} \ln |g - hv| + c_2 \quad (1.6)$$

Assim, as equações 1.4 e 1.6 implicam que

$$-\frac{1}{h} \ln |g - hv| + c_2 = t + c_1 \iff \ln |g - hv| = -ht - hc_1 + c_2 = -ht + c_3$$

onde,  $c_3 = -hc_1 + c_2$  é uma constante real qualquer. Assim,

$$|g - hv| = e^{-ht+c_3} \implies g - hv = \pm e^{-ht+c_3} = ce^{-ht} \implies v = v(t) = \frac{g}{h} - ce^{-ht}$$

onde  $c = \pm e^{c_3}$ , ou seja,  $c$  é uma constante real qualquer diferente de zero.

Se o objeto parte do repouso, temos uma condição inicial  $v(0) = 0$ , e assim,

$$v(0) = \frac{g}{h} - c = 0 \implies c = \frac{g}{h}$$

e, portanto,

$$v(t) = \frac{g}{h}(1 - e^{-ht}) \quad (1.7)$$

A figura 1.3 mostra o campo de vetores com as condições iniciais  $v(0) = 0$  e  $v(0) = 60$ .

Note que a solução  $v(t) \rightarrow \frac{g}{h}$ , quando o tempo  $t \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{g}{h}$$

que é também uma solução da equação 1.2. Para verificar isto, basta substituir  $v = \frac{g}{h}$  na equação 1.2 e verificar que dará  $0 = 0$ .

Se quisermos determinar a posição do objeto em cada instante, basta lembrar que  $\frac{dx}{dt} = v(t)$  e supondo que sua posição inicial  $x(0) = 0$ , tem-se

$$x(t) = \frac{g}{h}t + \frac{g}{h^2}(e^{-ht} - 1)$$

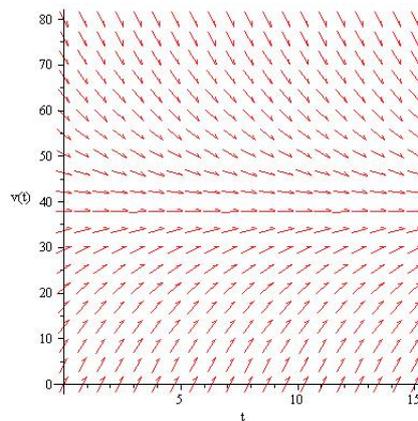


Figura 1.2: Campo de direções da equação  $\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{4}$

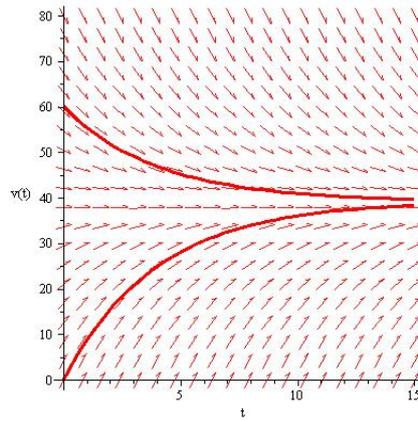


Figura 1.3

## 1.2 Equações Separáveis

A técnica de resolução da equação do exemplo 1.3 da seção anterior pode ser esquematizada de modo a ficar mais prático e rápido de se resolver equações daquele tipo. Tal método é chamado de separação de variáveis e as equações de equações separáveis. Note que a substituição que fizemos na integral do lado esquerdo em 1.4, nos dá uma igualdade que, de um lado, temos apenas a variável  $v$  e, do outro, apenas a variável  $t$ , isto é, separamos as variáveis  $t$  e  $v$ .

Resumindo: O método de separação de variáveis se aplica a equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y) \quad (1.8)$$

Olhamos para a notação de Leibniz de derivada como se fosse uma fração e separamos as variáveis

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

e integramos ambos os lados:

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

A justificativa matemática para isto é dada a seguir:

Se  $y = f(x)$  é uma solução de 1.8, então,

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y) \implies \frac{1}{h(f(x))} f'(x) = g(x) \implies \int \frac{1}{h(f(x))} f'(x) dx = \int g(x) dx \quad (1.9)$$

porém, como  $y = f(x) \implies dy = f'(x) dx$  e assim,

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

**Exemplo 1.4** Resolva as equações 

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = xy \qquad (b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2} \qquad (c) \quad \frac{dy}{dx} = 3y + 5$$

Solução: (a) Separando as variáveis e integrando ambos os lados

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

resulta

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C_1 \implies |y| = e^{\frac{x^2}{2}} e^{C_1} \implies y = \pm e^{C_1} e^{\frac{x^2}{2}} = ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}$$

Observe que a função  $y = 0$ , também é solução. Portanto, a solução geral desta equação é

$$y = ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

A figura 1.4 mostra o campo de vetores e aos gráficos da solução para vários valores de  $c$ .

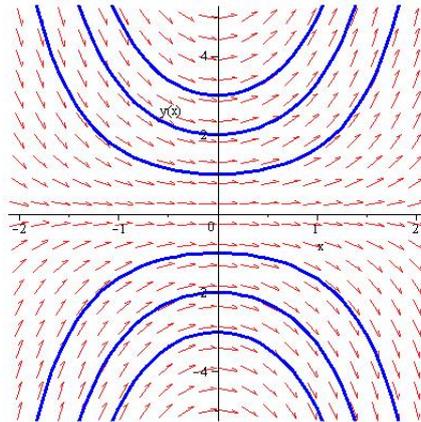


Figura 1.4: Campo de vetores e curvas integrais para  $y' = xy$

(b) *Separando as variáveis e integrando*

$$\int \frac{1 + 2y^2}{y} dy = \int \cos x dx \implies \left(\frac{1}{y} + 2y\right) dy = \cos x dx \implies \ln |y| + y^2 = \text{sen} x + c$$

Observe que não podemos explicitar  $y$  como uma função de  $x$ . A solução, neste caso, é chamada de solução implícita da equação.

Observe que  $y = 0$  também é solução da equação.

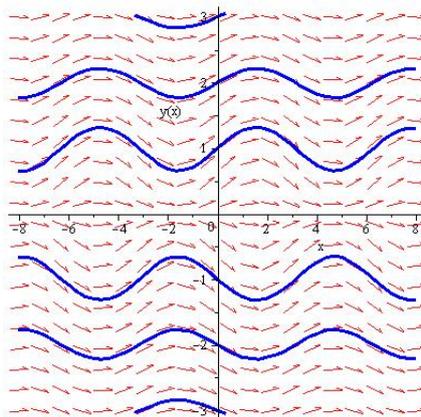


Figura 1.5: Campo de vetores e curvas integrais para  $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1+2y^2}$

(c) *Separando as variáveis e integrando e supondo  $3y + 5 \neq 0$ , temos*

$$\frac{dy}{3y + 5} = dx \implies \ln |3y + 5| = x + c_1 \implies y = \frac{-5 \pm e^{c_1} e^{3x}}{3}$$

Observe que  $y = -\frac{5}{3}$  também é solução da equação. Assim, se colocarmos  $e^{c_1} = c$ , podemos reescrever a solução como

$$y = \frac{-5 + ce^{3x}}{3},$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ .

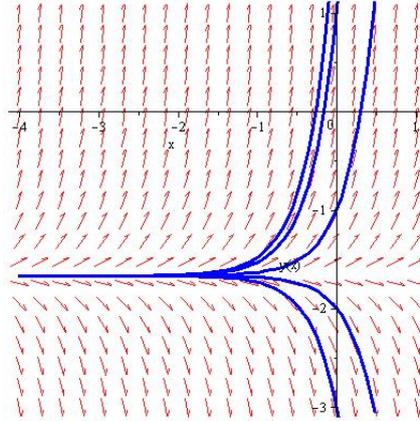


Figura 1.6: Campo de vetores e curvas integrais para  $y' = 3y + 5$

Observe na figura 1.6 que as soluções convergem rapidamente para a solução de equilíbrio  $y = -\frac{5}{3}$

### 1.3 Equações Lineares

Equações do tipo

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad (1.10)$$

ou, simplificadamente,

$$y' + py = q,$$

onde  $p = p(x)$  e  $q = q(x)$  são funções contínuas em algum intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , são chamadas de equações diferenciais lineares de 1ª ordem. As funções  $p = p(x)$  e  $q = q(x)$  são chamadas de coeficientes da equação. Note que a equação 1.2 pode ser reescrita na forma acima:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$

Porém, nem toda equação linear é separável. Por exemplo:  $y' + 3y = x$  não é separável. (Tente separar!)

Para se encontrar uma solução de uma equação linear, a idéia é reescrever o lado esquerdo de 1.10 na forma  $F' = f$ . Para isto, vamos multiplicar o lado esquerdo por uma função de tal modo que ele se transforme na derivada do produto de duas funções, pois é com o que ele se parece!

Vamos chamar de  $u$  esta função. Queremos, então, que

$$u(y' + py) = (uy)' = u'y + uy' \Leftrightarrow uy' + upy = u'y + uy'$$

Assim,

$$upy = u'y \Rightarrow \frac{u'}{u} = p$$

Integrando tem-se

$$\ln |u| = \int p dx \Rightarrow |u| = e^{\int p dx}$$

Como queremos uma função para multiplicar ambos os lados da equação 1.10, podemos considerar

$$u = e^{\int p dx}$$

chamado de fator integrante.

**Exemplo 1.5** Resolva as equações

(a)  $y' + 2y = \cos x$                       (b)  $x^3y' - y = 1$

Solução: (a) O fator integrante

$$u = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

. Multiplicando ambos os lados da equação por  $u$  obtém-se

$$(ye^{2x})' = e^{2x} \cos x \Rightarrow (ye^{2x}) = \int e^{2x} \cos x dx$$

Integrando-se duas vezes por partes, obtém-se

$$y = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \text{sen} x + ce^{-2x}$$

Observe na figura 1.7 que uma solução particular da equação converge rapidamente para a solução de equilíbrio  $y = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \text{sen} x$ .

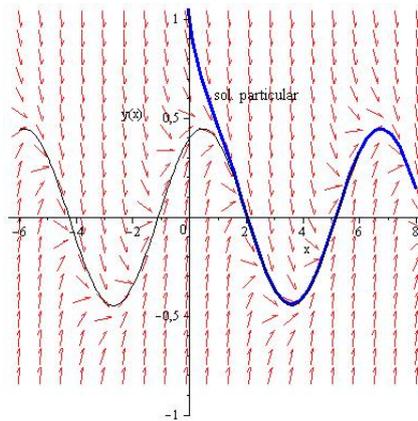


Figura 1.7

(b) Primeiramente, a equação  $x^3y' - y = 1$  tem que ser colocada na forma linear  $y' + py = q$ . Assim, supondo  $x \neq 0$ ,

$$x^3y' - y = 1 \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x^3} = \frac{1}{x^3}$$

Logo, o fator de integração  $u = e^{\frac{x^{-2}}{2}}$ . Multiplicando ambos os lados da equação 1.3 por  $u$ , obtém-se

$$e^{\frac{x^{-2}}{2}} y = \int x^{-3} e^{\frac{x^{-2}}{2}} dx = -e^{\frac{x^{-2}}{2}} + c \Rightarrow y = -1 + ce^{-\frac{1}{2x^2}}$$

Observe na figura 1.8 que muito embora a equação não esteja definida para  $x = 0$ , todas as soluções se aproximam do ponto  $(0, -1)$  quando  $x \rightarrow 0$ .

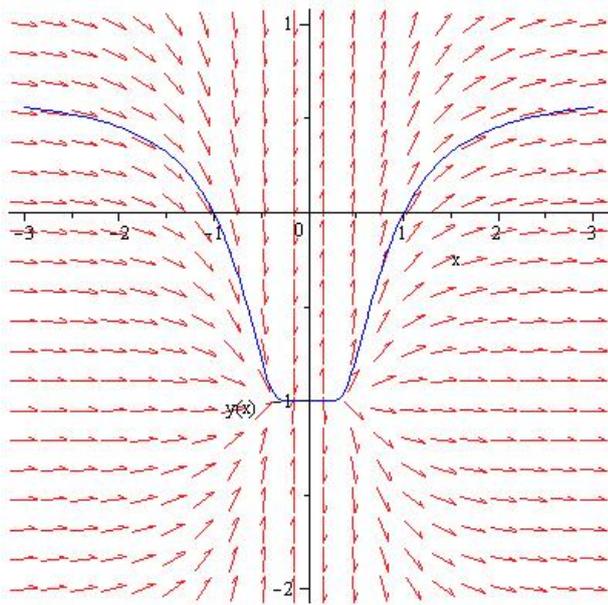


Figura 1.8

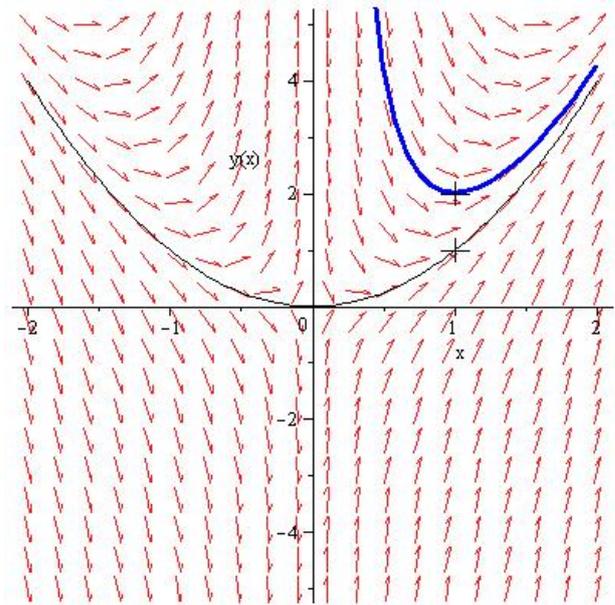


Figura 1.9

**Exemplo 1.6** Resolva o problema de valor inicial  $xy' + 2y = 4x^2$  e  $y(1) = 2$

A equação acima é equivalente à equação  $y' + \frac{2}{x}y = 4x$  e portanto seu fator integrante  $u = x^2$ . Assim, multiplicando a equação por  $u$ , obtém-se

$$(x^2y)' = 4x^3 \Rightarrow y = x^2 + \frac{c}{x^2}$$

Como a condição inicial  $y(1) = 2$ , então,  $c = 1$ , e, portanto, a solução será

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Veja na figura 1.9 que a solução que passa pelo ponto  $(1, 2)$  é descontínua em  $x = 0$  e, portanto, temos uma solução contínua apenas para  $x > 0$ . Se impuséssemos a condição inicial  $y(1) = 1$ , a solução do problema seria  $y = x^2$ , contínua em todo  $x \in \mathbb{R}$ .

A existência de soluções de equações diferenciais de 1ª ordem linear ou separável, bem como a unicidade de tais soluções, é tratada na próxima seção.

## 1.4 Existência e Unicidade de soluções

Até agora, só apresentamos dois métodos para encontrar a solução de uma equação diferencial de 1ª ordem do tipo separável ou linear. Vimos que quando uma condição inicial é dada encontramos apenas uma solução. A pergunta que não quer calar é:

*Será que não encontraríamos outras soluções se tivéssemos outros métodos de resolução para aplicar? Isto é, a solução é única?*

Ou ainda, antes mesmo de começar a perder um bocadinho de tempo tentando encontrar uma solução:

A solução desta equação existe?

Para equações lineares, a resposta a essas duas perguntas é dada pelo teorema:

**Teorema 1.1** Dado o problema com condição inicial:

$$\begin{cases} y' + py = q \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

se as funções  $p = p(x)$  e  $q = q(x)$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ , contendo o ponto  $x_0$ , então existe uma única função  $y = f(x)$ ,  $x \in I$  que satisfaz o problema de valor inicial 1.11.

Note que o teorema garante a existência e a unicidade de uma solução apenas no intervalo onde as funções  $p$  e  $q$  são contínuas. No exemplo 1.6 a função  $p = \frac{2}{x}$  não é contínua no ponto  $x = 0$ , porém, dependendo da condição inicial, existem soluções que são contínuas no ponto  $x = 0$ .

Para equações não-lineares, temos um teorema mais geral:

**Teorema 1.2** Se  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em um retângulo  $R = \{(t, y); |t| < a, |y| < b\}$ , então existe algum intervalo  $I = \{t; |t| < c < a\}$ , no qual existe uma única solução  $y = h(t)$  do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

com  $|y_0| < b$  e  $|t_0| < c$ .

## 1.5 Aplicações

### 1.5.1 Crescimento e Decaimento Exponencial

#### 1. Decaimento Radioativo

O isótopo radioativo tório desintegra-se numa taxa proporcional à quantidade presente. Se 100 gramas deste material são reduzidos a 80 gramas em uma semana, ache uma expressão para a quantidade de tório em qualquer tempo.

Calcule, também, o intervalo de tempo necessário para a massa decair à metade de seu valor original, chamado de meia vida.

*Solução:* Seja  $Q(t)$  a quantidade de tório em um instante  $t$  (dias). Como o tório desintegra-se numa taxa proporcional à quantidade presente, tem-se:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

onde  $k < 0$ , pois  $Q(t)$  é decrescente. Como já vimos, a solução desta equação diferencial pode ser encontrada através do método de separação de variáveis ou pelo fator integrante, cuja solução é:

$$Q(t) = ce^{kt}$$

Como a condição inicial  $Q(0) = 100$ , então,

$$Q(t) = 100e^{kt}$$

Para calcular o valor da constante  $k$ , usamos o fato de que o isótopo é reduzido a 80 g em 7 dias, isto é,

$$Q(7) = 100e^{7k} = 80 \Rightarrow k = \frac{1}{7} \ln 0,8 = -0.031$$

Para calcular a meia vida  $L$  do tório, tem-se

$$Q(L) = \frac{1}{2}Q(0) \Rightarrow 100e^{-0.031L} = 50 \Rightarrow L = \frac{\ln 2}{0.031} = 21,74 \text{ dias}$$

## 2. Crescimento Populacional

Uma cultura de bactérias, com uma quantidade inicial  $Q_0$  bactérias, cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Ao fim de 20 minutos cresceu 5%.

- (a) Determine a quantidade de bactéria em qualquer tempo  $t$ .  
 (b) Quanto tempo levará a cultura para duplicar?

*Solução:* (a) Seja  $Q(t)$  a quantidade presente de bactérias no instante  $t$ . Como a taxa de crescimento de bactérias é proporcional à quantidade presente, tem-se

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \implies Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

Como  $Q(20) = 1,05 Q_0 \implies Q_0 e^{20k} = 1,05 Q_0 \implies k = \frac{1}{20} \ln 1,05 = 0,00243$  Portanto,

$$Q(t) = Q_0 e^{0,00243t}$$

(b) Vamos agora determinar para qual valor de  $t$  tem-se  $Q(t) = 2Q_0$ .

$$Q_0 e^{0,00243t} = 2Q_0 \implies t = 284,13 \text{ minutos.}$$

## 3. Misturas

Considere um tanque contendo, inicialmente, 100 litros de salmora com 10 kg de sal. Suponha que uma torneira despeje mais salmora no tanque numa taxa de  $3 \text{ l/min}$ , com  $1/4 \text{ kg}$  de sal por litro e que a solução bem misturada esteja saindo por um orifício no fundo do tanque na mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.

*Solução:* Seja  $Q(t)$  a quantidade de sal no tanque em qualquer instante  $t$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \text{taxa de variação da quantidade de sal no tanque em relação ao tempo } t \\ &= \text{taxa } \frac{\text{quantidade de sal que entra} - \text{quantidade de sal que sai}}{\text{relação ao tempo}} \\ &= \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída da quantidade de sal} \\ &= \frac{1 \text{ kg}}{4 \text{ l}} 3 \frac{\text{l}}{\text{min}} - \frac{Q(t) \text{ kg}}{100 \text{ l}} 3 \frac{\text{l}}{\text{min}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{100} Q \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{3}{100} Q = \frac{3}{4} \implies Q(t) = 25 + ce^{-0,03t}$$

Como  $Q(0) = 10$ , então,  $c = -15$  e, portanto,

$$Q(t) = 25 - 15e^{-0,03t}$$

Note que quando  $t \rightarrow \infty$  a quantidade de sal tende a 25 kg que é o valor esperado, pois entra  $1/4 \text{ kg}$  de sal por litro e o tanque se mantém com 100 litros.

## 4. Aplicações à Física

- (a) Um paraquedista salta de um balão parado e cai livremente durante 30 segundos. Durante este tempo a resistência do ar é desprezada. Quando seu paraquedas abre a resistência do ar é proporcional à sua velocidade. Encontre a velocidade do paraquedista a partir do instante em que o paraquedas abriu.

*Solução:* Suponha que o avião tenha massa  $m$ . Então, antes do paraquedas abrir temos:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \implies v = gt + c,$$

onde  $g$  é a constante gravitacional. Como a velocidade inicial  $v(0) = 0$ , então,  $v = gt$  e, assim,  $v(30) = 30g$ , que é a condição inicial do problema quando o paraquedas abre. Neste caso, como as forças atuantes são o peso do paraquedista,  $mg$  e força de resistência,  $kv$ , tem-se,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Observe que a resistência do ar,  $kv$ , tem sinal negativo, pois esta sempre reduz a velocidade. Resolvendo-se esta equação utilizando o fator integrante  $u = e^{\frac{k}{m}t}$ , obtém-se

$$v(t) = \frac{m}{k}g + ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Com a condição inicial  $v(0) = 30g$ , obtém-se

$$v(t) = \frac{m}{k}g + (30g - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

Observe que quando  $t \rightarrow +\infty \Rightarrow v(t) \rightarrow \frac{mg}{k}$ , que é chamada de velocidade limite.

- (b) Um torpedo de massa  $m = 1$  é lançado horizontalmente, debaixo d'água, com velocidade inicial  $v_0$  m/s. A resistência da água é proporcional à velocidade do torpedo ao quadrado com constante de proporcionalidade  $k = 10^{-3}$ . Se o torpedo deve atingir o alvo com pelo menos metade de sua velocidade inicial para causar danos, qual é a distância máxima a qual o tiro ainda produzirá efeito?

*Solução:* Como a única força atuante é a resistência da água, tem-se a equação:

$$\frac{dv}{dt} = -10^{-3}v^2$$

que resolvendo-se por separação de variáveis obtém-se:

$$\int \frac{1}{v^2} dv = \int -10^{-3} dt \implies v = \frac{1}{10^{-3}t + c}$$

Como sua velocidade inicial  $v(0) = v_0$ , então,  $c = \frac{1}{v_0}$ , e, portanto, sua velocidade é

$$v(t) = \frac{v_0}{10^{-3}v_0t + 1}$$

Assim, supondo que sua posição inicial é dada por  $x(0) = 0$ , sua posição em cada instante é dada por

$$x(t) = 10^3 \ln(10^{-3}v_0t + 1)$$

Agora, para calcular a distância máxima para o tiro ter efeito, devemos calcular o tempo que o alvo é atingido com metade de sua velocidade inicial, isto é, para que valor de  $t$  tem-se  $v(t) = \frac{v_0}{2}$ .

$$\frac{v_0}{10^{-3}v_0t + 1} = \frac{v_0}{2} \implies 10^{-3}v_0t + 1 = 2 \implies t = \frac{10^3}{v_0}$$

Calculando-se a distância com esse tempo, obtém-se:

$$x \left( \frac{10^3}{v_0} \right) = 10^3 \ln(2) = 693,14 \text{ metros}$$

## 1.6 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a)  $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

(b)  $\frac{dy}{dx} = 2xy$

(c)  $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$

(d)  $xy' = 2\sqrt{y-1}$

(e)  $x \ln y \frac{dy}{dx} = y$

(f)  $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$  e  $y(0) = 1$

(g)  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y}$  e  $y(0) = 1$

(h)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

(i)  $y' + 3y = x + e^{-2x}$

(j)  $y' + x^2y = x^2$

(k)  $y' - 3y = \text{sen}2x$

(l)  $y' + 2y = xe^{-2x}$  e  $y(1) = 0$

(m)  $xy' + 2y = 4x^2$  e  $y(1) = 2$

(n)  $\frac{dy}{dx} + 2 \frac{\cos x}{\text{sen}x} y = \text{sen}x$

(o)  $y' + y = x^2y^2$

(Respostas)

2. Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade de bactérias presentes em cada instante. Ao fim de 10 minutos cresceu 3%.

(a) Determine a constante de proporcionalidade.

(b) Quanto tempo levará a cultura para duplicar?

(Resposta)

3. Certa substância radioativa decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Observe-se que após 1 hora houve uma redução de 10% da quantidade inicial da substância, determine a meia-vida da substância. (Resposta)
4. Devido a uma maldição rogada por uma tribo vizinha, os membros de uma aldeia são gradualmente impelidos ao assassinato ou ao suicídio. A taxa de variação da população é  $-2\sqrt{p}$  pessoas por mês, quando o número de pessoas é  $p$ . Quando a maldição foi rogada, a população era de 1600. Quando morrerá toda a população da aldeia? (Resposta)
5. Um tanque com 50 litros de capacidade contém inicialmente 10 litros de água. Adiciona-se ao tanque uma solução de salmoura com 1 kg de sal por litro, à razão de 4 litros por minuto, enquanto a mistura escoar à razão de 2 litros por minuto. Determine:
- (a) O tempo necessário para que ocorra o transbordamento.
  - (b) A quantidade de sal presente no tanque por ocasião do transbordamento. (Resposta)
6. Um tanque com capacidade de 900 litros contém inicialmente 100 litros de água pura. Entra água com 4 gramas de sal por litro numa taxa de 8 litros por minuto e a mistura escoar numa taxa de 4 litros por minuto. Determine a quantidade de sal no tanque quando a solução está para transbordar. (Resposta)
7. Certa indústria lança seus dejetos químicos em um rio que desagua num lago. Os dejetos causam irritação na pele quando sua concentração é superior ou igual a 20 partes por milhão (ppm). Pressionada pelos ecologistas do Green Peace, faz 30 dias que a fábrica parou de lançar dejetos, cuja concentração no lago foi estimada em 120 ppm. Hoje, verificou-se que a concentração de dejetos no lago é de 60 ppm. Supondo-se que a taxa de variação da concentração de dejetos no lago é proporcional à concentração presente no lago em cada instante, quanto tempo ainda levará para se poder nadar sem o perigo de sofrer irritação na pele? (Resposta)
8. Um veículo de massa  $m = 1$ , partindo do repouso é impulsionado por uma força constante  $F$ . O meio oferece uma resistência ao deslocamento proporcional à velocidade, onde a constante de proporcionalidade é  $k = 3$ . Quanto valerá  $F$  de modo que a velocidade limite seja 10? Em que instante o veículo atinge a velocidade 5? (Resposta)
9. A força devida à resistência do ar que atua num veículo de massa  $m$  é  $kv$ , onde  $k$  é constante e  $v$  é a velocidade. Qual a força constante que o motor do veículo deve transmitir a ele para que a velocidade máxima seja  $v_1$ ? Se o veículo parte do repouso, qual o tempo que o veículo atinge a metade da velocidade máxima? (Resposta)
10. Uma bala de massa  $m = 0,01$  kg introduz-se em uma tábua de 0,10 m de espessura, com velocidade de 200 m/s. Ela sofre uma resistência da tábua ao seu movimento proporcional ao quadrado de sua velocidade, com constante de proporcionalidade  $k$ . Determine  $k$  e o tempo que a bala leva para perfurar a tábua, sabendo-se que sai com velocidade de 80 m/s. Despreze a força da gravidade. (Resposta)
11. Um navio de massa  $m$  se move em direção ao cais com velocidade de  $12km/h$ . Seu motor é desligado a uma distância de  $3km$  do cais. Considerando que a resistência da água é proporcional à velocidade com constante de proporcionalidade  $k = 6m$ :
- (a) Determine a velocidade do navio 1 hora após o motor ser desligado.
  - (b) O navio atingirá o cais? Justifique. (Respostas)

12. Um barco a vela em repouso de massa  $m = 1$ , é posto em movimento impulsionado pela força do vento que é proporcional à diferença de velocidade do vento  $V$   $km/h$  e do barco,  $v$   $km/h$ , sendo  $k = \frac{2}{3}$  a constante de proporcionalidade.

A água oferece uma resistência ao movimento proporcional à velocidade do barco com constante de proporcionalidade  $r = \frac{1}{3}$

Qual deve ser a velocidade constante  $V$  do vento, para que o barco atinja a velocidade máxima limite de  $50$   $km/h$ ? (Resposta)

13. Em uma comunidade de  $100$  pessoas, inicialmente, existe  $1$  pessoa infectada com um vírus. A velocidade de propagação do vírus é proporcional a  $k$  vezes o número de pessoas infectadas vezes o número de pessoas não infectadas. Após  $1$  dia,  $\frac{1}{4}$  da comunidade está contaminada.

(a) Após  $2$  dias, quantas pessoas estarão contaminadas?

(b) Se  $p(t)$  é o número de pessoas contaminadas no instante  $t$ , determine  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ .

(c) Desenhe o gráfico de  $p(t)$ . (Respostas)

# Capítulo 2

## EDO de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

### 2.1 Introdução - O Problema Carro-Mola



Considere um carro de massa  $m$  preso a uma parede por uma mola e imerso em um fluido. Coloque o carro em movimento puxando-o  $x_0$  metros de sua posição de equilíbrio e soltando-o. Pela lei de Hooke, a mola exerce uma força  $F_m$  sobre o carro proporcional à sua distensão, com coeficiente de proporcionalidade  $k$  e tende a restaurar o carro à sua posição inicial. Vamos supor que o meio viscoso oferece uma força  $F_v$  de resistência ao movimento proporcional à sua velocidade com constante de proporcionalidade  $c$  e, portanto, tem sempre sinal oposto ao movimento. Seja  $x = x(t)$  a posição do carro em um instante  $t$  e  $v = v(t)$  sua velocidade. Uma vez iniciado o movimento, as forças atuantes no carro,  $F_m$  e  $F_v$ , tem sinais contrários. Coloquemos um referencial conforme a figura 2.1.

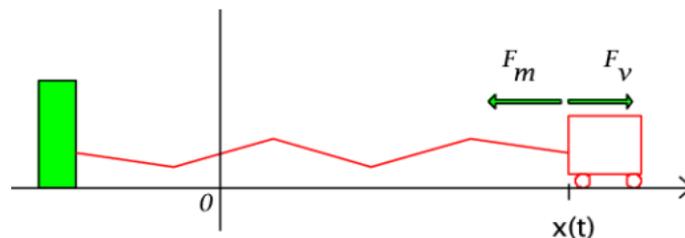


Figura 2.1: Carro-mola

Vamos supor que, por um instante, o carro está à direita do ponto de equilíbrio. Neste caso, a força  $F_m$  assume o sinal negativo e a força  $F_v$  o sinal positivo. Acontece que, como o carro está se movimentando para a esquerda, a distância  $x(t)$  da posição de equilíbrio está diminuindo, isto é,  $x(t)$  está decrescendo e, portanto, sua derivada  $x'(t)$  é uma função negativa, ou seja, sua velocidade é negativa. Como  $F_v$  é positiva, então  $F_v = -cx'(t)$ . Logo, pela 2ª lei de Newton, a soma das forças atuantes no sistema carro-mola, nos dá

$$F = ma = F_m + F_v \iff mx''(t) = -kx(t) - cx'(t)$$

ou seja, temos uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0 \tag{2.1}$$

Vamos resolver este problema considerando  $m = 1$ ,  $c = 5$  e  $k = 6$ . A idéia é reduzir esta equação de 2ª ordem a duas de primeira.

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x &= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dx}{dt} + 3.2x \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} + 2x \right) + 3 \left( \frac{dx}{dt} + 2x \right) \end{aligned}$$

Chamando  $\frac{dx}{dt} + 2x = y$ , tem-se,

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 0 \Rightarrow y = ce^{-3t}$$

Logo,  $\frac{dx}{dt} + 2x = ce^{-3t} \Rightarrow (e^{2t}x)' = ce^{-t}$ , assim,

$$e^{2t}x = \int ce^{-t} dt = -ce^{-t} + c_1$$

Logo, a solução geral da equação é

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}$$

No caso de uma equação diferencial de segunda ordem, para encontrar as constantes  $c_1$  e  $c_2$ , temos que ter duas condições iniciais. Assim, supondo que as condições iniciais do problema, posição e velocidade, são

$$x(0) = 5 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0$$

e calculando derivada de  $x(t)$ ,

$$x'(t) = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$$

temos que resolver o sistema  $\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 5 \\ x'(0) = -2c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases}$

obtendo a solução

$$x(t) = 15e^{-2t} - 10e^{-3t}$$

Para saber qual é o movimento do carro em qualquer instante, fazemos um gráfico de sua solução: figura 2.2. Observando o gráfico, vemos que o carro sai de sua posição inicial  $x(0) = 5$  com velocidade  $x'(0) = 0$  e tende para sua posição de equilíbrio.

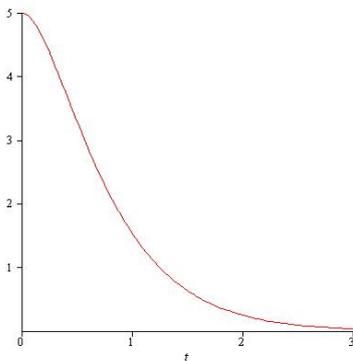


Figura 2.2: Solução do problema carro-mola super-amortecido

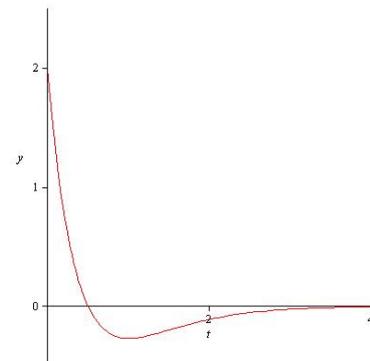


Figura 2.3: Carro-mola com movimento sub-amortecido

**Exemplo 2.1 (Movimento sub-amortecido)** Considere o problema carro-mola com  $m = 1$ ,  $c = 4$  e  $k = 4$ . Tem-se a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad (2.2)$$

Como no exemplo anterior, vamos reduzir esta equação de segunda ordem a duas de primeira:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x &= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dx}{dt} + 4x \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} + 2x \right) + 2 \left( \frac{dx}{dt} + 2x \right) \\ &= \frac{dy}{dt} + 2y \end{aligned}$$

onde  $y = \frac{dx}{dt} + 2x$ . A solução da equação de primeira ordem  $\frac{dy}{dt} + 2y = 0$  é  $y = ce^{-2t}$ . Assim,

$$\frac{dx}{dt} + 2x = ce^{-2t} \Rightarrow (xe^{2t})' = ce^{-2t}e^{2t} = c \Rightarrow xe^{2t} = \int c dt = ct + c_1 \Rightarrow x = (c_1 + ct)e^{-2t}$$

Considerando as condições iniciais:  $x(0) = 2$  e  $x'(0) = -5$ , obtém-se

$$x(t) = (2 - t)e^{-2t}$$

Apesar de encontrarmos a solução da equação, a descrição do movimento do carro-mola nos é dada por uma análise do gráfico de sua equação dado na figura 2.3.

Como vimos nos dois exemplos anteriores, a dificuldade de resolver uma equação diferencial de segunda ordem ao reduzi-la para duas de primeira ordem está na decomposição da equação de segunda ordem. Uma maneira de contornar este problema é mudar a notação de derivada e observar que o ato de derivar uma função nada mais é que uma operação que leva uma função à sua derivada, isto é, derivar uma função é uma operação que leva uma função  $f$  à sua derivada  $f'$  ou  $\frac{df}{dt}$ . Chamamos esta função

$$D : f \mapsto Df = \frac{df}{dt} = f'$$

de **operador diferencial linear**. A operação de derivar duas vezes é denotada por

$$D^2f = D(Df) = f''$$

Lembrando que as operações de soma de duas funções  $g$  e  $h$  e a multiplicação por escalar são definidas por

$$(g + h)(x) = g(x) + h(x) \quad \text{e} \quad (kg)(x) = kg(x)$$

e que o operador  $D$  é uma função, tem-se então que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + cx = mD^2x + kDx + cx = (mD^2 + kD + c)x = 0 \quad (2.3)$$

Esta última igualdade nos faz lembrar do polinômio  $p(r) = mr^2 + kr + c$ , o qual chamaremos de polinômio característico da equação diferencial acima. Resolvendo a, assim chamada, equação característica  $mr^2 + kr + c = 0 \Leftrightarrow r^2 + \frac{k}{m}r + \frac{c}{m} = 0$ , encontramos suas raízes  $r_1$  e  $r_2$ . Logo,

$$p(r) = r^2 + \frac{k}{m}r + \frac{c}{m} = (r - r_1)(r - r_2)$$

Transpondo para a equação diferencial 2.3, vemos que podemos reescrevê-la assim:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + c \frac{dx}{dt} = mD^2x + kDx + cx = (mD^2 + kD + c)x = (D - r_1)(D - r_2)x = 0 \quad (2.4)$$

Agora, basta chamar  $(D - r_2)x = y$  e resolver a equação diferencial de primeira ordem  $(D - r_1)y = y' - r_1y = 0$ . Sua solução, como já vimos é  $y = ce^{r_1t}$ . Logo,

$$(D - r_2)x = y = ce^{r_1t} \Leftrightarrow x' - r_2x = ce^{r_1t}$$

Esta equação de primeira ordem tem solução

$$x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$$

Isto quando as raízes do polinômio característico forem reais e  $r_1 \neq r_2$ .

Quando as raízes forem reais e iguais, isto é,  $r_1 = r_2 = r_0$ , a decomposição do polinômio característico é a mesma, ou seja,  $p(r) = (r - r_0)(r - r_0)$ , e a equação diferencial fica

$$(D - r_0)(D - r_0)x = 0$$

A resolução final segue a da anterior chamando  $(D - r_0)x = y$ .

Vejam que qualquer que seja o caso de raízes reais, distintas ou iguais, o método de resolução acima nos leva às soluções gerais:

$$x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}, \quad r_1 \neq r_2 \quad (2.5)$$

$$x(t) = (c_1 + c_2t)e^{rt}, \quad r_1 = r_2 = r \quad (2.6)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes reais quaisquer. Caso o polinômio característico tenha raízes complexas, o mesmo método de resolução acima nos leva no mesmo tipo de solução de raízes reais, como veremos no próximo exemplo.

**Exemplo 2.2 (Movimento Oscilatório Amortecido)** *Considere, agora, o problema carro-mola com as constantes tomando valores  $m = 1$ ,  $k = 2$  e  $c = 2$ . Assim,*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0 \Leftrightarrow (D^2 + 2D + 2)x = 0$$

A equação característica  $r^2 + 2r + 2 = 0$  tem raízes complexas  $r_1 = -1 + i$  e  $r_2 = -1 - i$ . Assim,  $r^2 + 2r + 2 = (r - (-1 + i))(r - (-1 - i)) = 0$  e nossa equação diferencial fica assim decomposta:

$$(D - (-1 + i))(D - (-1 - i))x = 0$$

Como fizemos no exemplo anterior, chame  $(D - (-1 - i))x = y$ . Então,  $(D - (-1 + i))y = 0 \Rightarrow y' - (-1 + i)y = 0$ .

Temos aí uma equação diferencial de primeira ordem com um coeficiente complexo. Se usarmos o fator integrante para resolvê-la, teremos

$$u = e^{\int (-1+i) dt}$$

e o que significa isto? Integral de um número complexo e, conseqüentemente, uma função exponencial com expoente complexo. Precisamos, então, entender seus significados.

## 2.2 Um pequeno resumo de funções complexas

Vamos entender primeiro o que é uma função complexa. Vamos denotar por  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos. Chamamos de função complexa de variável real uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , isto é, o domínio da função  $f$  é um subconjunto de números reais e a imagem está contida em  $\mathbb{C}$ . Exemplos:

**Exemplo 2.3 (a)**  $f(t) = 1 + t^2 + i(3t - 2)$

**(b)**  $f(t) = \text{sen}(5t) + i \cos(5t)$

**(c)**  $f(t) = e^{3t}(\cos(2t) + i \text{sen}(2t))$

Veja que uma função complexa de variável real  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , pode ser escrita como sendo:

$f(t) = u(t) + iv(t)$ , onde  $u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $v : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais de variável real chamadas de parte real e imaginária de  $f$ , respectivamente.

**Derivada de uma função complexa:** A derivada de uma função complexa  $f(t) = u(t) + iv(t)$  é definida como sendo a derivada das partes real e imaginária, i.e.,

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t)$$

**Integral de uma função complexa:** A integral de uma função complexa  $f(t) = u(t) + iv(t)$  é definida como sendo a integral das partes real e imaginária, i.e.,

$$\int f(t) dt = \int u(t) dt + i \int v(t) dt$$

**Exemplo 2.4**  $\int 1 + t^2 + i(3t - 2) dt = \int (1 + t^2) dt + i \int (3t - 2) dt = t + \frac{t^3}{3} + i(\frac{3}{2}t^2 - 2t)$

**Exponencial complexa:** Definimos a função exponencial complexa

$$f(t) = e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i \text{sen } bt)$$

Observe que se  $a = 0$  e  $b = 1$ , temos a chamada fórmula de Euler

$$e^{it} = \cos t + i \text{sen } t$$

Utilizando as definições dadas acima é fácil de mostrar que as regras usuais de exponenciação são válidas para função exponencial complexa e que se  $z = a + bi$ , então,

$$\frac{d(e^{zt})}{dt} = ze^{zt} \tag{2.7}$$

$$\int e^{zt} dt = \frac{1}{z} e^{zt} + c \tag{2.8}$$

• Voltando ao exemplo 2.2 do movimento oscilatório amortecido, podemos, agora, resolver a equação diferencial

$$y' - (-1 + i)y = 0.$$

Seu fator integrante é  $u = e^{\int (-1+i)t dt} = e^{\int (-1+i)t}$ , logo,  $y = ce^{(-1+i)t}$ .

Assim, resolvendo-se, agora, a equação

$$x' + (1 + i)x = ce^{(-1+i)t},$$

obtém-se a solução geral

$$\begin{aligned}
 x(t) &= c_1 e^{(-1+i)t} + c_2 e^{(-1-i)t} \\
 &= e^{-t}(c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}) \\
 &= e^{-t}(c_1(\cos t + i \operatorname{sen} t) + c_2(\cos t + i \operatorname{sen} t)) \\
 &= e^{-t}((c_1 + c_2) \cos t + i(c_1 - c_2) \operatorname{sen} t) \\
 &= e^{-t}(c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t)
 \end{aligned}$$

onde  $c_3 = c_1 + c_2$  e  $c_4 = i(c_1 - c_2)$ . Se considerarmos as condições iniciais  $x(0) = 2$  e  $x'(0) = 0$ , obtém-se  $c_3 = c_4 = 2$  e a solução particular

$$x(t) = 2e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) \quad (2.9)$$

Como nos casos anteriores do problema carro-mola, para se fazer uma análise do tipo de movimento com as condições iniciais dadas acima, temos que analisar o gráfico da solução 2.9. Evidentemente, quando se tem um programa computacional algébrico como o Maple, traça-se o gráfico rapidamente. Quando não, a melhor maneira de se fazer um esboço do gráfico é transformar a soma  $c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t$  em  $\cos(t - \phi)$ , muito mais fácil de se traçar um gráfico sem ajuda do computador. Para isso, observe que  $\cos(t - \phi) = \cos t \cos \phi + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \phi$  e como os valores de  $c_3$  e  $c_4$  podem ser em valor absoluto maiores que 1. Portanto, para transformar a expressão  $c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t$  em  $\cos(t - \phi)$  devemos multiplicá-la por número, tal que seja possível comparar as duas expressões. Vamos chamar tal número de  $r$ . Então,

$$\cos(t - \phi) = \cos t \cos \phi + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \phi = rc_3 \cos t + rc_4 \operatorname{sen} t$$

Para se verificar tal igualdade,

$$\cos \phi = rc_3 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \phi = rc_4$$

Assim, como  $\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi = 1$ , obtém-se  $r = \frac{1}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}$

Para a solução 2.9,  $r = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$  e assim  $\phi = \frac{\pi}{4}$ . Logo,

$$x(t) = \sqrt{8}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Portanto, o gráfico de  $x(t)$  (figura 2.4) é o gráfico do cosseno deslocado de  $\frac{\pi}{4}$  unidades para a direita, limitado acima pelo gráfico de  $\sqrt{8}e^{-t}$  e abaixo pelo gráfico de  $-\sqrt{8}e^{-t}$ , pois nos pontos  $t$  onde  $\cos(t - \frac{\pi}{4}) = 1$  e  $\cos(t - \frac{\pi}{4}) = -1$ , os valores assumidos por  $x(t)$  são os das funções  $\sqrt{8}e^{-t}$  e  $-\sqrt{8}e^{-t}$ , respectivamente.

**Exemplo 2.5 (Movimento oscilatório livre)** Considere o problema carro-mola com  $m = 1$ ,  $c = 0$  e  $k = 1$  e condições iniciais  $x(0) = 2$  e  $x'(0) = 2$ . Neste caso, tem-se a equação diferencial

$$x'' + x = 0$$

cuja solução é  $x(t) = 2 \cos t + 2 \operatorname{sen} t = \sqrt{8} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$  e cujo gráfico é mostrado na figura 2.5

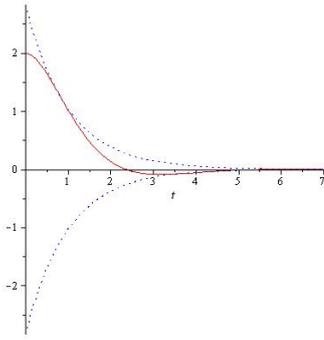


Figura 2.4: Movimento oscilatório amortecido

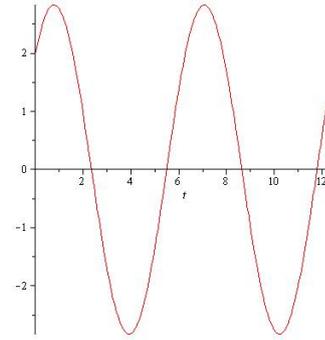


Figura 2.5: Movimento livre

**Resumo:**

Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$x''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0 \quad (2.10)$$

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  raízes da equação característica  $r^2 + cr + k = 0$ . Então, se

(a)  $r_1 \neq r_2$ , reais, a solução da equação 2.10 será:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (2.11)$$

(b)  $r_1 = r_2 = r$ , real, a solução da equação 2.10 será:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt} \quad (2.12)$$

(c)  $r_1 = a + bi$  e  $r_2 = a - bi$ , complexos, a solução da equação 2.10 será:

$$x(t) = e^{at} (c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt) \quad (2.13)$$

A técnica utilizada para encontrar as soluções de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes pode ser aplicada para equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes de grau mais alto, bastando para isto, encontrar as raízes do polinômio característico.

## 2.3 O problema carro-mola com movimento forçado

Considere o problema carro-mola com uma força externa  $g(t)$  agindo sobre o carro. A equação diferencial que modela este problema é, então:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = g(t) \quad (2.14)$$

Para exemplificar, considere  $m = 1$ ,  $c = 5$ ,  $k = 6$  e  $g(t) = 4t$ . O método de resolução é o mesmo do caso homogêneo. A equação característica  $r^2 + 5r + 6 = 0$  tem raízes  $r_1 = -2$  e  $r_2 = -3$  o que nos dá a decomposição

$$(D + 2)(D + 3)x = 4t \quad (2.15)$$

Chamando  $(D + 3)x = y$ , a equação 2.15 fica  $(D + 2)y = 4t$ , ou seja, temos que resolver a equação diferencial de 1ª ordem  $y' + 2y = 4t$ . Multiplicando-se esta equação pelo fator integrante  $u = e^{2t}$  e integrando ambos os lados, obtém-se:

$$(ye^{2t})' = 4te^{2t} \Rightarrow ye^{2t} = 4 \int te^{2t} dt \Rightarrow y = (2t - 1) + c_1e^{-2t}$$

Como  $x' + 3x = y$ , temos que resolver outra equação diferencial de primeira ordem  $x' + 3x = (2t - 1) + c_1e^{-2t}$ . Novamente, multiplicando-se ambos os lados desta equação pelo fator integrante  $u = e^{3t}$  e integrando obtém-se a solução da equação 2.14:

$$x(t) = \frac{2}{3}t - \frac{5}{9} + c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}$$

Observe que, como  $c_1$  e  $c_2$  são constantes quaisquer, se tomarmos  $c_1 = c_2 = 0$ ,  $x(t) = \frac{2}{3}t - \frac{5}{9}$  é uma solução particular da equação 2.14. Portanto, este método nos mostra que a solução geral da equação diferencial 2.14 pode ser decomposta assim:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

onde  $x_p(t)$  é uma solução particular de 2.14 e  $x_h(t)$  é a solução da equação homogênea associada  $mx'' + cx' + kx = 0$ .

Para encontrar as constantes  $c_1$  e  $c_2$  basta saber as condições iniciais. Vamos supor que as condições iniciais dadas são:

$$x(0) = 1 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0$$

Como  $x'(t) = \frac{2}{3} - 2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$ , então,  $x'(0) = \frac{2}{3} - 2c_1 + c_2$ . Assim, utilizando as condições iniciais, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} -\frac{5}{9} + c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{2}{3} - 2c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases}$$

obtendo  $c_1 = 4$  e  $c_2 = -\frac{22}{9}$ . Assim, temos a solução

$$x(t) = \frac{2}{3}t - \frac{5}{9} + 4e^{-2t} - \frac{22}{9}e^{-3t}$$

Encontrar a solução geral da equação

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$$

chamada de equação homogênea associada à equação 2.14 é um passo muito fácil, como já vimos. O problema, então, se resume em determinar uma solução particular sem que tenhamos que calcular integrais, o que freqüentemente o fazemos com erros. A seção a seguir apresenta um método para encontrar tal solução, chamado *método dos coeficientes a determinar*.

## 2.4 Método dos Coeficientes a Determinar

O método a seguir é bem simples, porém se aplica somente às equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = g(t) \tag{2.16}$$

onde  $g(t) = P_n(t)e^{\alpha t} \begin{cases} \cos(\beta t) \\ \text{sen}(\beta t) \end{cases}$  e  $P_n(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ .

O método dos coeficientes a determinar se baseia no fato de que as derivadas de somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais, senos e cossenos são ainda somas e produtos destas funções.

A idéia central deste método é, então, partir de uma conjectura, ou um “chute” bem dado, sobre a forma de  $x_p$ . Baseado no tipo de função que é  $g(t)$  e observando que a combinação linear  $ax_p'' + bx_p' + cx_p$  tem que ser igual a  $g(t)$ , parece razoável supor, então, que a solução particular  $x_p$  tenha a mesma forma geral de  $g(t)$ .

Daremos alguns exemplos para ilustrar o método.

**Exemplo 2.6** *Encontre a solução geral da equação*

$$x'' + x' - 2x = 4t^2 \quad (2.17)$$

A equação característica  $r^2 + r - 2 = 0$  da equação diferencial 2.17 tem raízes  $r_1 = 1$  e  $r_2 = -2$ . Portanto a solução da homogênea associada é  $x_h = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$ . Resta-nos encontrar, agora, uma solução particular  $x_p(t)$ .

Procuramos, então, uma função  $x_p(t)$ , tal que,  $x_p'' + x_p' - 2x_p$  seja igual a  $4t^2$ . Evidentemente, quando fazemos tal comparação, a tal função  $x_p$  que procuramos só pode ser um polinômio de grau 2, pois ela contém o termo  $-2x_p$ . Assim

$$x_p(t) = at^2 + bt + c \Rightarrow x_p'(t) = 2at + b \Rightarrow x_p''(t) = 2a$$

Substituindo na equação 2.17, obtém-se

$$2a + 2at + b - 2(at^2 + bt + c) = 4t^2 \Leftrightarrow 2a + b - 2c + (2a - 2b)t - 2at^2 = 4t^2$$

Comparando os dois polinômios da equação à direita, acima, tem-se o sistema linear de equações:

$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ 2a - 2b = 0 \\ -2a = 4 \end{cases}$$

cuja solução é  $a = b = -2$  e  $c = -3$ . Portanto,

$$x_p(t) = -2(t^2 + t) - 3$$

Logo a solução geral é  $x(t) = -2(t^2 + t) - 3 + c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$

**Exemplo 2.7** *Encontre a solução geral da equação*

$$x'' + x' = 4t^2 \quad (2.18)$$

A equação característica  $r^2 + r = 0$  da equação 2.18 tem raízes  $r_1 = 0$  e  $r_2 = -1$ . Assim, a solução geral de 2.18 é  $x_h = c_1 + c_2 e^{-t}$

Agora, a solução particular  $x_p$  é uma função, tal que,  $x_p'' + x_p'$  seja igual a  $4t^2$ . É claro que  $x_p$  só pode ser um polinômio. Como estamos comparando o lado esquerdo da equação com um polinômio de grau 2, se tomarmos  $x_p = at^2 + bt + c$  o lado esquerdo será um polinômio de grau 1, pois ele não aparece na soma. Assim, temos que aumentar o grau de  $x_p$  para 3, pois a derivada será de grau 2. Tomamos, então,  $x_p = at^3 + bt^2 + ct$  sem termo constante, pois o termo constante é solução da homogênea associada e quando substituirmos  $x_p$  na equação ele desaparecerá ficando, assim, impossível calculá-lo.

Substituindo  $x_p$  na equação, tem-se

$$6at + 2b + 3at^2 + 2bt + c = 4t^2$$

Comparando-se os dois polinômios acima obtém-se o sistema linear

$$\begin{cases} 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a = 4 \end{cases}$$

cuja solução é  $a = \frac{4}{3}$ ,  $b = -4$ ,  $c = 8$ . Logo, a solução geral será

$$x_p(t) = 8t - 4t^2 + \frac{4}{3}t^3 + c_1 + c_2e^{-t}$$

**Exemplo 2.8** *Encontre a solução geral da equação*

$$x'' + x' - 2x = e^{3t} \quad (2.19)$$

A solução geral da equação homogênea associada a 2.19 foi encontrada no exemplo 2.6. Assim, temos que encontrar uma solução particular  $x_p$  da equação 2.19, tal que,  $x_p'' + x_p' - 2x_p$  seja igual a  $e^{3t}$ . É razoável conjecturar que  $x_p$ , neste caso, só pode ser uma função exponencial do mesmo tipo, ou seja,  $x_p = ae^{3t}$ . Substituindo na equação 2.19

$$9ae^{3t} + 3ae^{3t} - 2ae^{3t} = e^{3t}$$

encontramos  $a = \frac{1}{10}$ . Logo,

$$x(t) = \frac{1}{10}e^{3t} + c_1e^t + c_2e^{-2t}$$

**Exemplo 2.9** *Encontre a solução geral da equação*

$$x'' + x' - 2x = e^{-2t} \quad (2.20)$$

Supondo, como no exemplo anterior, que a solução  $x_p = ae^{-2t}$  e substituindo em 2.20, obtém-se

$$4ae^{-2t} - 2ae^{-2t} - 2ae^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow 0 = e^{-2t}$$

Portanto, fica impossível determinar o valor de  $a$ . O que difere este exemplo do anterior é o expoente da função exponencial. Observe que o termo  $e^{-2t}$  aparece na solução da homogênea associada. Assim, o chute inicial  $x_p = ae^{-2t}$  “desaparecerá” ao ser substituído na equação. Então, pensemos em uma solução do tipo  $u(t)e^{-2t}$ . Substituído esta solução em 2.20, tem-se

$$(u'' - 4u' + 4u)e^{-2t} + (u' - 2u)e^{-2t} - 2ue^{-2t} = e^{-2t}$$

ou seja, obtemos uma equação diferencial de segunda ordem

$$u'' - 3u' = 1 \quad (2.21)$$

Logo, uma escolha bem razoável de  $u$  para que o lado esquerdo de 2.21 seja igual a 1 é um polinômio de grau 1 sem o termo constante, pois o termo constante não aparece em 2.21 e portanto fica impossível de calculá-lo. A razão do desaparecimento do termo constante é que  $e^{-2t}$  é solução da homogênea associada a 2.20. Assim,

$$x_p = ate^{-2t}$$

Substituindo-se em 2.20, encontramos  $a = -\frac{1}{3}$ .

O exemplo 2.9 nos mostra que se a solução “chutada” tiver algum termo que seja solução da homogênea associada, temos que multiplicá-la por  $t$ . Em alguns casos é necessário multiplicá-la por  $t^2$ . Para uma equação diferencial de segunda ordem este é o maior grau de  $t$  que temos que multiplicar. (Você sabe porquê?)

**Exemplo 2.10** *Encontre a solução geral da equação*

$$x'' + x' - 2x = 2 \operatorname{sen} t \quad (2.22)$$

Neste exemplo procuramos uma solução particular  $x_p$ , tal que,  $x_p'' + x_p' - 2x_p = 2 \operatorname{sen} t$ . É claro que uma função deste tipo só pode ser uma combinação de senos e cossenos, ou seja,

$$x_p = a \operatorname{sen} t + b \operatorname{cos} t \quad (2.23)$$

Como  $x_p' = a \operatorname{cos} t - b \operatorname{sen} t$  e  $x_p'' = -a \operatorname{sen} t - b \operatorname{cos} t$ , substituindo em 2.22

$$a \operatorname{cos} t - b \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} t - b \operatorname{cos} t - 2(a \operatorname{sen} t + b \operatorname{cos} t) = 2 \operatorname{sen} t \quad (2.24)$$

obtém-se  $a = -\frac{3}{5}$  e  $b = -\frac{1}{5}$

**Exemplo 2.11** *Encontre a solução geral da equação*

$$x'' - 4x = te^{2t} \quad (2.25)$$

A equação característica  $r^2 - 4 = 0$  da equação 2.25 tem raízes  $\pm 2$ . Logo, a solução da homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

Para encontrar uma solução particular  $x_p$  de 2.25 vemos que o lado direito de 2.25 é o produto de um polinômio com uma função exponencial. Assim podemos conjecturar que  $x_p = (at + b)e^{2t}$ . Agora observe que o termo  $be^{2t}$  é solução da homogênea associada, logo ele desaparece quando substituirmos  $x_p$  na 2.25. Assim, multiplicamos  $x_p$  por  $t$ , ou seja,  $x_p = (at^2 + bt)e^{2t}$ . Substituindo  $x_p$  em 2.25 obtemos  $a = \frac{1}{8}$  e  $b = -\frac{1}{16}$ . Logo, a solução geral de 2.25 é

$$x(t) = \left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t\right)e^{2t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

Uma propriedade muito útil na resolução de uma equação quando o termo  $g(t)$  é a soma de duas funções:

**Propriedade:** Se  $ax'' + bx' + cx = g_1 + g_2$  e  $x_{p1}$  é uma solução de  $ax'' + bx' + cx = g_1$  e  $x_{p2}$  é uma solução de  $ax'' + bx' + cx = g_2$ , então, a soma  $x_{p1} + x_{p2}$  é solução de  $ax'' + bx' + cx = g_1 + g_2$ .

Esta propriedade vale para a soma de um número finito de funções e sua demonstração é uma consequência imediata da regra de derivação: “a derivada da soma é a soma das derivadas”.

**Exemplo 2.12** *Resolva o problema com condições iniciais*

$$\begin{aligned} x'' + 4x &= te^t + t \operatorname{sen} 2t \\ x(0) &= 0, \quad x'(0) = \frac{1}{5} \end{aligned} \quad (2.26)$$

A equação característica  $r^2 + 4 = 0$  da equação 2.26 tem raízes  $\pm 2i$ . Logo, a solução da homogênea associada é  $x_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ .

Pela propriedade vista acima vamos calcular separadamente as soluções particulares das equações

$$x'' + 4x = te^t \quad (2.27)$$

$$x'' + 4x = t \sin 2t \quad (2.28)$$

Como o lado direito da equação 2.27 é um polinômio vezes uma exponencial, podemos supor  $x_{p1} = (at + b)e^t$ . Substituindo  $x_{p1}$  em 2.27, obtém-se  $a = \frac{1}{5}$  e  $b = -\frac{2}{25}$ .

Na equação 2.28, o lado direito é o produto de um polinômio pela função  $\sin 2t$ . Logo uma solução particular  $x_{p2} = (at + b) \sin 2t + (ct + d) \cos 2t$ . Porém, observemos que  $b \sin 2t$  e  $d \cos 2t$  são soluções da homogênea associada. Então, multiplicamos  $x_{p2}$  por  $t$ , isto é,

$$x_{p2} = (at^2 + bt) \sin 2t + (ct^2 + dt) \cos 2t$$

Substituindo  $x_{p2}$  em 2.28 encontramos  $a = 0$ ,  $b = \frac{1}{16}$ ,  $c = -\frac{1}{8}$  e  $d = 0$ . Logo, a solução geral da equação 2.26 é

$$x(t) = \left(\frac{t}{5} - \frac{2}{25}\right)e^t + \frac{t}{16} \sin 2t - \frac{t^2}{8} \cos 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Utilizando as condições iniciais de 2.26, obtém-se

$$x(t) = \left(\frac{t}{5} - \frac{2}{25}\right)e^t + \frac{t}{16} \sin 2t - \frac{t^2}{8} \cos 2t + \frac{2}{25} \cos 2t + \frac{1}{25} \sin 2t$$

### Resumo do Método dos Coeficientes a Determinar

$\mathbf{g}(t)$	forma geral de $\mathbf{x}_p$
$P_n(t)$	$t^s(A_0 + A_1t + \dots + A_nt^n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0 + A_1t + \dots + A_nt^n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t} \begin{cases} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{cases}$	$t^s e^{\alpha t} [(A_0 + A_1t + \dots + A_nt^n) \cos \beta t + (B_0 + B_1t + \dots + B_nt^n) \sin \beta t]$
onde $s$ é o menor inteiro não-negativo ( $s = 0, 1, 2$ ) que assegura que nenhum termo em $x_p$ seja solução da equação homogênea associada.	

## 2.5 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

(a)  $y'' - y' - 2y = 0$

(b)  $y'' - 7y = 0$

(c)  $y'' + 4y = 0$

(d)  $y'' + 2y' + 3y = 0$

(Respostas)

2. Encontre a equação diferencial linear homogênea de menor ordem, tal que, uma de suas soluções seja:

- (a)  $e^{-2t}$
- (b)  $2e^{2t} - 5e^{-t}$
- (c)  $(4 - 3t)e^{2t}$

(Respostas)

3. Resolva as seguintes equações diferenciais:

- (a)  $y'' - 8y' + 7y = 14$
- (b)  $2y'' - 4y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$
- (c)  $y'' + 6y' + 9y = t + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- (d)  $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$
- (e)  $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 1$
- (f)  $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$
- (g)  $y'' + y = \cos x$
- (h)  $y'' - y = 2x \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (i)  $y'' - 2y' + 10y = e^x + \operatorname{sen} 3x$
- (j)  $y'' - 3y' = x + \cos x$

(Respostas)

4. (Problema da ressonância) Resolva o problema carro-mola dado pela equação abaixo com as condições iniciais:

$$x'' + 16x = 2 \operatorname{sen} 4t, \quad x(0) = -\frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0$$

Descreva seu movimento.

5. Uma massa de  $10 \text{ kg}$  acha-se suspensa por uma mola distendendo-a de  $0,7 \text{ m}$  além de seu comprimento natural. Põe-se o sistema em movimento a partir da posição de equilíbrio, com uma velocidade inicial de  $1 \text{ m/s}$  orientada “para cima”. Determine o movimento subsequente se a resistência do ar é proporcional à velocidade com constante de proporcionalidade  $90$ .

(Resposta)

6. Resolva o problema anterior considerando a aplicação ao sistema massa-mola de uma força externa  $f(t) = 50 \operatorname{sen} t$ . (Resposta)

7. Um corpo de  $1 \text{ kg}$  estica de  $0,2 \text{ m}$  uma mola. O corpo é impulsionado a partir do equilíbrio com uma velocidade para baixo de  $14 \text{ m/s}$  e não há resistência do ar. Uma força externa de  $28 \cos 7t + 56 \operatorname{sen} 7t$  Newtons age sobre o corpo. Determine a sua posição em cada instante  $t$  ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

(Resposta)

8. Em uma mesa horizontal está uma massa de  $2 \text{ Kg}$  presa a uma mola com constante de elasticidade  $k = 10 \text{ N/m}$  em um meio viscoso com constante de resistência proporcional à velocidade, de  $8 \text{ N/(m/s)}$ . Além disto, há uma força externa igual a  $2 \operatorname{sen} 2t + 16 \cos 2t$  agindo sobre o sistema. A mola parte a  $1 \text{ m}$  da posição de equilíbrio com uma velocidade inicial de  $2 \text{ m/s}$ .

- (a) Dê a posição  $x(t)$  da massa, justificando. (Resposta)
- (b) Escreva  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ , e determine o  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_p(t)|$ .
- (c) Desenhe o gráfico de  $x(t) - x_p(t)$ .

9. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$x'' + 25x = 20\text{sen}5t \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

- (a) Encontre a solução geral da equação homogênea associada.
- (b) Encontre a solução da equação (*não homogênea*) que satisfaz as condições iniciais dadas.
- (c) Encontre a amplitude e o período do movimento. (Resposta)

10. Em uma mesa horizontal está um corpo de massa  $1\text{ Kg}$  preso a uma mola com constante de elasticidade  $k = 9\text{ N/m}$ , em um meio viscoso que exerce sobre a massa uma força de resistência proporcional ao módulo da velocidade e direção contrária à da velocidade. A constante de proporcionalidade é  $c = 6\frac{\text{N}}{\text{m/s}}$ . Sobre a massa também age uma força externa  $F(t) = 6te^{-3t}$ , onde  $t$  é o tempo. Em  $t = 0$ , o corpo se encontra na origem e sua velocidade é  $1\text{ m/s}$ .

- (a) Determine a posição  $x(t)$  do corpo,
- (b) Determine o  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , justificando. (Resposta)

11. Uma corda flexível homogênea é pendurada numa roldana ficando 8 metros de um lado e 12 metros do outro. Qual a velocidade da queda da corda em cada instante? (considere  $g = 10$ )  
(Resposta)

# Capítulo 3

## Parametrização de Curvas

### 3.1 Curvas no Plano

#### 3.1.1 Introdução

Descrever a trajetória de um objeto lançado ou arremessado ao espaço é um problema que apareceu corriqueiramente em muitos contextos da trajetória de nossa civilização, desde o arremesso de uma simples pedra ao lançamento de foguetes passando pelo lançamento de dardos, discos, pesos, ... nas olimpíadas a lançamento de bolas de fogo por catapultas e bolas de ferro por canhoneiras só para lembrar alguns.

Vamos nos concentrar, aqui, no arremesso de uma bola de basquete. Veja a trajetória que uma bola descreve desde o seu arremesso até a cesta na figura 3.1.

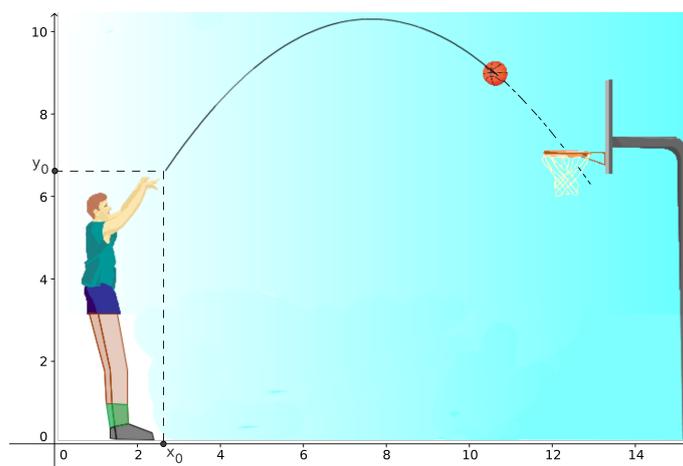


Figura 3.1: Trajetória de uma bola de basquete

A pergunta natural que segue é:

- Qual a equação que descreve a trajetória da bola?

Pelo pouco que sabemos de basquete, intuímos, pelo menos, que a trajetória da bola descreve uma curva plana e depende de sua altura e sua velocidade no momento do arremesso e do ângulo do lançamento. Sabemos que a trajetória da bola é a composição de duas translações: uma na direção vertical e outra na horizontal. Por outro lado o movimento acima é regido pela segunda Lei de Newton, afirma que:

- *a resultante das forças que atuam em cada direção é igual a massa da bola vezes a sua aceleração.*

Para descrever a trajetória da bola, especificando a sua posição em cada instante de tempo  $t$ , necessitamos estabelecer um sistema de coordenadas. A expressão matemática da trajetória está intimamente relacionada à escolha desse sistema. Uma "boa" escolha nos fornecerá uma expressão mais simples.

Nesse caso vamos estabelecer um sistema de coordenadas conforme mostra a figura 3.1.

Após o arremesso da bola, as únicas forças atuantes sobre a bola são a resistência do ar e a gravidade. Iremos simplificar nosso problema desprezando a resistência do ar. Assim, a única força que resta sobre a bola é a da gravidade, ou seja, seu peso atuando na direção vertical (figura 3.2). Como não há forças atuando na horizontal, pela 2ª Lei de Newton temos que a aceleração nessa

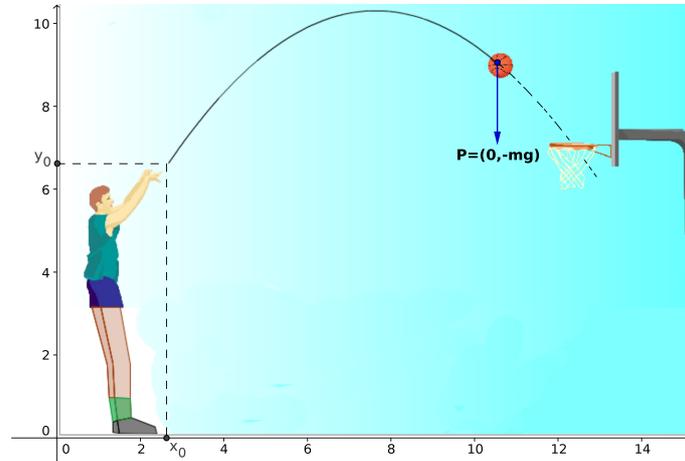


Figura 3.2: Forças atuantes na bola

direção é nula, isto é,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow x = x_0 + v_x t$$

onde  $v_x$  é a componente constante da velocidade na direção horizontal e  $x_0$  é o deslocamento horizontal inicial da bola.

Na direção vertical, devido a ação da gravidade, existe a força peso. Aplicando-se a 2ª Lei de Newton nessa direção e supondo a bola de massa  $m = 1$ , obtemos uma equação diferencial de segunda ordem fácil de ser resolvida

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -g \Rightarrow y = y_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

onde  $v_y$  é a componente da velocidade inicial na direção vertical e  $y_0$  é o deslocamento vertical inicial da bola. As equações obtidas acima

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

são ditas **equações paramétricas** da trajetória, porque fornecem a posição  $(x, y)$  da bola como funções de um parâmetro  $t$  que, nesse exemplo, representa o tempo transcorrido a partir do momento do arremesso.

De um modo geral, se um corpo se desloca no plano sobre uma curva  $\gamma$ , a sua posição  $P = (x, y)$  pode ser determinada em cada instante  $t$  por duas funções do tempo

$$x = x(t) \quad \text{e} \quad y = y(t)$$

Tais funções são chamadas de equações paramétricas da curva  $\gamma$  e  $t$  é chamado de parâmetro e a curva assim descrita é chamada de **curva parametrizada**. Se olharmos a curva apenas como um ente geométrico, o parâmetro  $t$  não representa necessariamente o tempo, como veremos em exemplos posteriores.

No exemplo do arremesso da bola de basquete a curva descrita pela bola é uma parábola, ou seja, é o gráfico de uma função  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ . Se não pensamos em movimento, mas apenas na curva descrita como um ente geométrico, podemos determinar cada ponto  $(x, y)$  da curva com a parametrização natural

$$x = t \quad \text{e} \quad y = at^2 + bt + c$$

Portanto, nos casos em que a curva é o gráfico de uma função de uma variável  $y = f(x)$ , uma parametrização natural da curva é:

$$x = t \quad \text{e} \quad y = f(t)$$

Agora, nem sempre a curva é o gráfico de uma função. Veja, por exemplo, a figura 3.3

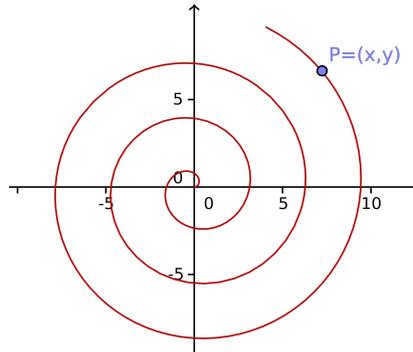


Figura 3.3

A parametrização de curvas e o movimento de objetos no plano é visto com mais detalhes na seção 3.3 através de funções vetoriais. Antes disso, veremos um resumo sobre vetores no plano.

## 3.2 Vetores no plano (resumo)

Algumas grandezas físicas, tais como, o tempo, temperatura, massa, área, comprimento e volume podem ser descritas por apenas um número com a unidade de medida apropriada. Tais grandezas são chamadas de grandezas escalares e os números reais associados a elas são chamados de escalares.

Para descrever outras grandezas tais como força, velocidade e deslocamento de um corpo são necessários conhecer a intensidade, a direção e o sentido. Para descrevermos uma força precisamos saber a direção e o sentido nos quais ela atua, bem como seu tamanho. Para descrevermos o deslocamento de um corpo precisamos dizer em qual direção e sentido ele se moveu, bem como a distância percorrida. Para descrevermos a velocidade do vento, por exemplo, precisamos saber sua direção, sentido e sua intensidade.

Grandezas como estas são ditas grandezas vetoriais e representadas por vetores. Geometricamente (veja a figura 3.4, se representa um vetor como um segmento de reta orientado  $\overrightarrow{AB}$  com ponto inicial  $A$  e ponto final  $B$ . A seta aponta a direção e o sentido da ação e seu comprimento, dado pela distância entre  $A$  e  $B$ , fornece a magnitude da ação. Por exemplo, um vetor força aponta na direção e no sentido nos quais ela é aplicada e seu comprimento é a medida de sua intensidade.

Dizemos que dois vetores são equivalentes se eles tem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Por exemplo, na figura 3.5, os vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{EF}$  são equivalentes. O vetor  $\overrightarrow{DC}$  tem o mesmo comprimento e direção que os anteriores mas de sentido contrário e o vetor  $\overrightarrow{GH}$  tem a mesma direção e sentido que o vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{EF}$  mas tem comprimento diferente. Para qualquer segmento orientado no plano sempre existe um equivalente a ele que tem ponto inicial

na origem. Assim uma classe de vetores equivalentes sempre tem um com ponto inicial na origem. Como se vê na figura 3.5 o vetor  $\vec{OP}$  com ponto inicial na origem é equivalente aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{EF}$ .

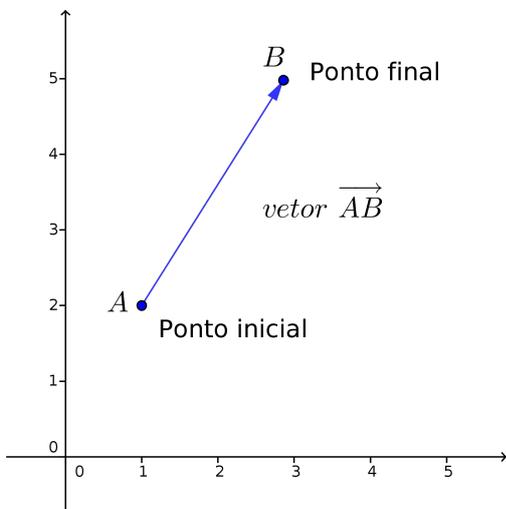


Figura 3.4

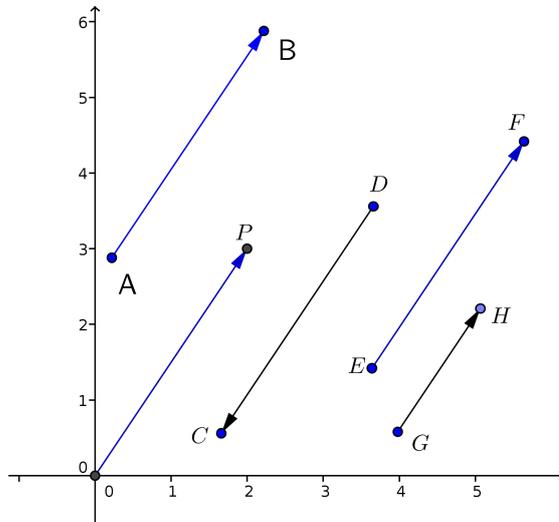


Figura 3.5

Assim, passaremos a considerar apenas os vetores com ponto inicial na origem, os quais chamaremos de vetores no plano. Logo, os vetores no plano são determinados pelo seu ponto final pois seu ponto inicial é sempre a origem. Isto nos permite estabelecer uma correspondência entre os pontos do plano com os vetores no plano. Assim, a cada ponto  $P = (a, b)$  do plano associamos um único vetor  $v = \vec{OP}$  e vice-versa. Com isso, passaremos a denotar um vetor  $v = \vec{OP}$  simplesmente pelas coordenadas do ponto  $P$ , isto é,

$$v = (a, b)$$

Os números  $a$  e  $b$  são chamados de componentes do vetor  $v$ .

De um modo geral, os vetores são denotados com letras minúsculas, por exemplo,  $u, v$  e  $w$ , enquanto que os pontos por letras maiúsculas  $P, Q, R$ , etc... À origem do plano associamos um vetor chamado **vetor nulo**,  $0 = (0, 0)$ . Se  $v = (a, b)$  o vetor  $-v = (-a, -b)$  é chamado de vetor oposto a  $v$ . Isto é,  $-v$  é um vetor de mesmo comprimento e mesma direção de  $v$  mas com sentido contrário.

Denotaremos o comprimento de  $v = (a, b)$  por  $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , que é a distância da origem ao ponto  $P$ .

### 3.2.1 Operação com vetores no plano

#### - Multiplicação por escalar

Dados um vetor  $u = (u_1, u_2)$  e um número  $k \in R$ , a multiplicação de  $k$  por  $u$  é definido por:

$$ku = (ku_1, ku_2)$$

Observe que se  $k > 0$ , o vetor  $ku$  tem o mesmo sentido que  $u$  e se  $k < 0$  tem sentido oposto. O comprimento de  $ku$  é

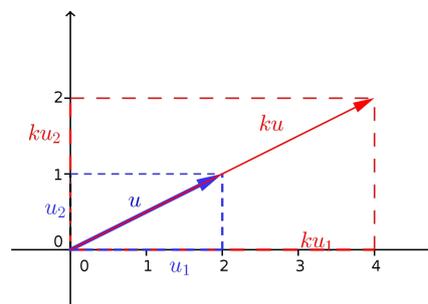


Figura 3.6: Multiplicação por escalar

$|k|$  vezes o comprimento de  $u$  (veja figura 3.6):

$$|ku| = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2} = |k|\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |k| \cdot |u|$$

**- Adição** ⓘ

Se  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$ , então a soma  $u + v$  é o vetor:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Geometricamente, ele é vetor da diagonal do paralelogramo de lados  $u, u', v$  e  $v'$  como mostra a figura 3.7. Observe que os vetores  $u'$  e  $v'$  são as translações dos vetores  $u$  e  $v$ , respectivamente. Observe ainda que:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (u_1 + v_1, 0) + (0, u_2 + v_2)$$

**- Subtração** ⓘ

Se  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  a diferença  $u - v$  é definida como:

$$u - v = u + (-v) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

Geometricamente, a diferença  $u - v$  é mostrada na figura 3.8.

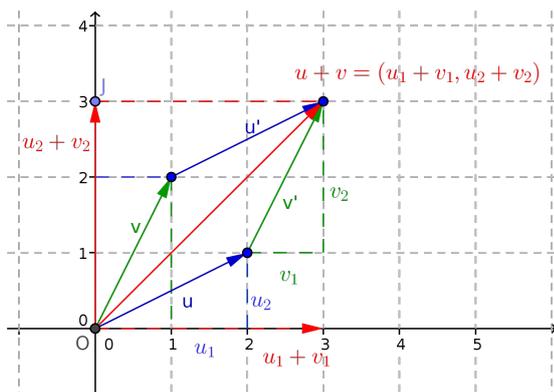


Figura 3.7: Adição de vetores

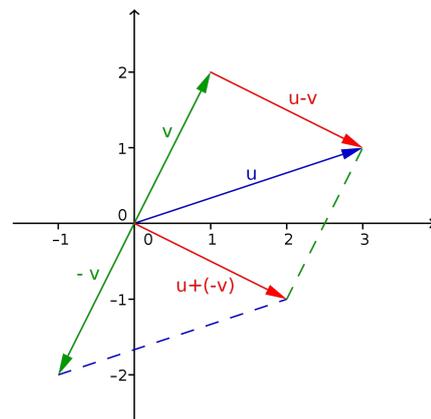


Figura 3.8: Subtração de Vetores

**- Produto Escalar** ⓘ

Se  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  o produto escalar entre  $u$  e  $v$  é definida como:

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$$

**- Propriedades de Operação com vetores no plano**

Sejam  $u, v$  e  $w$  vetores e  $h$  e  $k$  escalares.

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| 1. $u + v = v + u$             | 8. $(h + k)u = hu + ku$                          |
| 2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ | 9. $u \cdot v = v \cdot u$                       |
| 3. $u + 0 = 0$                 | 10. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$    |
| 4. $u + (-u) = 0$              | 11. $k(u \cdot v) = (ku) \cdot v = u \cdot (kv)$ |
| 5. $0u = 0$                    | 12. $v \cdot v =  v ^2$                          |
| 6. $h(ku) = (hk)u$             | 13. $0 \cdot v = 0$                              |
| 7. $k(u + v) = ku + kv$        |  |

As demonstrações destas propriedades são imediatas a partir das definições.

**- Vetores Unitários**

Um problema comum em aplicações é encontrar um vetor unitário  $u$  que tem a mesma direção de um vetor dado  $v$ . Tal vetor  $u$  pode ser obtido como

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{v}{|v|}$$

que é um vetor na direção de  $v$  multiplicado por um escalar  $k = \frac{1}{|v|}$ . Assim,

$$|u| = |kv| = |k| |v| = \frac{1}{|v|} |v| = 1$$

Observação: Qualquer vetor  $u = (a, b)$  pode ser escrito como uma **combinação linear** dos vetores unitários  $i = (1, 0)$  e  $j = (0, 1)$

$$u = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = ai + bj$$

O escalar  $a$  é chamada de componente horizontal de  $u$  e o escalar  $b$  de componente vertical de  $u$ . O conjunto de vetores  $\{i, j\}$  é chamado de base para o espaço  $\mathbb{R}^2$ .

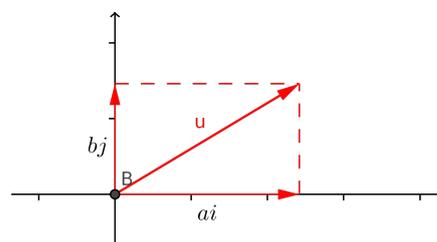


Figura 3.9:  $u$  é uma combinação linear de  $i$  e  $j$

**- Ângulo entre Vetores**

Dados os vetores não nulos  $u$  e  $v$ , definimos o ângulo entre  $u$  e  $v$  como sendo o ângulo  $\alpha$  formado por  $u$  e  $v$  satisfazendo  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

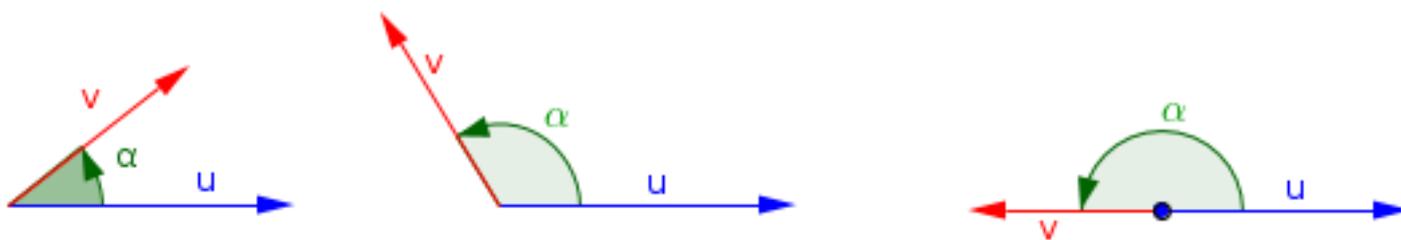


Figura 3.10: Ângulo entre  $u$  e  $v$

O próximo teorema nos dá uma outra fórmula para o produto escalar entre dois vetores.

**Teorema 3.1** *Se  $u$  e  $v$  são dois vetores não nulos e se  $\alpha$  é o ângulo entre eles, então*

$$u \cdot v = |u| |v| \cos \alpha \tag{3.1}$$

*Dem.:* Suponha que os vetores  $u$ ,  $v$  e  $v - u$  estão como na figura 3.11. Então, pela lei dos cosenos

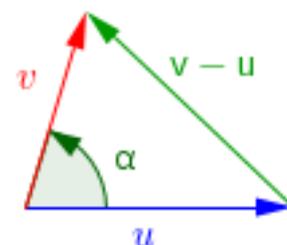


Figura 3.11

$$|v - u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u| |v| \cos \alpha \tag{3.2}$$

Utilizando as propriedades de produto interno, podemos reescrever o lado esquerdo da equação 3.1 como

$$\begin{aligned} |v - u|^2 &= (v - u) \cdot (v - u) \\ &= (v - u) \cdot v - (v - u) \cdot u \\ &= v \cdot v - u \cdot v - v \cdot u + u \cdot u \\ &= |v|^2 - 2u \cdot v + |u|^2 \end{aligned}$$

Substituindo em 3.2, tem-se

$$|v|^2 - 2u \cdot v + |u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\alpha$$

que simplificando nos dá:

$$u \cdot v = |u||v|\cos\alpha \quad (3.3)$$

□

Observe que a fórmula 3.1 nos mostra, também, como calcular o ângulo  $\alpha$  entre dois vetores, pois,

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \quad (3.4)$$

De um modo geral, os termos “perpendicular”, “ortogonal” e “normal” são usados para dizer que dois objetos geométricos se interceptam em ângulos retos. Mais comumente dizemos que dois vetores são ortogonais, duas retas são perpendiculares e que um vetor é normal a um plano. A equação 3.1 nos diz que dois vetores são ortogonais quando seu produto escalar for igual a zero. Também dizemos que o vetor nulo,  $0$ , é ortogonal a qualquer vetor, muito embora o ângulo entre o vetor nulo e um vetor qualquer não esteja bem definido geometricamente. Esta convenção nos permite escrever que  $u$  e  $v$  são ortogonais quando  $u \cdot v = 0$ , quaisquer que sejam os vetores  $u$  e  $v$ .

### 3.3 Funções vetoriais

Considere um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Definição 3.1** A função  $\mathbf{r}$  que a cada  $t \in I$  associa o vetor  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  é chamada de função vetorial.

$$\mathbf{r} : t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

Observe que para cada valor de  $t$  obtemos um ponto  $P = (x(t), y(t))$  de uma curva  $\gamma$ . Assim, a curva  $\gamma$  é a imagem da função vetorial  $\mathbf{r}(t)$  e se diz que ela é uma parametrização da curva  $\gamma$ . Assim, se um objeto se desloca no plano descrevendo uma curva  $\gamma$ , sua posição em cada instante de tempo  $t$  é dada por  $\mathbf{r}(t)$ . Neste caso  $\mathbf{r}(t)$  é chamada de função posição do objeto ou, simplesmente, de função posição.

O vetor  $\mathbf{r}(t)$  é representado geometricamente na figura 3.12 pelo vetor  $\overrightarrow{OP}$  

As equações

$$x = x(t), \quad e \quad y = y(t) \quad (3.5)$$

são chamadas de **equações paramétricas** da curva  $\gamma$  e a variável  $\mathbf{t}$  é chamada de **parâmetro**.

A equação cartesiana da curva  $\gamma$ , quando existir, pode ser determinada eliminando-se o parâmetro  $t$  desse par de equações.

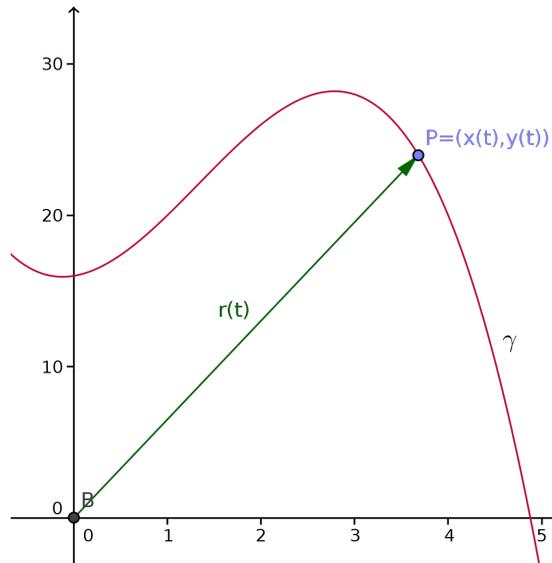


Figura 3.12: Função vetorial

Em nosso problema do arremesso de bola, considerando  $x_0 = 0$ , da primeira equação obtém-se  $t = \frac{x}{v_x}$ . Substituindo-se esse valor de  $t$  na segunda equação:

$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x} x - \frac{g}{2v_x^2} x^2$$

que é a equação cartesiana da trajetória da bola.

Podemos entender a equação cartesiana acima como uma descrição estática da trajetória, enquanto que o par de equações paramétricas fornece uma representação dinâmica do movimento (lembre-se que estas equações são dadas como função do tempo).

**Exemplo 3.1** *Descreva a curva dada pelas equações paramétricas:*

$$x = 3 \cos t \quad e \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

*Solução:*  Se fizermos

$$\frac{x}{3} = \cos t \quad e \quad \frac{y}{2} = \sin t$$

teremos

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

e, portanto, as equações paramétricas acima representam uma elipse. Quando  $t$  varia de 0 a  $2\pi$ , o ponto  $P = (3 \cos t, 2 \sin t)$  sai de  $(3, 0)$  e dá uma volta completa na elipse. Se tivéssemos as equações paramétricas

$$x = 3 \cos t \quad e \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

o ponto  $P = (3 \cos t, 2 \sin t)$  começaria em  $(3, 0)$  e daria uma volta e meia na elipse, terminando em  $(-3, 0)$ . Veja a figura 3.13.

**Exemplo 3.2** *Descreva a curva  $\gamma$  dada pelas equações paramétricas:*

$$x = 3 + t^2 \quad e \quad y = 1 + 2t^4, \quad t \in \mathbb{R}$$

Solução: Temos que

$$t^2 = x - 3 \Rightarrow y = 1 + 2(x - 3)^2$$

ou seja a curva  $\gamma$  é uma parábola voltada para cima com vértice no ponto  $A = (3, 1)$ . Agora, como  $x = 3 + t^2$ , temos que  $x \geq 3$  para todo  $t$ . Então, na verdade, a curva  $\gamma$  é apenas o ramo direito da parábola como mostra a figura 3.14.

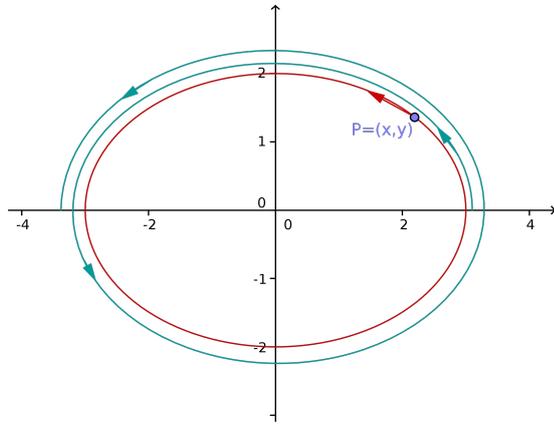


Figura 3.13

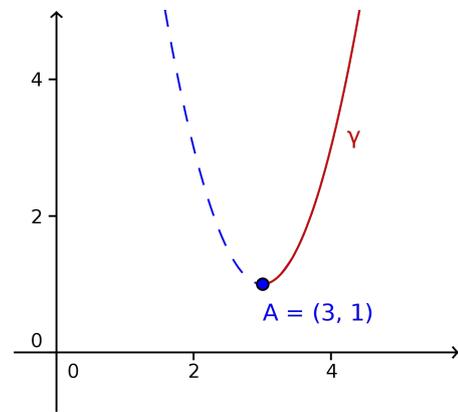


Figura 3.14

**Nota:** Esboçar o gráfico de uma curva nem sempre é uma tarefa fácil. Mesmo quando conseguimos encontrar sua equação cartesiana, se ela existir. Na maioria dos casos temos que apelar para um computador e um programa gráfico. Existem muitos programas que traçam gráficos de curvas parametrizadas. Para citar alguns: Maple, Matemática, Winplot e Geogebra. As figuras 3.15 e 3.16 mostram as curvas chamadas epitrocóide e bowditch, respectivamente mostram a curvas produzidas pelo programa Geogebra

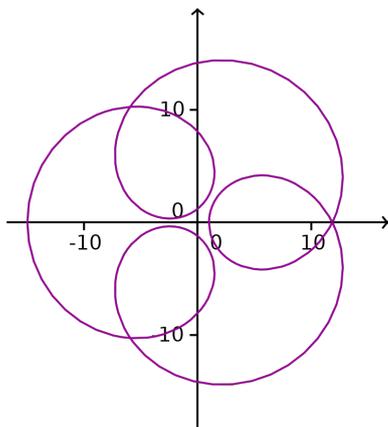


Figura 3.15:  $x(t) = 8 \cos(\frac{1}{4}t) - 7 \cos t$   
 $y(t) = 8 \sin(\frac{1}{4}t) - 7 \sin t$

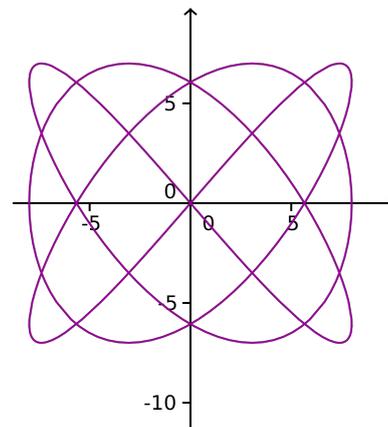


Figura 3.16:  $x(t) = 8 \sin(\frac{3}{4}t)$   
 $y(t) = 7 \sin t$

**Exemplo 3.3** Qual a posição de uma partícula em cada instante que se desloca no plano:

1. sobre uma reta  $s$  que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  com direção do vetor  $v = (a, b)$ ? 
2. sobre uma circunferência centrada na origem de raio  $a$  com velocidade angular de 1 radiano por segundo? 2 radianos por segundo? 

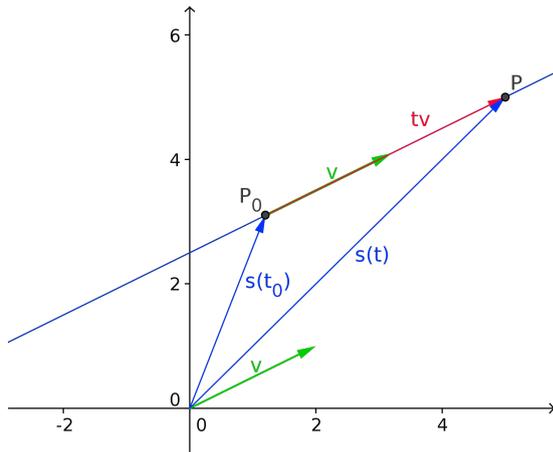


Figura 3.17: Deslocamento sobre uma reta

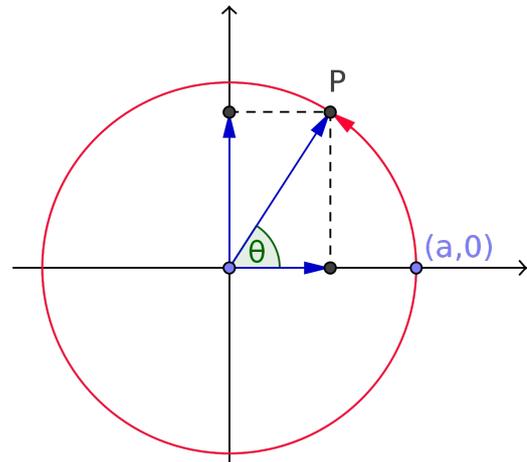


Figura 3.18: Deslocamento sobre uma circunferência

*Solução:*

1. Observe na figura (3.17) que se a partícula estiver em um ponto qualquer  $P = (x, y)$  da reta, o vetor  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \vec{v}$ , onde  $t$  é um número real. Portanto,  $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ , ou seja, todo ponto  $(x, y)$  da reta é imagem da função vetorial  $s(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$ . Assim,

$$s : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

são as equações paramétricas da reta  $s$ . Observe que se pode substituir o ponto  $(x_0, y_0)$  por qualquer outro ponto da reta no par de equações acima, assim como podemos tomar qualquer outro vetor com mesma direção do vetor  $(a, b)$ . Assim, uma reta possui infinitas parametrizações, o que condiz com o fato da partícula se deslocar em linha reta com diferentes velocidades. Esta relação será mostrada logo mais.

2. Observe na figura (3.18) que um ponto qualquer sobre a circunferência de raio  $a$  após girar de um ângulo  $\theta$  tem coordenadas  $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ . Portanto as equações paramétricas da circunferência em função do ângulo  $\theta$  são:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}$$

Se o objeto se desloca com velocidade angular  $\frac{d\theta}{dt} = 1 \text{ rd/s}$ , tem-se  $\theta(t) = t$ . Logo, as equações paramétricas da circunferência em função do parâmetro tempo  $t$  são:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

Se o objeto se desloca com velocidade angular  $\frac{d\theta}{dt} = 2 \text{ rd/s}$ , tem-se  $\theta(t) = 2t$ . Neste caso, as equações paramétricas da circunferência são:

$$\begin{cases} x = a \cos 2t \\ y = a \sin 2t \end{cases}$$

**Exemplo 3.4** Considere uma circunferência de raio  $a$  com um ponto  $P$ , fixo. Quando rolamos a circunferência sobre uma reta (eixo  $x$ ), o ponto  $P$  traça uma curva chamada de cicloide (figura 3.20). Encontre as equações paramétricas da cicloide se a circunferência desliza ao longo do eixo  $x$  e posição inicial do ponto  $P$  é a origem.

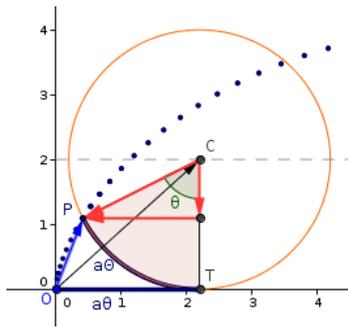


Figura 3.19

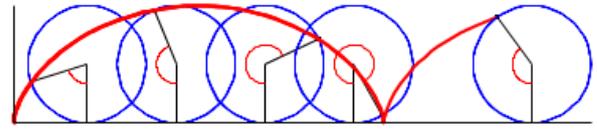


Figura 3.20: Ciclóide

*Solução:* Escolhemos como parâmetro o ângulo  $\theta$  que a circunferência girou ( $\theta = 0$  quando  $P$  está na origem). O vetor  $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}$ . Observe na figura (3.19) que, quando a circunferência girou de um ângulo  $\theta$ , o comprimento do segmento  $OT$  será

$$|OT| = \text{arco}PT = a\theta$$

Assim, os vetores  $\vec{OC}$  e  $\vec{CP}$  serão

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OT} + \vec{TC} = (a\theta, 0) + (0, a) = (a\theta, a) \\ \vec{CP} &= (-a \sin \theta, -a \cos \theta) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{OP} = a(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$$

ou seja, as equações paramétricas da cicloide são

$$\begin{cases} x(\theta) = a(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

Assim, temos a função vetorial  $r(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Note que o parâmetro é o ângulo  $\theta$ . Se supusermos que a circunferência desliza com uma velocidade angular, por exemplo, de  $3\pi$  radianos por segundo, então,  $\theta = 3\pi t$  e teremos a função vetorial

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (a(3\pi t - \sin 3\pi t), a(1 - \cos 3\pi t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

ou seja, uma outra parametrização para a cicloide onde o parâmetro é o tempo  $t$ .

Os exemplos que vimos nos mostram que quando objetos descrevem movimentos no plano, os caminhos traçados por estes objetos são curvas que podem ser parametrizadas de infinitas maneiras. Tais parametrizações podem depender do movimento dos objetos, isto é, velocidade e aceleração. Para entender melhor tais movimentos, vamos estudar com mais detalhes as funções vetoriais.

### 3.3.1 Limite e Continuidade de Funções Vetoriais

Já vimos que uma função vetorial é uma função definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , com valores em  $\mathbb{R}^2$ , isto é,

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

onde  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , são funções reais definidas em  $I$ .

**Definição 3.2** Seja  $r(t) = (x(t), y(t))$ . Se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = L_1 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = L_2,$$

então,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) \right) = (L_1, L_2)$$

**Exemplo 3.5** Seja  $r(t) = \left( \frac{\text{sen } t}{t}, t^2 \right)$ . Calcule  $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)$ .

Pela definição acima,

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } t}{t}, t^2 \right) = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \right) = (1, 0)$$

Veja o gráfico da curva parametrizada por  $r(t)$  na figura 3.21

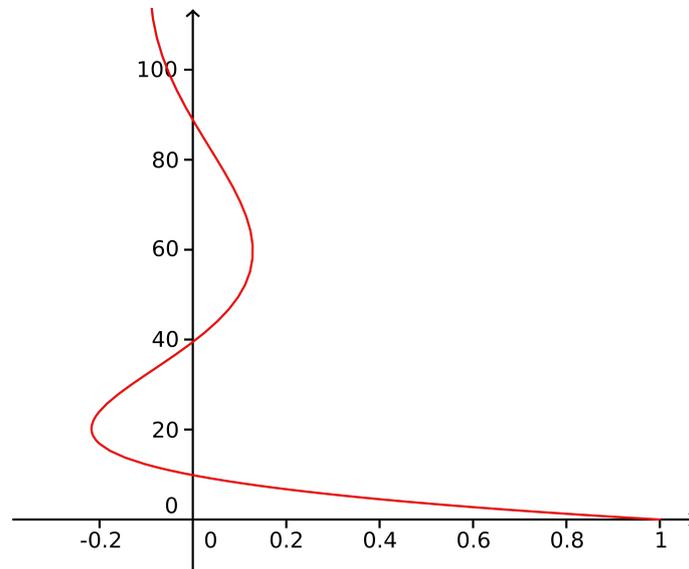


Figura 3.21:  $r(t) = \left( \frac{\text{sen } t}{t}, t^2 \right)$

Definimos continuidade de funções vetoriais do mesmo modo que definimos continuidade de funções reais.

**Definição 3.3** Uma função vetorial  $r(t)$  é contínua em um ponto  $t_0$  do seu domínio se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$$

Como o limite de uma função vetorial  $r(t) = (x(t), y(t))$  é definido pelos limites das componentes  $x(t)$  e  $y(t)$ , a continuidade de  $r(t)$  vai depender da continuidade das componentes  $x(t)$  e  $y(t)$ .

A função do exemplo (3.5) não é uma função contínua em  $t = 0$ , pois não está definida em  $t = 0$ , porém, a função  $r(t) = (x(t), y(t))$ , onde

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen } t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

e  $y(t) = t^2$  é uma função contínua em  $t = 0$  e, portanto, contínua em toda a reta real.

### 3.3.2 Derivadas de Funções Vetoriais

Definimos derivada de funções vetoriais do mesmo modo como definimos para funções reais:

$$r'(t) = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

Como  $r(t) = (x(t), y(t))$ , verifica-se facilmente utilizando-se as definições que a derivada de uma função vetorial é a derivada das componentes  $x(t)$  e  $y(t)$ , i.e.,

$$\begin{aligned} r'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - (x(t), y(t))] \\ &= \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \\ &= (x'(t), y'(t)) \end{aligned}$$

**Exemplo 3.6** Calcule a derivada de  $r(t) = (2 + 3t^2, 1 + \text{sen } 2t^3)$

Solução:  $r'(t) = ((2 + 3t^2)', (1 + \text{sen } 2t^3)') = (6t, 6t^2 \cos 2t^3)$

### 3.3.3 Interpretação da Derivada

A interpretação geométrica da derivada de uma função vetorial é mostrada nas figuras 3.22 e 3.23. Na figura 3.22 vemos que o vetor  $\vec{PQ} = r(t + \Delta t) - r(t)$ . O vetor  $\vec{PS} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$ , para  $\Delta t > 0$ . Na figura 3.23 vemos que à medida que  $\Delta t \mapsto 0$ , o vetor  $\vec{PS}$  tende a um vetor tangente à curva que é dado por  $r'(t)$  como é visto na figura 3.24. 

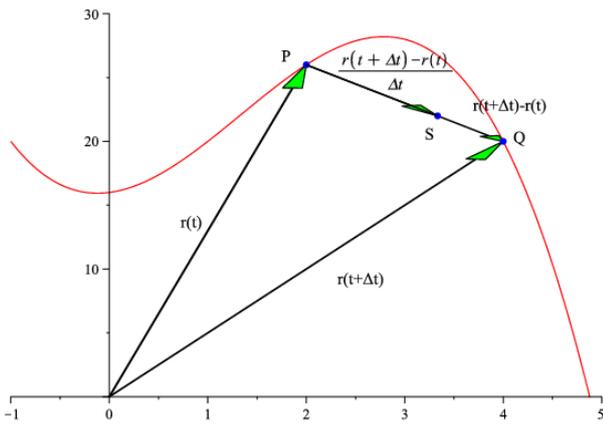


Figura 3.22

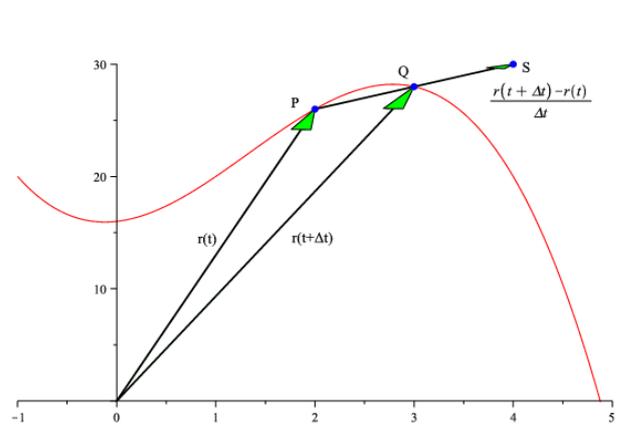


Figura 3.23

Fisicamente, se um objeto descreve uma curva no plano e sua posição em cada instante  $t$  é dada por  $r(t) = (x(t), y(t))$ , a derivada da função vetorial  $r(t)$  é vista como sendo a velocidade deste objeto, pois a velocidade é a taxa de variação da posição em relação ao tempo, i.e.,

$$v(t) = r'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

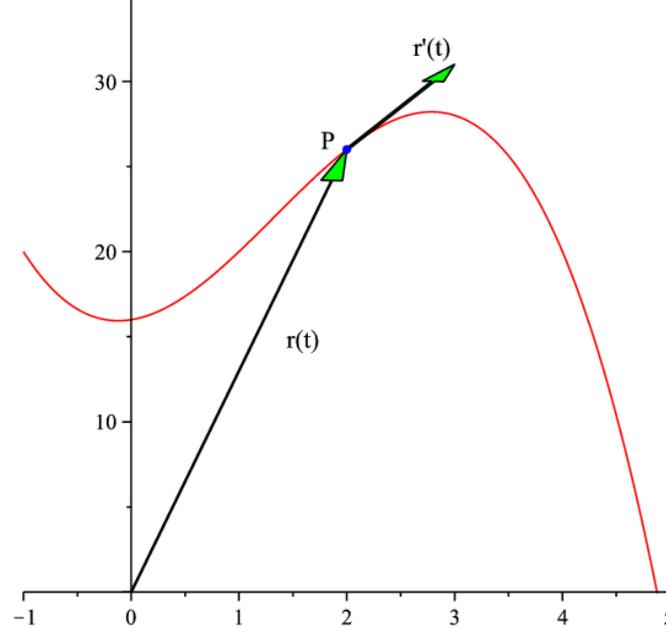


Figura 3.24: Vetor tangente

Assim, a velocidade é um vetor tangente ao deslocamento do objeto, como mostram as figuras 3.22, 3.23 e 3.24, e aponta sempre na direção tangente ao deslocamento da partícula para  $t$  crescente. Sua aceleração é definida como sendo  $a(t) = v'(t) = r''(t)$ . 

**Exemplo 3.7** *Vimos no exemplo 3.3 que as equações paramétricas de uma reta que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  com vetor direção  $v = (a, b)$  são dadas por*

$$x = x(t) \quad e \quad y = y(t)$$

*Assim, se um objeto se desloca sobre a reta e sua posição em cada instante é dada por  $r(t) = (x(t), y(t))$ , sua velocidade, então, é  $r'(t) = v(t) = (a, b)$ , ou seja, sua velocidade é um vetor que dá a direção da reta e é sempre constante. Neste caso, como a partícula descreve uma reta, seu vetor velocidade é um vetor paralelo a um vetor que dá direção da reta.* 

*No caso em que o movimento de um objeto descreve uma circunferência de raio  $a$  e sua velocidade angular é de  $1 \text{ rd/s}$ , sua posição em cada instante é dada por  $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$  e sua velocidade  $v(t) = r'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$ . Portanto, sua velocidade, neste caso, é um vetor perpendicular ao vetor posição, ou seja, tangente à sua trajetória que é a circunferência. Sua aceleração  $a(t) = v'(t) = (-a \cos t, -a \sin t)$  é um vetor que aponta para o centro da circunferência, sua força centrípeta.* 

**Exemplo 3.8** *Determinar as equações paramétricas da reta tangente à elipse  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  no ponto  $T = (\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ .*

Solução: Parametrizando a elipse,  $r(t) = (x(t), y(t))$ , temos que:

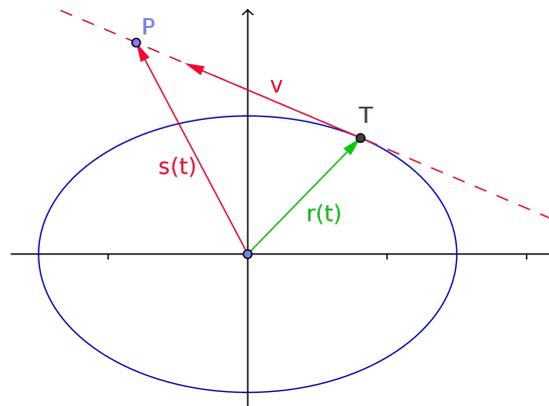
$$x = x(t) = 3 \cos(t) \quad e \quad y = y(t) = 2 \sin(t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Para determinar o valor de  $t$  para o ponto  $T$ , basta igualar as coordenadas:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = 3 \cos(t) \quad e \quad \sqrt{2} = 2 \sin(t)$$

de onde se conclui que  $t = \frac{\pi}{4}$ . Derivando as equações paramétricas da elipse e calculando em  $t = \frac{\pi}{4}$ , obtemos o vetor tangente  $v = \left( \frac{-3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right)$ . Assim, as equações paramétricas da reta tangente à elipse que passa por  $T$  são:

$$s(t) =: \begin{cases} x(t) &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}t \\ y(t) &= \sqrt{2} + \sqrt{2}t \end{cases}$$



### 3.3.4 Integrais de Funções Vetoriais

A integral definida de uma função vetorial  $r(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  é definida da mesma maneira como foi definida para uma função real:

$$\int_a^b r(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n r(c_i) \Delta t$$

para qualquer que seja a partição  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{i-1} \leq t_i \leq \dots \leq t_n = b$  e constantes  $t_{i-1} \leq c_i \leq t_i$ . Naturalmente, pela definição de limite, vê-se facilmente que para integrar  $r(t)$  basta integrar suas componentes, i.e.:

$$\int_a^b r(t) dt = \left( \int_a^b (x(t) dt, \int_a^b y(t) dt \right)$$

Podemos, também, estender o Teorema Fundamental do Cálculo de funções reais para funções vetoriais, ou seja, se  $r$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e  $R$  é uma primitiva de  $r$ , i.e.,  $R'(t) = r(t)$  então:

$$R(t) = \int_a^t r(s) ds \text{ é contínua e } \int_a^b r(t) dt = R(b) - R(a)$$

A integral indefinida

$$\int r(t) dt = R(t) + C$$

é o conjunto de todas as primitivas de  $r$ . Neste caso,  $C$  é um vetor constante de integração.

**Exemplo 3.9** *Seja  $r(t) = (6 \cos(2t), 6 \sin(2t))$ . Então,*

$$\int r(t) dt = \left( \int 6 \cos(2t) dt, \int 6 \sin(2t) dt \right) = (3 \sin(2t), -3 \cos(2t)) + C$$

e

$$\int_0^{\pi/4} r(t) dt = (3 \sin(2t), -3 \cos(2t)) \Big|_0^{\pi/4} = (3 \sin(\sqrt{2}), -3 \cos(\sqrt{2})) - (0, -3) = 3(\sin(\sqrt{2}), -1 - \cos(\sqrt{2}))$$

### 3.4 Comprimento de arco



Dada a curva  $C$  parametrizada por  $r(t) = (x(t), y(t))$  com  $t$  variando no intervalo  $[a, b]$ , como calcular seu comprimento? Observe que este problema é o mesmo que apareceu em Cálculo I, quando a curva  $C$  era gráfico de função. A idéia de calcular o comprimento de  $C$  é a mesma usada em Cálculo I, ou seja, dividimos o arco  $C$  em  $n$  pontos e ligamos estes  $n$  pontos por uma poligonal. O comprimento de  $C$  vai ser aproximadamente o comprimento desta poligonal. À medida que  $n$  aumenta a poligonal se aproxima de  $C$ , melhorando o valor da aproximação. Veja as figuras 3.25, 3.26 e 3.27:

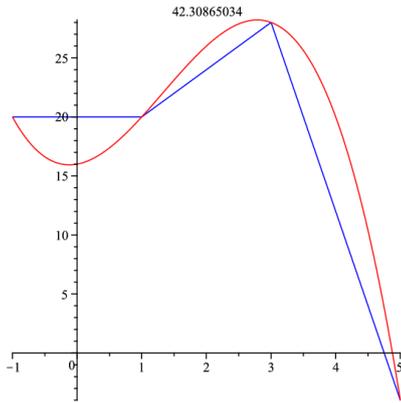


Figura 3.25: Aproximando por poligonal de 3 lados

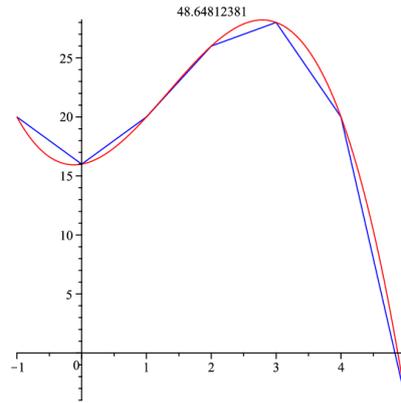


Figura 3.26: Aproximando por poligonal de 6 lados

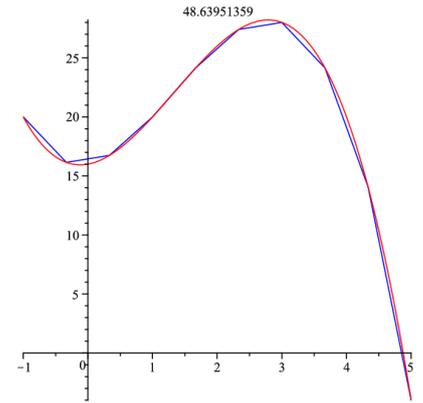


Figura 3.27: Aproximando por poligonal de 10 lados

Como no caso de função contínua de uma variável  $y = f(x)$  em que o comprimento  $L$  de um arco do gráfico de  $f$  para  $a \leq x \leq b$  é dado pela fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (3.6)$$

No caso de funções vetoriais, se  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  tem derivadas contínuas, utilizando-se o teorema do valor médio chega-se facilmente à seguinte fórmula para o comprimento de arco da curva  $r(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ :

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (3.7)$$

Verifica-se facilmente que a fórmula 3.7 é uma extensão da fórmula 3.6.

**Exemplo 3.10** Calcule o comprimento da circunferência  $r(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Solução:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

**Obs.** No caso em que um objeto se movimenta com vetor posição  $r(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , e vetor velocidade  $v(t) = r'(t)$ , a distância percorrida por este objeto desde  $t = a$  até um instante qualquer  $t$  é:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^t |v(t)| dt$$

De modo que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a taxa de variação da distância percorrida em relação ao tempo, chamada velocidade escalar é o módulo de sua velocidade vetorial.

$$\frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = |v(t)|$$

### 3.5 Exercícios

1. Trace as seguintes curvas e determine as equações paramétricas de suas retas tangentes nos pontos  $P_0$ , determinados por  $t_0$ .

(a)  $r(t) = (t^2, \frac{4}{t^2})$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ;  $t_0 = 2$ .

(b)  $r(t) = (-2 + t^2, 3 + 4t^2)$ ,  $t \in [1, 5]$ ;  $t_0 = 2$ .

(c)  $r(t) = (4 \operatorname{sen} t, 3 \operatorname{cos} t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ ;  $t = \frac{\pi}{3}$

(d)  $r(t) = (3e^t, 4e^{2t})$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ ;  $t_0 = 0$ .

(e)  $r(t) = (t^2, \operatorname{sen}(\frac{t^2}{\pi}))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;  $t_0 = \pi$

(f)  $r(t) = (4 + \operatorname{cos} t, 3 + \operatorname{sen} t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ ;  $t_0 = \frac{\pi}{4}$ .

(Respostas)

2. (a) Parametrize a trajetória de uma partícula que se move em linha reta partindo do ponto  $(0,1)$  com velocidade constante dada pelo vetor  $(1,1)$ .

(b) Qual a trajetória da partícula se, agora, a sua velocidade é dada pelo vetor  $(2,2)$ .

(c) As duas equações encontradas acima, representam o mesmo movimento? A função  $y = f(x)$  que representa a equação cartesiana da trajetória da partícula é igual nos dois casos acima?

(Respostas)

3. (a) Encontre uma representação paramétrica para o círculo  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$ .

(b) Encontre uma representação paramétrica para a trajetória de uma partícula que se move a partir do ponto  $(R, 0)$ , sobre um círculo de raio  $R$  e centro  $(0,0)$ , com velocidade angular constante igual a  $w$  rd/s.

(Respostas)

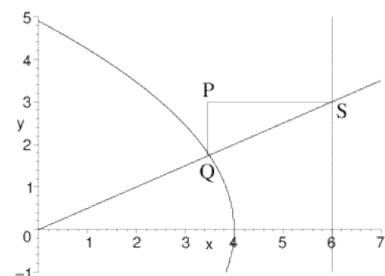
4. (a) Encontre uma representação paramétrica para a elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

(b) Encontre uma representação paramétrica para a elipse  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ .

(Respostas)

5. Uma haste, presa na origem do plano  $xy$ , ocupa a posição da reta  $y = tx$ .

A haste intercepta a reta  $x = 6$  no ponto  $S$  e a parábola  $y^2 = -6x + 24$  no ponto  $Q$  (veja figura ao lado). Quando  $t$  varia, o vértice  $P$  do triângulo  $QPS$ , de hipotenusa  $QS$ , descreve uma curva  $\alpha(t)$ .



(a) Encontre as equações paramétricas da curva  $\alpha$ .

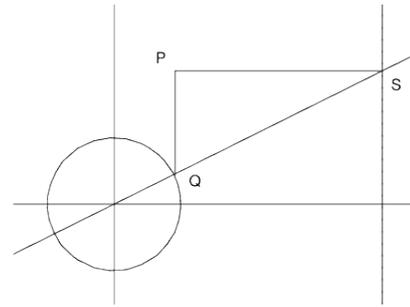
(b) Esboce o gráfico de  $\alpha$ .

(c) Determine sua equação cartesiana.

(Respostas)

6. Uma haste, presa na origem do plano  $xy$ , ocupa a posição da reta  $y = tx$ . A haste intercepta a reta  $x = 8$  no ponto  $S$  e a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  no ponto  $Q$  (veja figura). Quando  $t$  varia, o vértice  $P$  do triângulo  $QPS$  descreve uma curva  $\alpha(t)$ .

- (a) Determine as equações paramétricas de  $\alpha$ .
- (b) Esboce o gráfico de  $\alpha$ .
- (c) Determine sua equação cartesiana. (Respostas)



7. Dois carros se movem segundo os seguintes vetores posição:

$$\sigma_1(t) = \left( 2 + t, -2 + \frac{t^2}{2} \right) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = \left( -8 + 7t, -1 + \frac{7}{2}t \right), \quad t \geq 0$$

- (a) Os carros se chocarão? Justifique sua resposta!
- (b) Esboce as estradas sobre as quais eles se movem.
- (c) As estradas se cruzam? Em quais pontos?
- (d) Qual a velocidade do primeiro carro no instante  $t = 2$ ? (Respostas)
8. Uma partícula partindo do ponto  $A = (1, 0)$ , se move com vetor posição  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ . Sabe-se que o vetor velocidade é dado por  $v(t) = (y(t) + e^t, x(t) + e^{-t})$ . Determine o vetor posição  $\sigma(t)$ . (Resposta)
9. Uma partícula se desloca no plano sobre uma curva, que é gráfico de uma função, saindo do ponto  $P = (1, 2)$ . Sabendo-se que o coeficiente angular da tangente à curva em cada ponto é igual ao inverso da abscissa do ponto:
- (a) Encontre a equação cartesiana da curva.
- (b) Supondo que a projeção da partícula sobre o eixo  $y$  se desloca com velocidade constante de  $5 \text{ m/s}$  na direção positiva deste eixo, determine a posição da partícula em cada instante. (Respostas)
10. Desenrola-se a linha de um carretel de raio  $r$  mantendo-se a mesma sempre esticada. A ponta  $P$  da linha descreve uma curva chamada de involuta do círculo (veja figura 3.28). Se a ponta da linha está inicialmente na posição  $A = (r, 0)$ , encontre as equações paramétricas da involuta considerando o parâmetro  $\theta$  como sendo o ângulo mostrado na figura 3.28. (Resposta)

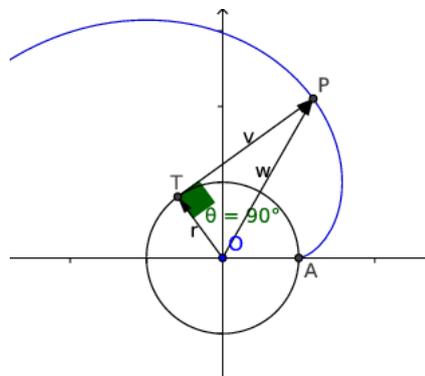


Figura 3.28: Involuta do círculo

# Capítulo 4

## Espaço Tridimensional - $\mathbb{R}^3$

---

### 4.1 Sistema de Coordenadas Tridimensionais

Como vimos no caso do  $\mathbb{R}^2$ , para localizar um ponto no plano precisamos de duas informações e assim um ponto  $P$  do plano tem coordenadas reais  $a$  e  $b$  e associamos o par ordenado  $(a, b)$  a este ponto.

Para localizar um ponto no espaço precisamos de 3 informações e assim representamos qualquer ponto no espaço pela tripla  $(a, b, c)$  de números reais. Estas 3 informações são dadas através de um sistema tridimensional de eixos ortogonais entre si, passando através de um ponto  $O$ , chamado origem, que chamaremos de eixos coordenados, os quais denotaremos por *eixo  $x$* , *eixo  $y$*  e *eixo  $z$* .

Para fazermos uma representação de  $\mathbb{R}^3$  no plano, temos de fazê-la, obviamente, em uma perspectiva que nos dê uma melhor visão dos objetos a representar. A maneira canônica é traçar os eixos  $z$  e  $y$  perpendiculares, sendo o eixo  $z$  na vertical apontando para cima como na figura abaixo:

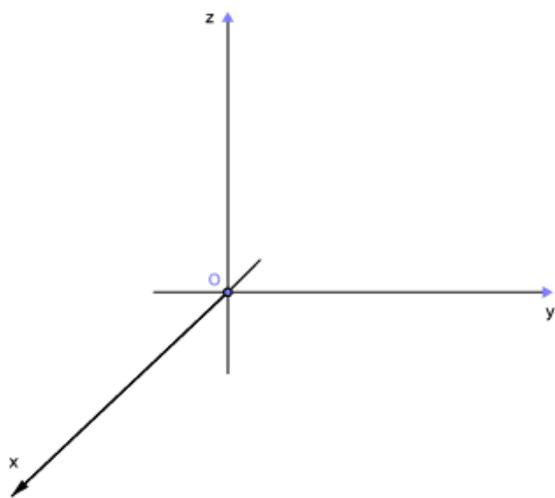


Figura 4.1: Eixos Coordenados

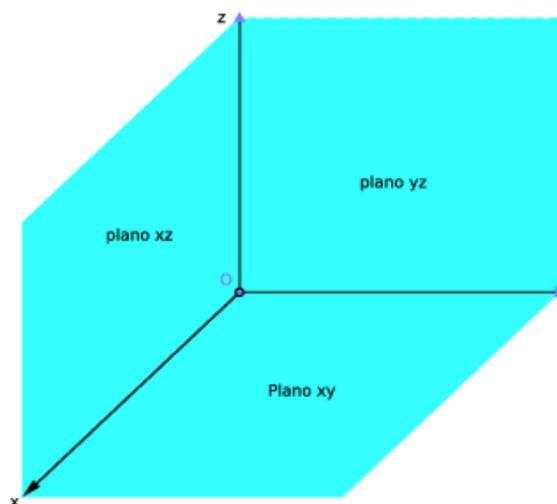


Figura 4.2: Planos Coordenados

Os três eixos coordenados determinam 3 planos coordenados ilustrados na figura 4.2:

### 4.2 Vetores no Espaço

Tal qual foi feito no plano, a todo ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço associamos o vetor  $u$  com ponto inicial na origem  $O = (0, 0, 0)$  e ponto final em  $P$  e denotamos simplesmente o vetor  $u = (x, y, z)$ . As operações de adição, subtração, multiplicação por escalar e produto escalar, bem como suas interpretações geométricas e vetoriais e suas propriedades são exatamente as mesmas que para vetores no plano, apenas com uma coordenada a mais.

A novidade aqui é o produto vetorial  $u \times v$ , entre dois vetores  $u$  e  $v$  que dá um vetor.

**Definição 4.1** Se  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , o produto vetorial de  $u$  por  $v$  é definido como sendo o vetor

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Ao invés de memorizar esta definição de produto vetorial, o que é uma coisa bem penosa, utiliza-se o determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Mostra-se facilmente que o vetor  $u \times v$  é ortogonal a  $u$  e a  $v$ , isto é,

$$(u \times v) \cdot u = 0 \quad \text{e} \quad (u \times v) \cdot v = 0$$

Assim, o vetor  $n = u \times v$  é perpendicular ao plano formado por  $u$  e  $v$ . O sentido deste vetor é determinado pela regra da mão direita: sendo o vetor  $u$  dado pelo indicador girando sobre o dedo médio sendo este o vetor  $v$ . O polegar apontará no sentido do vetor  $n$ .

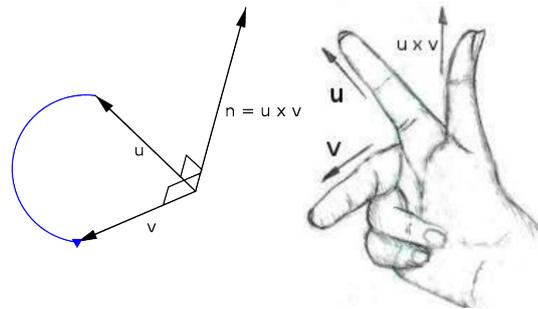


Figura 4.3: Regra da mão direita para produto vetorial

### 4.3 Retas no Espaço

Vimos que uma reta no plano é determinada por um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e uma direção  $u = (u_1, u_2)$  dados. Suas equações paramétricas, então, são:

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \end{cases}$$

Da mesma forma, no espaço uma reta  $L$  é determinada por um ponto dado  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e uma direção dada  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e, assim, suas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \end{cases}$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ . A equação vetorial da reta  $L$  é dada por

$$P = P_0 + tu$$

**Observação:** Se eliminarmos  $t$  nas equações acima obtemos o que chamamos de equações simétricas da reta:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

## 4.4 Planos no Espaço

Um plano no espaço é perfeitamente determinado por 3 pontos, isto é, por 3 pontos passa um único plano (Portanto, quando for a um bar procure sentar em banquinhos de 3 pernas. Eles nunca faltam!!!). Assim, dados os pontos  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  e  $R = (x_2, y_2, z_2)$ , podemos formar dois vetores, por exemplo,  $u = Q - P_0$  e  $v = R - P_0$ . O produto vetorial destes dois vetores, origina um vetor, chamado **vetor normal**  $n = (a, b, c) = u \times v$  que é ortogonal a  $u$  e  $v$  e, portanto, ortogonal ao plano. Agora, seja  $P = (x, y, z)$  um ponto qualquer do plano. Como  $P$  e  $P_0$  pertencem ao plano, o vetor  $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$  é ortogonal ao vetor  $n$ , assim,

$$n \cdot (P - P_0) = 0$$

e, portanto,

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ou seja,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que é a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e tem como vetor normal  $n = (a, b, c)$ .

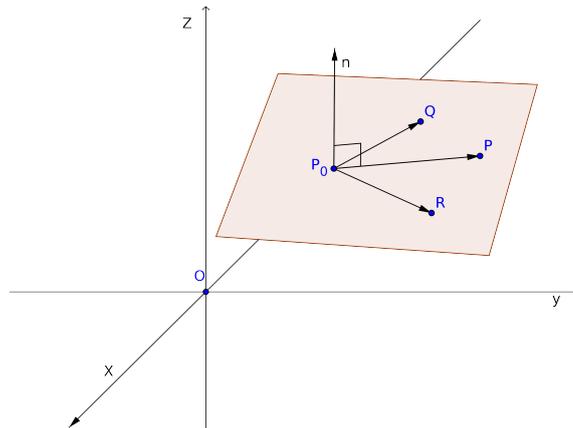


Figura 4.4: Plano que passa por 3 pontos

**Exemplo 4.1** Determinar a equação do plano que passa pelos pontos  $A = (1, 0, 2)$ ,  $B = (0, 2, 1)$  e  $C = (0, 0, 3)$ .

*Solução:* Podemos formar quaisquer dois vetores  $u$  e  $v$ , por exemplo:

$$u = B - A = (-1, 2, -1) \quad \text{e} \quad v = C - A = (-1, 0, 1)$$

Assim, obtemos o vetor normal ao plano

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (2, 2, 2)$$

Logo, a equação do plano que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  é

$$2(x - 1) + 2(y - 0) + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 3$$

**Exemplo 4.2** *Encontre o ponto de interseção da reta  $r$*

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = -1 - 2t$$

com o plano  $2x + y + 4z = 1$ .

*Solução:* A reta  $r$  encontra o plano no ponto  $P = (1 + 2t, 2 + t, -1 - 2t)$  para algum valor de  $t$ , se suas coordenadas satisfazem a equação do plano, isto é, se

$$2(1 + 2t) + (2 + t) + 4(-1 - 2t) = 1$$

Logo,  $t = -\frac{1}{3}$  e  $P = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$

## 4.5 Curvas no espaço

Quando um objeto se desloca no espaço, sua trajetória é uma curva  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^3$  e a sua posição em cada instante  $t$  é dado por 3 coordenadas que dependem deste parâmetro  $t$

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

Como no caso de curvas planas, estas funções reais são chamadas de equações paramétricas da curva  $\gamma$  e a função  $r$  que associa cada valor de  $t \in I \subset \mathbb{R}$  ao vetor  $(x(t), y(t), z(t))$  de  $\mathbb{R}^3$

$$r : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

é uma função vetorial com domínio no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  e imagem em  $\mathbb{R}^3$ . Neste caso a imagem de  $r$  é exatamente a curva  $\gamma$ .

**Obs.:** Todos os conceitos vistos no capítulo anterior sobre funções vetoriais de  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , limite, continuidade, integral e comprimento de arco, bem como as interpretações geométrica e física da derivada são estendidas naturalmente para funções vetoriais de  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , acrescentando-se uma coordenada a mais  $z(t)$ .

**Exemplo 4.3** *Esboce a curva dada pelas equações paramétricas*

$$x(t) = 2 \cos(t), \quad y(t) = 2 \sin(t) \quad e \quad z(t) = 3$$

*Solução:* Como  $x^2 + y^2 = 4$ , a projeção desta curva sobre o plano  $xy$  é uma circunferência de raio 2. Desde que o valor de  $z$  é constante e igual a 3, trata-se, então, de uma circunferência de raio 2 no plano  $z = 3$  e centro em  $(0, 0, 3)$ . Veja a figura 4.5:

**Exemplo 4.4** *Descreva a curva dada pelas equações paramétricas:* 

$$x(t) = 2 \cos(t), \quad y(t) = 2 \sin(t) \quad z(t) = \frac{t}{2}$$

Como  $x^2 + y^2 = 4$ , todo ponto  $P = (x, y, z)$  da curva deve pertencer a um cilindro de raio 2, pois a projeção no plano  $xy$  é uma circunferência de raio 2. Como  $z = \frac{t}{2}$ , esta curva deve se enrolar no cilindro à medida em que  $t$  vai variando. Obtemos, assim, uma curva chamada **hélice** (veja a figura 4.6).

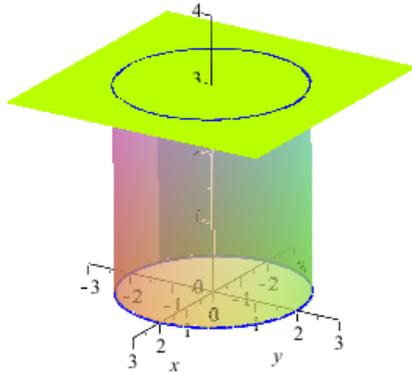


Figura 4.5: Circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  no plano  $z = 3$

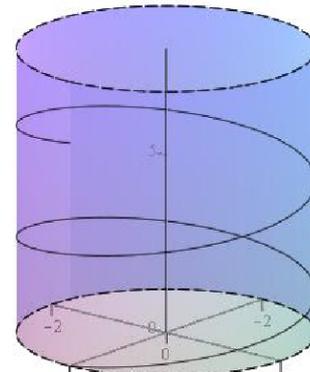


Figura 4.6: Hélice

## 4.6 Superfícies Cilíndricas e Quádricas

Na seção anterior já vimos um tipo de superfície, o plano. Estudaremos agora outros dois tipos: as cilíndricas e as quádricas.

### 4.6.1 Cilindros



Um cilindro é uma superfície gerada por uma reta (geratriz) que desliza sobre uma curva plana dada (diretriz) sempre paralela a uma reta dada.

Aqui veremos cilindro com a diretriz contida em um dos planos coordenados e a reta dada, ou geratriz, perpendicular a este plano. Neste caso, sua equação será a mesma da diretriz como veremos nos exemplos a seguir.

**Exemplo 4.5** Considere a diretriz  $x^2 + y^2 = 4$ , no plano cartesiano  $xy$ , e a geratriz perpendicular ao plano  $xy$ . Quando deslizamos a reta geratriz sobre a circunferência dada, obtemos uma superfície cilíndrica como a da figura 4.7. Observe que qualquer ponto  $P = (x, y, z)$  do cilindro projetado sobre o plano  $xy$  está na circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  e tem coordenadas  $P' = (x, y, 0)$ . Assim, a equação do cilindro independe da variável  $z$  e sua equação é a equação da diretriz, ou seja,

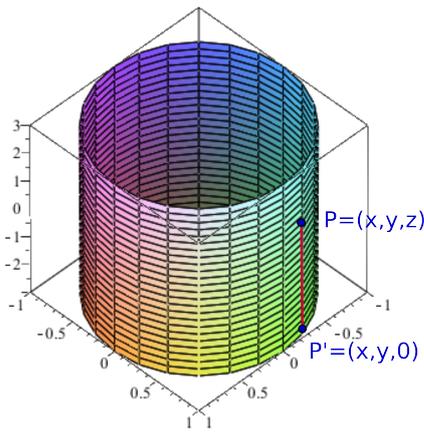
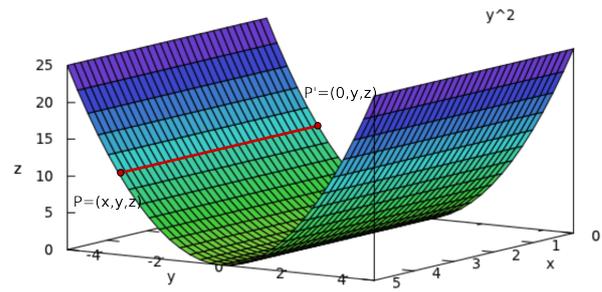
$$x^2 + y^2 = 4$$

**Exemplo 4.6** Considere a diretriz  $z = y^2$ , no plano cartesiano  $yz$ . Neste caso a geratriz é perpendicular ao plano  $zy$  e gera a superfície 4.8. Observe que qualquer ponto  $P = (x, y, z)$  do cilindro projetado sobre o plano  $zy$  está na parábola  $z = y^2$  e tem coordenadas  $P' = (0, y, z)$ . Assim, a equação do cilindro independe da variável  $x$  e sua equação é a equação da diretriz, ou seja,

$$z = y^2$$

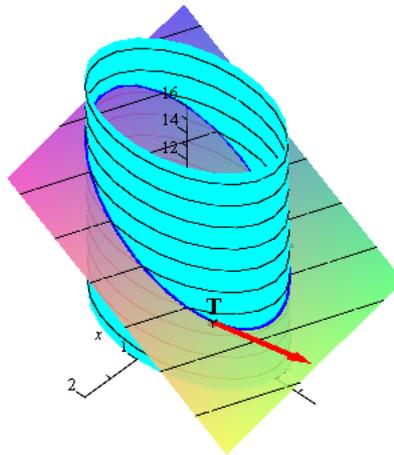
**Exemplo 4.7 (a)** Determinar as equações paramétricas da curva  $\mathbb{E}$ , interseção do cilindro

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ com o plano } x + 2y + z = 6\sqrt{2} \quad \text{Info}$$

Figura 4.7: Cilindro:  $x^2 + y^2 = 4$ Figura 4.8: Cilindro parabólico:  $z = y^2$ 

- (b) Determinar as equações paramétricas da reta tangente à  $\mathbb{E}$  no ponto  $T = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2} \right)$

Solução: (a) A figura 4.9 mostra a curva  $\mathbb{E}$  no espaço, interseção das duas superfícies.

Figura 4.9:  $\mathbb{E}$ : Interseção de cilindro com plano

Para encontrar as equações paramétricas de  $\mathbb{E}$ , considere um ponto  $P = (x(t), y(t), z(t))$  de  $\mathbb{E}$ . As coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  de  $P$  satisfazem a equação do cilindro e, assim, sua parametrização pode ser

$$x(t) = \cos(t) \quad \text{e} \quad y(t) = 2 \operatorname{sen}(t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

A coordenada  $z = z(t)$  pode ser obtida da equação do plano  $x + 2y + z = 6\sqrt{2}$ , logo

$$z(t) = 6\sqrt{2} - \cos(t) - 4 \operatorname{sen}(t)$$

(b) Para determinar as equações paramétricas da reta tangente à curva  $\mathbb{E}$ , precisamos do vetor que dá a direção da reta, que neste caso é a derivada do vetor  $r(t) = (\cos(t), 2 \operatorname{sen}(t), 6\sqrt{2} - \cos(t) - 4 \operatorname{sen}(t))$ , i.e.,  $v(t) = r'(t) = (-\sin(t), 2 \cos(t), \operatorname{sen}(t) - 4 \cos(t))$ , calculado no ponto  $T$ . Para isto precisamos saber o valor do parâmetro  $t$  quando  $r(t) = T$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \operatorname{sen}(t) &= \sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} - \cos(t) - 4 \operatorname{sen}(t) &= \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Vê-se facilmente que  $t = \frac{\pi}{4}$ . Assim, o vetor tangente será  $v(\frac{\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, -3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

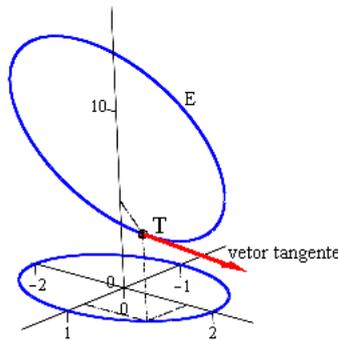


Figura 4.10: Vetor tangente à  $\mathbb{E}$

Portanto, as equações paramétricas da reta tangente à curva  $\mathbb{E}$  em  $T$  são:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t \quad y = \sqrt{2} + \sqrt{2}t \quad z = \frac{7\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

### 4.6.2 Superfícies Quádricas

Uma superfície quádrlica é o gráfico de uma equação de segundo grau em  $x, y$  e  $z$ . Tais superfícies são as análogas tridimensionais de elipses, parábolas e hipérboles. Sua forma mais geral é dada por

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$  são constantes reais dadas. Através de rotações e translações essa equação pode ser simplificada como no caso bidimensional, ficando, assim, mais fácil sua representação gráfica. Neste caso, seus eixos, como veremos, são coincidentes com os eixos coordenados. Se alguma das constantes  $D, E$  e  $F$  forem não nulas, teremos uma superfície com eixos rotacionados.

Veremos a representação gráfica destas quádrlicas para  $D = E = F = 0$ . Nestes casos a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

pode ser reduzida a  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$  através de uma translação, simplesmente completando-se os quadrados na equação dada.

Para se esboçar o gráfico de uma superfície no espaço, quando não temos um computador à nossa disposição, o que fazemos é determinar as curvas de interseções da superfície com os planos coordenados  $x = 0, y = 0$  e  $z = 0$ , chamadas de **traços** da superfície e também as curvas de interseções da superfície com planos paralelos aos planos coordenados, chamadas de seções da superfície.

**Exemplo 4.8** *Faça um esboço do gráfico da quádrlica com a equação dada, onde  $a, b$  e  $c$  são números reais positivos:*

1. **Elipsoide:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ⓘ

*Solução:* Fazendo  $z = 0$ , obtemos no plano  $xy$  o traço  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , que é a equação de uma elipse (curva azul na figura 4.11(a)).

Fazendo  $x = 0$ , obtemos no plano  $yz$  o traço  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , que é outra elipse (curva vermelha na figura 4.11(a)).

Para  $y = 0$ , obtemos no plano  $xz$ , o traço  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , que é outra elipse (curva verde na figura 4.11(a)).

Com estas três curvas já é possível se ter uma idéia e fazer um esboço do gráfico da superfície. Caso contrário, continuamos fazendo interseções com planos paralelos aos planos coordenados. Por exemplo, ao fazer interseções com planos  $z = k$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2(1 - \frac{k^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{k^2}{c^2})} = 1$$

obtemos elipses para  $-c \leq k \leq c$ , pois esta equação só é verdadeira para  $c^2 - k^2 > 0 \Leftrightarrow -c < k < c$ . Logo para  $k \leq -c$  e  $k \geq c$  não temos interseções.

O mesmo ocorre para planos paralelos aos planos  $xz$  e  $yz$ :

Para  $x = k$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq k \leq a$$

Para  $y = k$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \geq 0 \Leftrightarrow -b \leq k \leq b$$

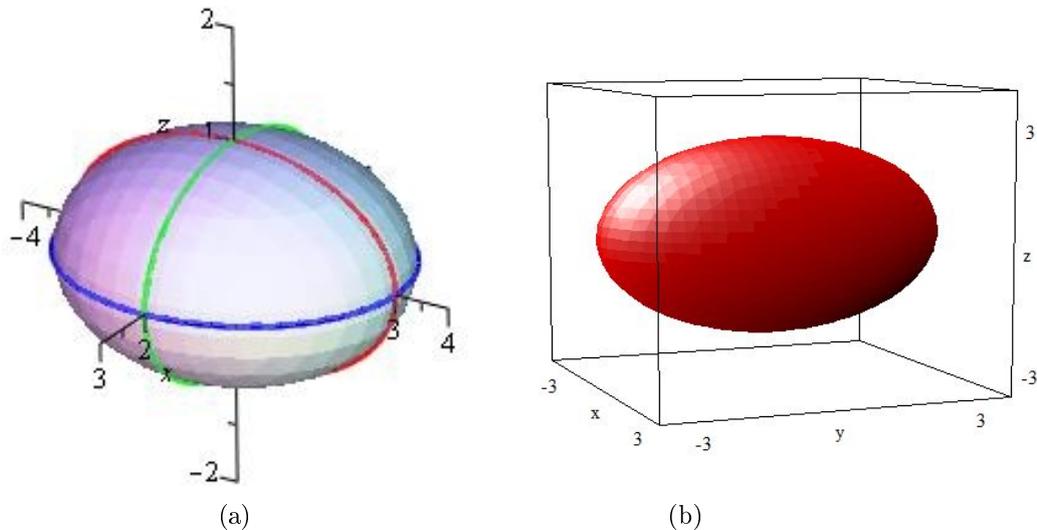


Figura 4.11: Elipsoide centrado na origem:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

A figura 4.11(b) mostra o elipsoide com muito mais traços.

2. **Hiperboloide de uma folha:** ⓘ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

3. *Solução:* Fazendo  $z = 0$ , obtemos a elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Fazendo as interseções com os planos coordenados  $x = 0$  e  $y = 0$ , obtemos, respectivamente os traços:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \quad \text{hipérbole no plano } yz \text{ (curva vermelha na figura 4.12(a))}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \quad \text{hipérbole no plano } xz \text{ (curva verde na figura 4.12(a))}$$

Para interseções com planos  $z = k$ , temos elipses (curvas azuis na figura 4.12(a)) para todo  $k \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2(1 + \frac{k^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 + \frac{k^2}{c^2})} = 1$$

Com isto obtemos a superfície chamada **Hiperboloide de uma folha**. A figura 4.12(b) mostra

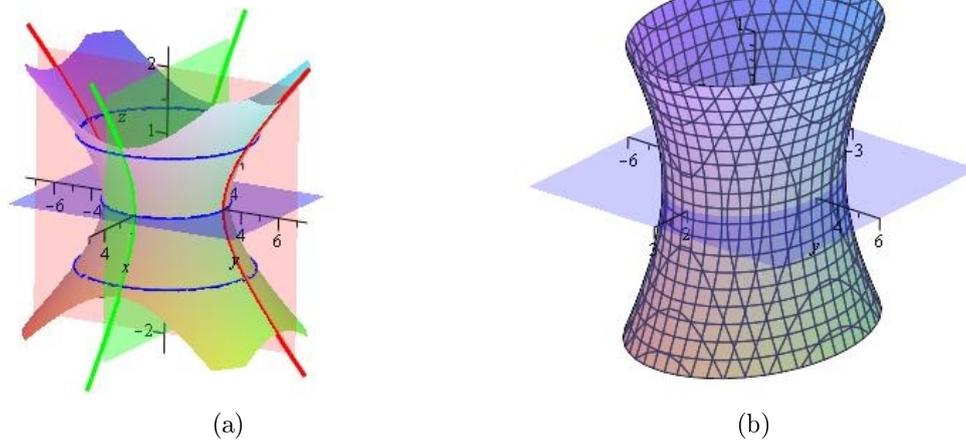


Figura 4.12: Hiperboloide de uma folha:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$

o hiperboloide com muito mais traços. Observe que o sinal negativo na equação indica a posição do hiperboloide. Neste exemplo, o sinal negativo está na variável  $z$  e o hiperboloide se prolonga infinitamente ao longo do eixo  $z$ .

4. **Hiperboloide de duas folhas:**  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ⓘ

*Solução:* Fazendo interseções com os planos coordenados  $x = 0$  e  $y = 0$ , obtemos como traços as hipérbolas  $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  e  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  com ramos voltados para o eixo  $z$  (curvas verde e vermelha na figura 4.13(a), respectivamente). Observe que não há interseção com o plano  $z = 0$  pois, caso contrário, teríamos  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , o que é impossível. Então, fazendo interseções com planos  $z = k$ ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

obtemos elipses se  $\frac{k^2}{c^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq -c$  e  $k \geq c$  (curva azul na figura 4.13(a)).

com isto obtemos a figura 4.13.

5. **Paraboloide Elíptico:**  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  ⓘ

*Solução:* A interseção com o plano  $z = 0$ ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

o que nos dá apenas o ponto  $O = (0, 0, 0)$ . A interseção com planos paralelos ao plano  $xy$ ,  $z = k > 0$ , nos dá os traços:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2k} + \frac{y^2}{b^2k} = 1$$

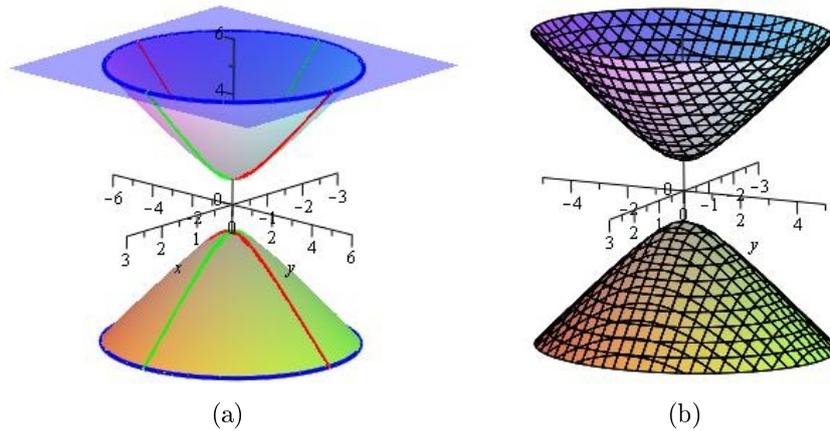


Figura 4.13: Hiperbolóide de 2 folhas:  $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$

que são elipses nos planos  $z = k$ , para todo  $k > 0$  (curva azul na figura 4.14(a)). A interseção com os planos coordenados  $x = 0$  e  $y = 0$ , são parábolas  $z = \frac{y^2}{b^2}$  e  $z = \frac{x^2}{a^2}$  (curvas vermelha e verde), respectivamente. Com isto, obtemos a figura 4.14.

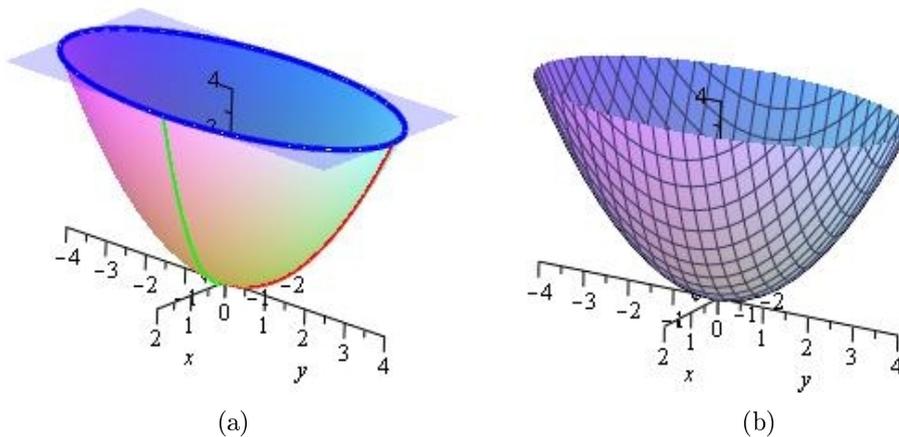


Figura 4.14: Parabolóide Elíptico:  $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$

#### 6. Parabolóide Hiperbólico - Sela $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ⓘ

*Solução:* O traço obtido pela interseção com o plano coordenado  $z = 0$ ,

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$$

que é um par de retas.

O traço no plano  $x = 0$  é a parábola  $z = \frac{y^2}{b^2}$  e no plano  $y = 0$  é a parábola  $z = -\frac{x^2}{a^2}$ .

Com apenas estas quatro curvas fica difícil esboçar o gráfico da quádrlica. Então, fazemos seções com planos  $z = k$ , que são paralelos ao plano  $xy$ , obtendo

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \Leftrightarrow -\frac{x^2}{a^2k} + \frac{y^2}{b^2k} = 1$$

que são hipérbolas. Quando  $k > 0$ , temos hipérbolas no plano  $z = k$  voltadas para o eixo  $y$  e quando  $k < 0$  temos hipérbolas voltadas para o eixo  $x$ , obtendo assim a figura 4.15.

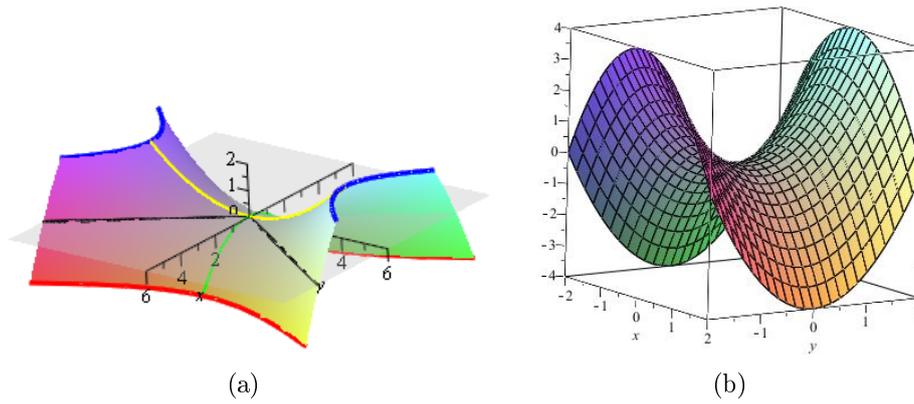


Figura 4.15: Parabolóide Hiperbólico (Sela):  $z = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

7. **Cone de folha dupla:**  $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  ⓘ

Solução: A interseção com o plano  $z = 0$ ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

o que nos dá apenas o ponto  $O = (0, 0)$ . O traço no plano  $y = 0$ , nos dá um par de retas (verdes na figura 4.16)

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow z = \pm \frac{c}{a}x$$

e o traço no plano  $x = 0$ , outro par de retas (vermelhas na figura 4.16)

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow z = \pm \frac{c}{b}y$$

As interseções com planos  $z = k$  são elipses nestes planos. Assim, obtemos a figura 4.16.

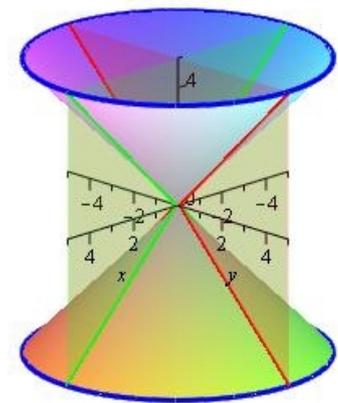


Figura 4.16:  $z^2 = x^2 + y^2$

8. **Esfera:** ⓘ Quando os coeficientes  $A, B$  e  $C$  da equação do segundo grau

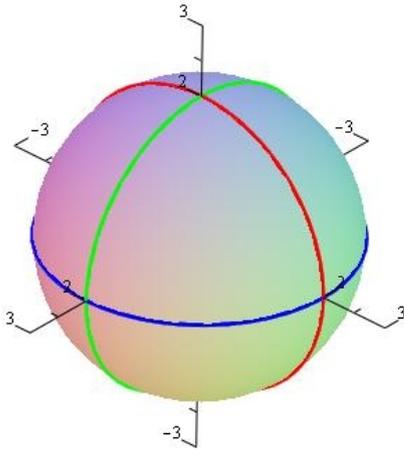
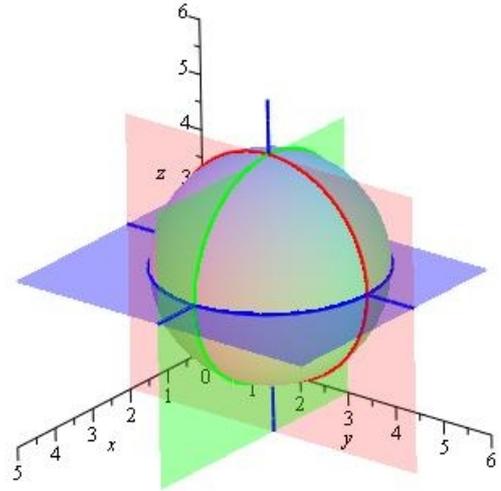
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

forem iguais, completando o quadrado, obtemos a equação de uma esfera do tipo

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

onde o ponto  $O = (x_0, y_0, z_0)$  é o seu centro e  $r$  seu raio. Observe que se o seu centro  $O = (0, 0, 0)$ , seus traços são circunferências com centro na origem e raio  $r$  (figura 4.17). Assim, a esfera com centro em  $(x_0, y_0, z_0)$  (figura 4.18) é uma translação da esfera com centro na origem através das equações:

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0$$

Figura 4.17:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ Figura 4.18  
 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4$ 

## 4.7 Exercícios

1. Determine as equações paramétricas da reta  $L$ , interseção dos planos

$$2x + y + 3z = 1 \text{ e } x - 4y - 2z = 1$$

(Resposta)

2. Dados os pontos  $A = (-1, 0, 2)$ ,  $B = (2, 1, 1)$  e  $C = (0, -1, -2)$ :

- (a) Encontre a equação cartesiana do plano  $\Pi$  que passa por estes 3 pontos.  
 (b) Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $P(1, 2, -1)$  e é perpendicular ao plano  $\Pi$ .

(Respostas)

3. (a) Determine as equações paramétricas da curva  $\gamma$ , interseção do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ .  
 (b) Encontre as equações paramétricas da reta tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $T = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ .

(Respostas)

4. Dados o cilindro  $S : 4x^2 + y^2 = 1$  e o plano  $\pi : 4x + 4y + z = 16$ ,

- (a) encontre uma parametrização da curva  $C = S \cap \pi$ ;  
 (b) determine as equações paramétricas da reta tangente à curva  $C$  no ponto  $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 16 - 3\sqrt{2}\right)$ .

(Respostas)

5. (a) Determine as equações paramétricas da curva  $\gamma$ , interseção da semi-esfera  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  com o cilindro  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  (Veja a figura 4.19). 

- (b) Encontre as equações paramétricas da reta tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $T = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)$ .

(Respostas)

6. Um objeto descreve uma trajetória no espaço com vetor posição  $r(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t)$ .

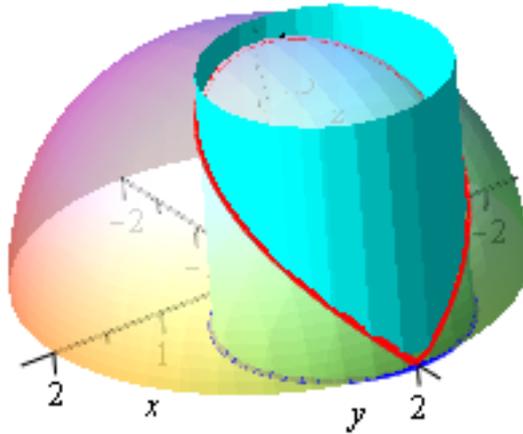


Figura 4.19

- (a) Encontre sua velocidade para  $t = \frac{\pi}{6}$
- (b) Faça um esboço da curva descrita pela sua trajetória e a interpretação geométrica do seu vetor velocidade encontrado em (a). (Respostas)
7. Parametrize a trajetória de uma partícula que se desloca no espaço a partir do ponto  $(x_o, y_o, z_o)$  mantendo-se paralela ao vetor  $v = (a, b, c)$ . (Resposta)
8. Dois pássaros voam segundo os seguintes vetores posição:
- $$\sigma_1(t) = (1 + t, 2 + t^2, 3) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (1 - t^2, 1 + t^2, 3), \quad t \geq 0$$
- (a) Mostre que eles nunca se chocarão.
- (b) Esboce os caminhos sobre os quais os pássaros se movem. Determine, caso exista, o ponto no qual estes caminhos se cruzam.
- (c) Calcule as velocidades dos pássaros no instante  $t = 2$ .
- (d) Se o primeiro pássaro parte do ponto  $(1, 2, 3)$ , determine a distância percorrida por ele após duas horas. (Respostas)
9. Um pássaro voa segundo uma curva definida por  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , de modo que  $\sigma''(t) + 2\sigma'(t) - 3\sigma(t) = (\cos t, 4, 4e^{-3t})$ , partindo do ponto inicial  $(0, 1, 3)$ , com velocidade vetorial inicial  $(0, 5, 4)$ . Determine a posição do pássaro em cada instante  $t$ . (Resposta)
10. A posição de um objeto  $A$  em cada instante  $t$  (horas) é dada por  $\sigma_1(t) = (300t, 1670t + 10t^2, 500 + 60t)$  (km) e a de outro objeto  $B$  é dada por  $\sigma_2(t) = (100 + 100t, -80 + 880t, 280t)$ . Pergunta-se:
- (a) Os objetos se chocarão?
- (b) Em que pontos as curvas de suas trajetórias se interceptam?
- (c) Descreva a trajetória do objeto B.
- (d) Encontre a velocidade do objeto  $A$  no instante  $t = 0$ . (Respostas)
11. Uma partícula, partindo do ponto  $B = (0, 0, 1)$ , percorre uma curva cujo vetor posição é dado por  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , de modo que sua velocidade  $\sigma'(t) = (y(t), t - x(t), 0)$ , para todo  $t \in [0, 2\pi]$ .

- (a) Determine a equação da curva.
- (b) Determine os instantes  $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ , nos quais sua velocidade escalar,  $v(t) = |\sigma'(t)| = 1$ .
- (c) Calcule o espaço percorrido pela partícula no intervalo  $[t_1, t_2]$ . (Respostas)
12. Um carro percorre uma curva cuja posição em cada instante é dada por  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  de modo que sua aceleração é  $\sigma''(t) = 2\sigma'(t) - \sigma(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Sabendo-se que ele parte do ponto  $P = (1, 0, 1)$  e com velocidade inicial  $v_0 = (2, 1, 2)$ :
- (a) Determine a sua posição  $\sigma(t)$  em cada instante.
- (b) Verifique se existe uma reta tangente à curva que seja paralela à reta  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 0, 3)$ . (Respostas)
13. Determine a equação do plano que:
- (a) passa pelo ponto  $P = (1, 2, -1)$  e é paralelo ao plano  $x + y + 2z - 3 = 0$
- (b) passa pelo ponto  $P = (1, 2, -1)$  e é perpendicular ao plano  $x + y + 2z - 3 = 0$
- (c) passa pelos pontos  $A = (2, 0, 1)$ ,  $B = (-2, -1, 1)$  e  $C = (1, -2, 2)$
- (d) passa pelo ponto  $A = (1, -2, 3)$  e contém a reta de equações paramétricas  $x = 2t$ ,  $y = 1 + t$  e  $z = -1 - 2t$ . (Respostas)
14. (a) Determine as equações paramétricas da reta  $r$  que passa pelo ponto  $P = (3, 1, 2)$  e é perpendicular ao plano  $\pi : x - 2y + z = 1$ .
- (b) Em que ponto a reta  $r$  intercepta o plano  $\pi$ ?
- (c) Em que ponto a reta  $r$  intercepta o plano  $xy$ ? (Respostas)
15. Identifique e esboce o gráfico das superfícies destacando os traços com os planos coordenados:
- |   |   |
|---|---|
| (a) $z = \ln y$                             | (f) $(z - 2)^2 = x^2 + z^2$                   |
| (b) $y^2 + (z - 2)^2 = 4$                   | (g) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$                    |
| (c) $y = \sin(x)$                           | (h) $x = 2y^2 + z^2$                          |
| (d) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$ | (i) $x = -z^2 + y^2$                          |
| (e) $y^2 = 4x^2 + z^2$                      | (j) $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ |

# Capítulo 5

## Funções de Várias Variáveis

### 5.1 Funções de duas variáveis

Em Cálculo I trabalhamos com funções de uma variável  $y = f(x)$ . Agora trabalharemos com funções de várias variáveis. Estas funções aparecem naturalmente na natureza, na economia e nos mais variados campos da ciência. Por exemplo:

- A temperatura em um determinado ponto da terra depende da latitude, da longitude e a altitude, ou seja, depende de 3 variáveis.
- O lucro de um determinado produto, depende do custo da matéria prima, do custo da mão de obra e em alguns casos de outros custos adicionais.

Neste capítulo iremos ver primeiro as funções de 2 variáveis.

**Definição 5.1** Dado um subconjunto  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ , uma função  $f$  de duas variáveis é uma regra que associa a cada par  $(x, y) \in \mathbb{D}$  um único valor real denotado por  $f(x, y)$ . O conjunto  $\mathbb{D}$  é chamado de domínio de  $f$  e sua imagem é o conjunto  $\{f(x, y); (x, y) \in \mathbb{D}\} \subset \mathbb{R}$ .

Quando não mencionamos o domínio  $\mathbb{D}$ , subentendemos que o domínio da  $f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  para o qual a regra definida por  $f$  vale. Também escrevemos, frequentemente,  $z = f(x, y)$  para os valores assumidos por  $f$  em um ponto qualquer  $(x, y)$ . As variáveis  $x$  e  $y$  são as variáveis independentes e  $z$  a variável dependente.

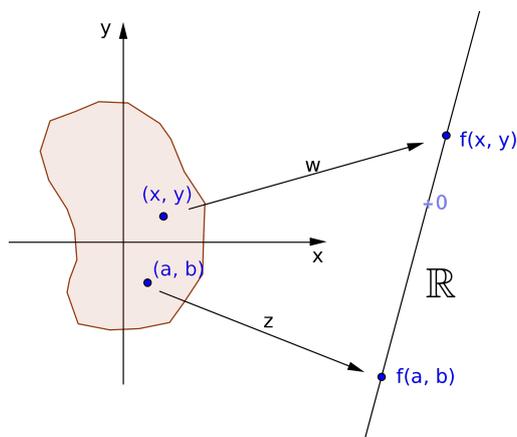


Figura 5.1: Diagrama de representação de uma função de 2 variáveis

**Exemplo 5.1** Determine o domínio e a imagem de  $z = f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

*Solução:* O domínio de  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  para os quais  $16 - x^2 - y^2 \geq 0$ , i.é.,

$$D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 16\}$$

que é um disco de centro  $(0, 0)$  e raio 4. A imagem de  $f$  é o conjunto

$$\{z; z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \text{ e } (x, y) \in \mathbb{D}\} = [0, 4]$$

**Exemplo 5.2** *Determine o domínio de*

$$z = f(x, y) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-y}$$

*Solução:* O domínio de  $f$  é o conjunto  $\mathbb{D} = \{(x, y); x \geq 1 \text{ e } x \neq y\}$ . Veja a figura 5.2:

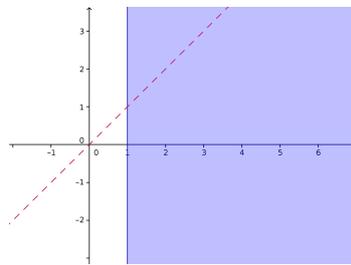


Figura 5.2

**Exemplo 5.3** *Determine o domínio e a imagem de  $z = f(x, y) = \ln(y - x^2)$*

*Solução:* A função  $\ln(y - x^2)$  é definida apenas para os pontos  $(x, y)$ , tais que,  $y - x^2 > 0$  ou  $y > x^2$ . A parábola  $y = x^2$  divide o plano  $\mathbb{R}^2$  em duas regiões, uma onde  $y < x^2$  e outra onde  $y > x^2$ . Para se verificar qual é a região em que  $y > x^2$ , pega-se um ponto qualquer para teste, por exemplo o ponto  $T = (0, 2)$  e verifica-se facilmente que este ponto pertence à região que queremos  $y > x^2$  (veja figura 5.3).

Como  $y - x^2 > 0$ , a imagem da função  $\ln(y - x^2)$  é todo o  $\mathbb{R}$ , que é a imagem da função logarítmica.

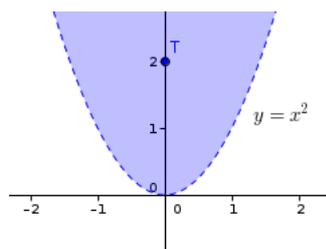


Figura 5.3: Domínio:  $y > x^2$

### 5.1.1 Gráficos e Curvas de Nível

O gráfico de uma função de 2 variáveis  $z = f(x, y)$  com um domínio  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$  é o conjunto:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{D}\}$$

Este conjunto é uma superfície no espaço, chamada normalmente de superfície  $z = f(x, y)$ . Para visualizar tal superfície, utilizamos a mesma técnica que foi usada para traçar as quádricas. Primeiro, determinamos seus traços, i.é, as curvas de interseção desta superfície com os planos coordenados. Se não conseguirmos uma visualização razoável, determinamos as curvas de interseção com planos paralelos aos planos coordenados, por exemplo,  $z = k$ , ou  $x = k$  ou  $y = k$ . Fazemos  $k$  variar quantas vezes forem necessárias para uma melhor visualização da superfície. Se mesmo assim não conseguirmos, o melhor é lançar mão de um computador com um bom programa gráfico para traçar superfícies (por ex. Maple, Mathematica, winplot, maxima, etc...).

**Exemplo 5.4** *Dentre as quádricas, os parabolóides são gráficos de função (figuras 4.14 e 4.15).*

**Observação:** Para verificar se uma superfície no espaço é gráfico de uma função, basta traçar uma reta perpendicular ao plano  $xy$  e verificar quantos são os pontos de interseção desta reta com a superfície. Se tiver mais que um ponto de interseção é porque a cada par  $(x, y)$  corresponde dois valores de  $z$  e, portanto, a superfície não é gráfico de uma função. Veja a figura 5.4.

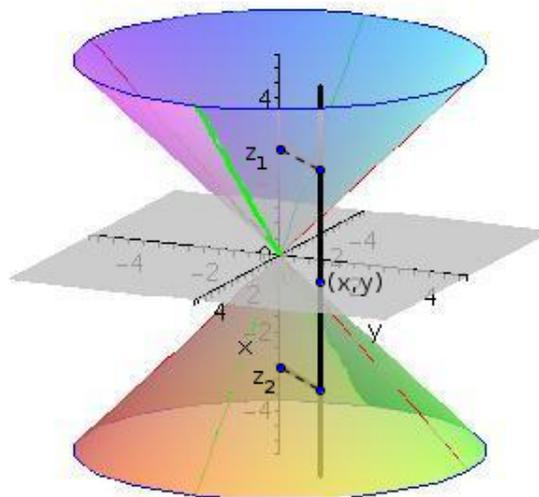


Figura 5.4: Superfície que não é gráfico de uma função

Como podemos observar, traçar o gráfico de uma função, a menos que tenhamos um computador com um bom programa gráfico, não é uma das tarefas mais fáceis. Além disso, um outro modo de se ter informações sobre o comportamento de uma função é através de suas curvas de nível, uma técnica muito utilizada em cartografia para se ver o mapa topográfico de uma região e ver a variação de altitude de um terreno.

Uma **curva de contorno** é a curva de interseção de uma superfície  $z = f(x, y)$  com o plano  $z = k$ . Sua projeção vertical no plano  $xy$  é a chamada **curva de nível**  $f(x, y) = k$  da função  $f$ . Ao variar a constante  $k$  obtemos um conjunto de curvas no plano  $xy$ , chamado **mapa de contorno**. O mapa de contorno é a representação bidimensional de uma superfície tridimensional  $z = f(x, y)$ . As figuras 5.5 e 5.6 ilustram bem o processo de se traçar o mapa de contorno. Na figura 5.5, foram feitas as interseções  $z = 3$ ,  $z = 5$ ,  $z = 7$ ,  $z = 9$ ,  $z = 11$  e  $z = 13$ . Na figura 5.6 temos as interseções com os planos  $z = 2, 3, 4, 5$ . 

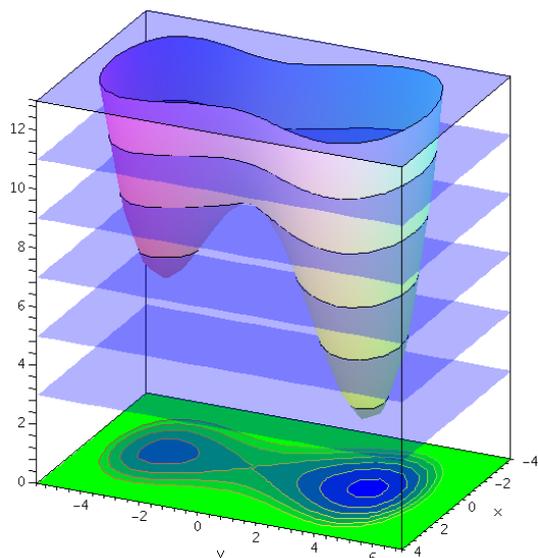


Figura 5.5

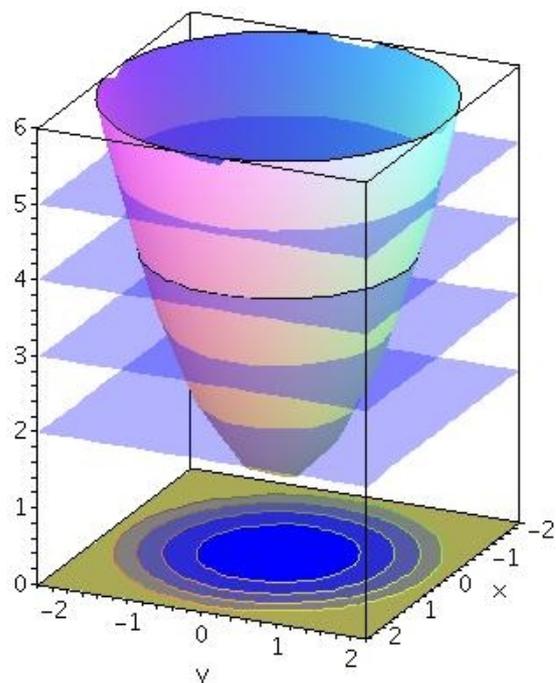


Figura 5.6

As figuras 5.7 e 5.8 mostram o gráfico da sela (paraboloide hiperbólico) e seu mapa de contorno com sete curvas de nível, respectivamente. ⓘ

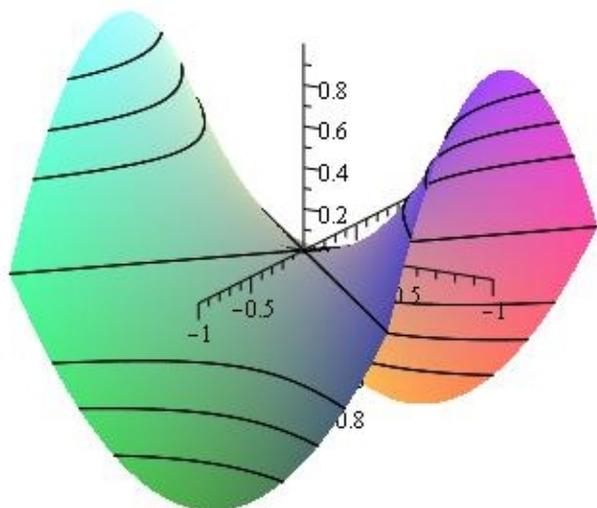
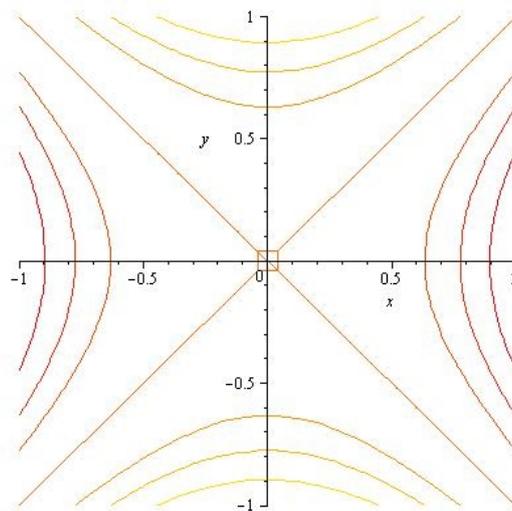
Figura 5.7: Sela  $z = -x^2 + y^2$ 

Figura 5.8: Curvas de nível da Sela

**Exemplo 5.5** A figura 5.9 mostra o gráfico da função  $z = \frac{-4x}{2x^2 + 2y^2 + 1}$  e a figura 5.10 mostra o gráfico desta função com as curvas de contorno. A figura 5.11 mostra o mapa de contorno desta função com as respectivas curvas de nível.

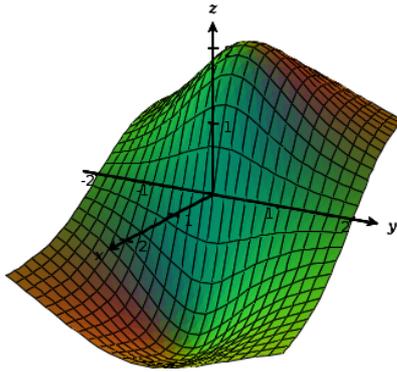


Figura 5.9:  $z = \frac{-4x}{2x^2+2y^2+1}$

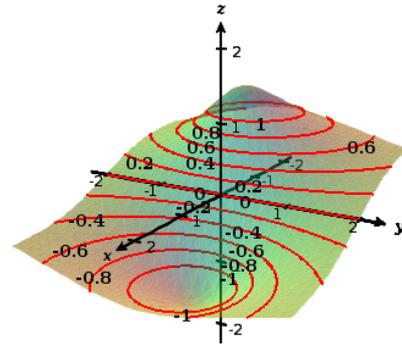


Figura 5.10: Curvas de contorno

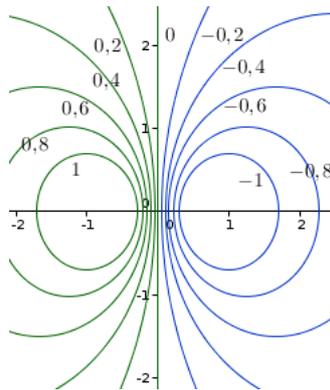


Figura 5.11: Curvas de Nível de  $z = \frac{-4x}{2x^2+2y^2+1}$

## 5.2 Limites e Continuidade

No caso de função de uma variável  $y = f(x)$ , dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , pudermos tomar  $f(x)$  tão próximo de  $L$  quanto quisermos, Ou seja, dado um número qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $x$  com

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

O fato de termos  $0 < |x - a| < \delta$ , significa que  $x$  está a uma distância de  $a$  menor que  $\delta$  do lado direito ou esquerdo de  $a$ .

No caso de uma função de 2 variáveis, dizemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

se a distância de  $f(x, y)$  a  $L$ ,

$$|f(x, y) - L|$$

é tão pequena quanto se queira desde que o ponto  $(x, y)$  esteja suficientemente próximo de  $(a, b)$ . Neste caso,  $(x, y)$  “estar suficientemente próximo” de  $(a, b)$ , significa que a distância entre  $(x, y)$  e  $(a, b)$  é menor que um certo número positivo  $\delta$  e assim o ponto  $(x, y)$  está em um disco de centro  $(a, b)$  e raio  $\delta$ . Uma definição mais precisa é:

**Definição 5.2** Seja  $z = f(x, y)$  definida sobre um conjunto  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$  contendo um disco  $D_r(a, b) = \{(x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$ , para algum  $r > 0$ . Dizemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $\delta > 0$ , tal que,

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in D_\delta(a, b)$$

Veja a ilustração 5.12.

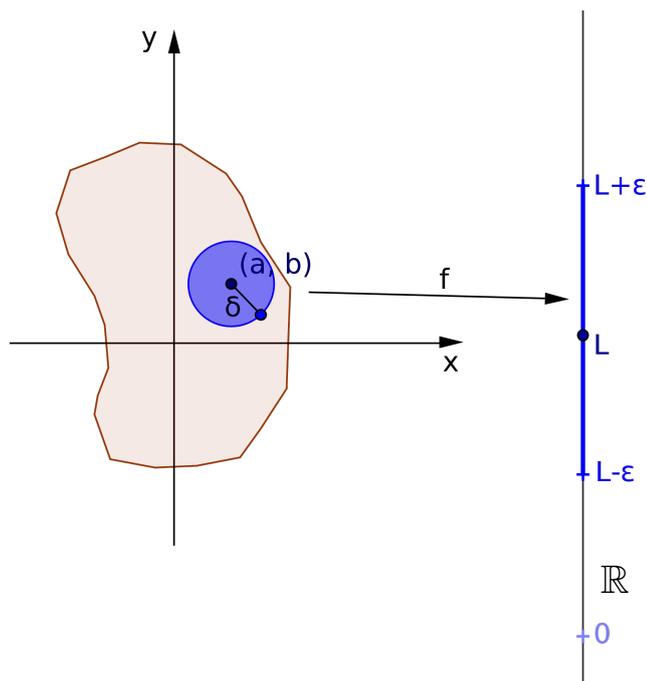


Figura 5.12

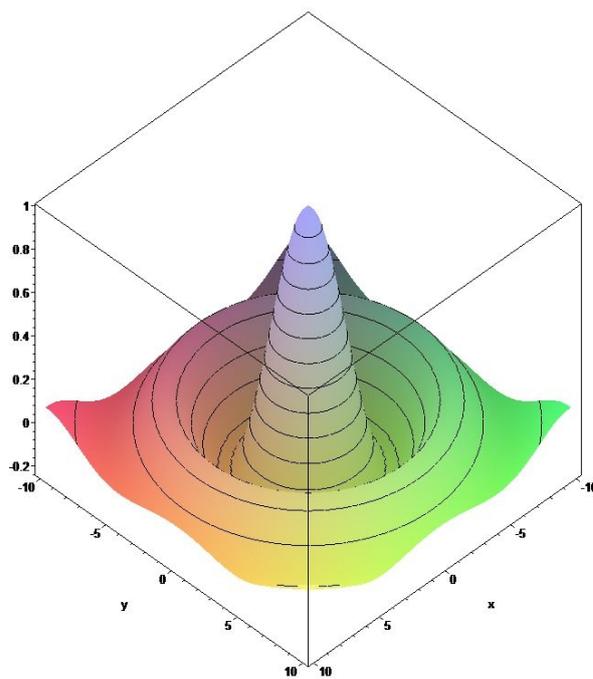


Figura 5.13:  $z = \frac{\text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

A função  $f$  leva o disco  $D_\delta(a, b)$  em um subconjunto do intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ , ou seja, à medida que diminuimos o valor de  $\delta$  o ponto  $(x, y)$  vai se aproximando de  $(a, b)$ . Ou seja, o ponto  $(x, y)$  se aproxima de  $(a, b)$  por qualquer caminho (curva) e não apenas pelos lados direito e esquerdo como acontece em uma dimensão.  Assim, para provarmos que uma função não tem limite em um ponto  $(a, b)$ , basta encontrarmos dois caminhos que levam  $(x, y)$  a  $(a, b)$  com limites diferentes. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 5.6** Seja  $z = f(x, y) = \frac{\text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . A função  $f$  está definida em todo  $\mathbb{R}^2$  com exceção da origem. Observe seu gráfico (figura 5.13) e veja que visualmente nos parece uma superfície suave definida em todos os pontos do plano, mesmo no ponto  $(0, 0)$ , que é o ponto onde a função não está definida. Vejamos o que acontece se tomarmos um ponto qualquer próximo da origem e fizermos este ponto se aproximar da origem.

Observe que as curvas de nível são circunferências concêntricas com centro na origem com equação

$$\frac{\text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k$$

Assim, se tomarmos circunferências com raio  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , quando  $r$  tende a zero

$$\frac{\text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\text{sen}(r)}{r} \rightarrow 1$$

Isto significa que qualquer ponto  $(x, y)$  tendendo a  $(0, 0)$  por qualquer caminho, o limite sempre será 1. Isto pode ser visto no gráfico 5.14.

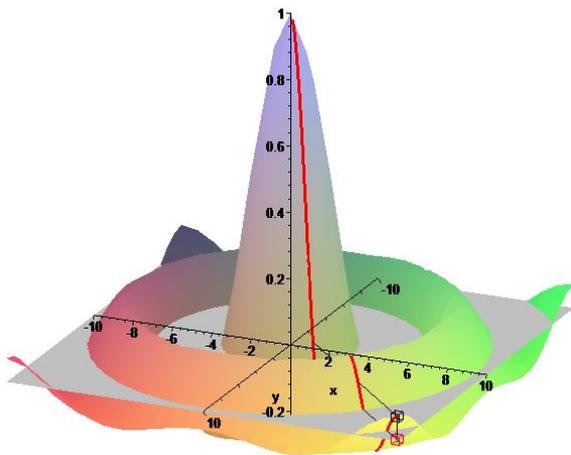


Figura 5.14:  $z = \frac{\text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

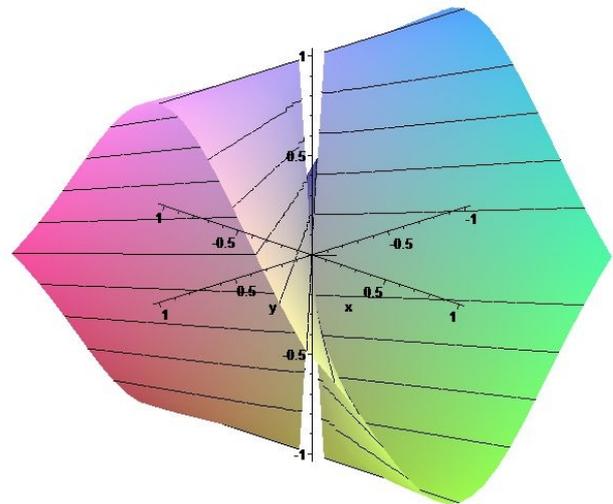


Figura 5.15:  $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

**Exemplo 5.7** Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{!}$$

A função não está definida em  $(0, 0)$ . Observando seu gráfico (figura 5.15) vemos um buraco próximo da origem. Calculando o limite por caminhos:

- caminho eixo x (figura 5.16):

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

- caminho eixo y (figura 5.17):

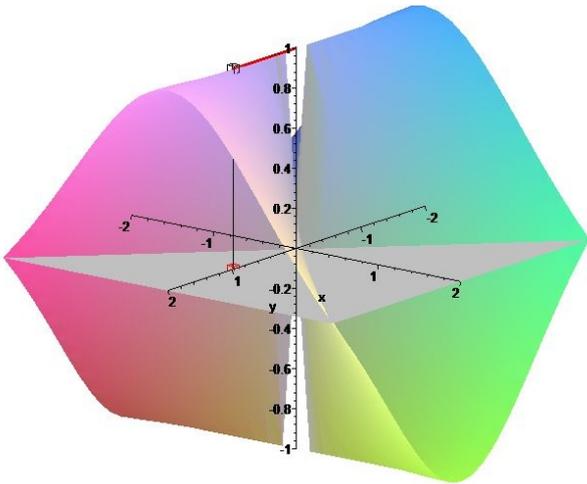
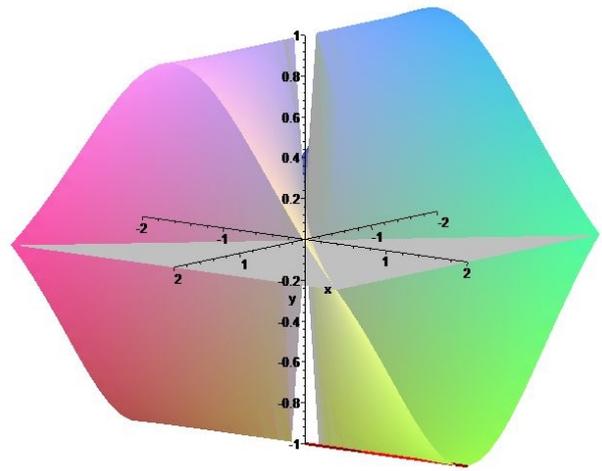
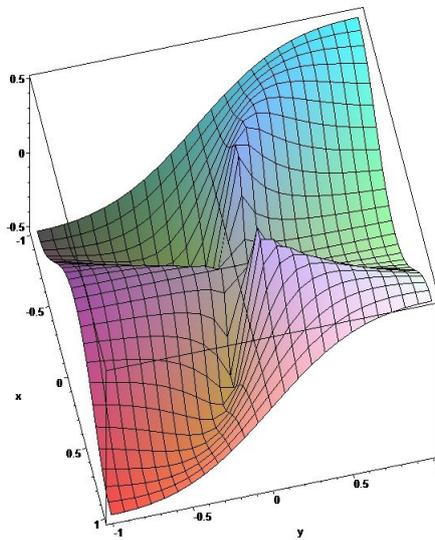
$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Vemos, assim, que o limite tem valores diferentes para caminhos distintos e, portanto, o limite não existe.

**Exemplo 5.8** Calcule o

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{!}$$

Calculando o limite por caminhos:

Figura 5.16: caminho eixo  $x$ Figura 5.17: caminho eixo  $y$ Figura 5.18:  $z = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 

- reta  $y = kx$ :

$$\lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 kx}{x^4 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2 + k} = 0$$

para qualquer valor de  $k$ . Portanto, o limite é zero sobre qualquer reta que passa pela origem (veja figura 5.19).

- parábola  $y = x^2$ :

$$\lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Assim, quando um ponto  $(x, y)$  vai para a origem sobre uma parábola (figura 5.20), o limite é igual a  $\frac{1}{2}$ . Logo, temos valores diferentes para o limite quando tomamos caminhos diferentes. Portanto, o limite não existe.

**Exemplo 5.9** Calcule o

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{3x^2 + 3y^2}$$

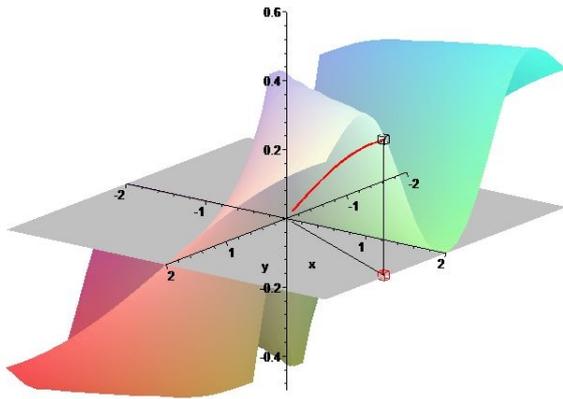


Figura 5.19: caminho  $y = kx$

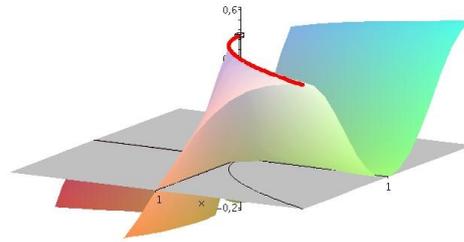


Figura 5.20: caminho  $y = x^2$

Observe que o gráfico de  $f$  (figura 5.21), parece uma superfície completamente lisa, embora, ela não esteja definida na origem. Isto nos leva a crer que o limite por qualquer caminho para a origem dará o valor zero.

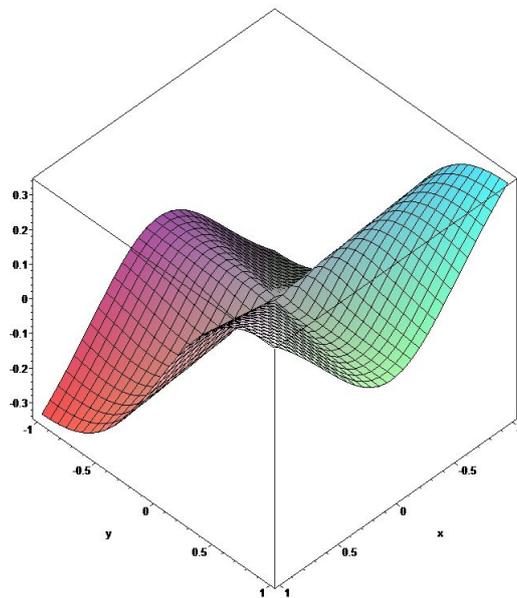


Figura 5.21:  $f(x, y) = \frac{2x^2 y}{3x^2 + 3y^2}$

Para exemplificar, calculemos o limite pelos caminhos:

- reta  $y = kx$  (figura 5.22):

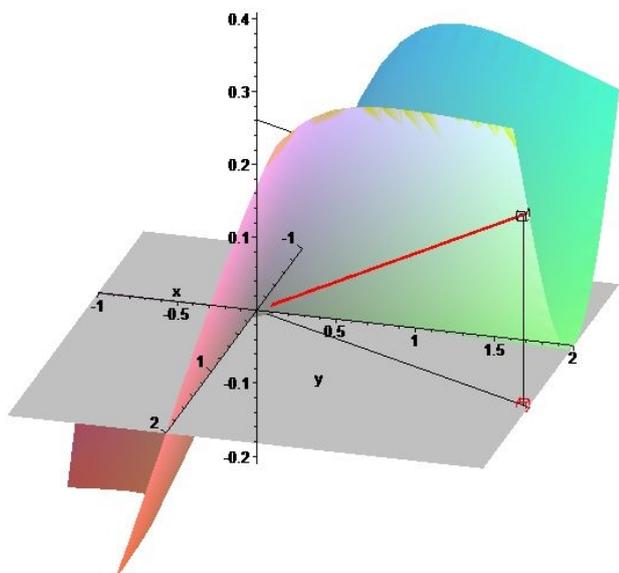
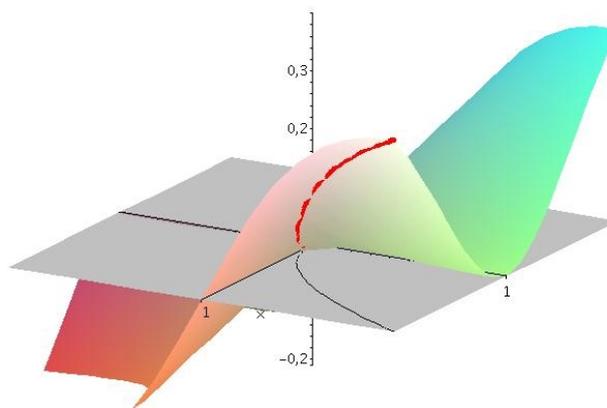
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 kx}{3x^2 + 3(kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx}{3(1 + k^2)} = 0$$

para qualquer valor de  $k$ . Portanto, o limite é zero sobre qualquer reta que passa pela origem.

- parábola  $y = x^2$  (figura 5.23):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 x^2}{3x^2 + 3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3(1 + x^2)} = 0$$

Evidentemente, isto não prova nada, pois não podemos fazer isto para “todos” os caminhos que vão para a origem. Neste caso, o que fazemos é utilizar o “Teorema do Sanduíche”, ou Teorema do

Figura 5.22: caminho  $y = kx$ Figura 5.23: caminho  $y = x^2$ 

Confronto. Observem que 

$$\left| \frac{2x^2y}{3(x^2 + y^2)} \right| \leq 2\frac{|y|}{3} = 2\frac{\sqrt{y^2}}{3} \leq 2\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}$$

Assim, como a última expressão vai pra zero quando  $(x, y) \rightarrow 0$ , então,  $f(x, y) \rightarrow 0$ . Veja a figura 5.24. Ela mostra o gráfico do  $|f(x, y)|$  sendo majorado pelo gráfico de  $\frac{2}{3}|y|$  que é majorado pelo gráfico do cone  $\frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ .

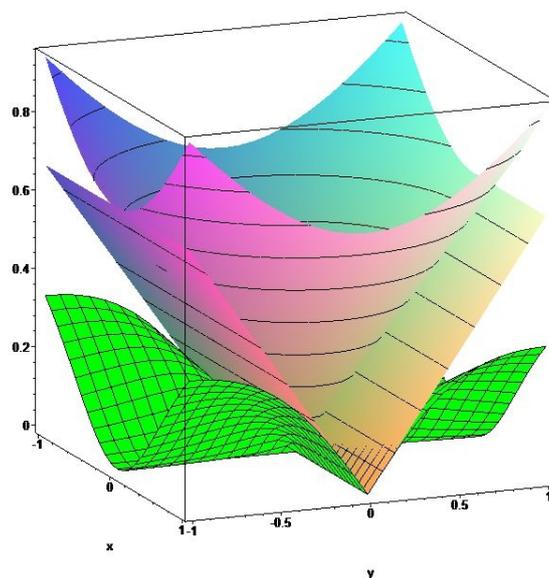


Figura 5.24: .

### 5.3 Continuidade

A definição de continuidade para funções de várias variáveis é a mesma que para função de uma variável:

**Definição 5.3** Uma função  $z = f(x, y)$  é contínua em um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Visualmente, uma função contínua é uma superfície sem buracos e, ou, rachaduras.

As funções dos exemplos 5.6 e 5.9 não está definidas na origem, embora seus gráficos aparentam estar sem buraco na origem, o que nos leva a crer que este é um ponto de descontinuidade removível. De fato, basta definir uma nova função com o valor do limite na origem. Assim, por exemplo, a função

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em todo  $\mathbb{R}^2$ .

A função do exemplo 5.7 apresenta um gráfico com um buraco na origem e mostramos que o limite não existe na origem e, portanto, a função é descontinua.

**Exemplo 5.10**

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4\} \\ 4, & (x, y) \in \{(x, y); x^2 + y^2 > 4\} \end{cases}$$

é uma função contínua em todo o  $\mathbb{R}^2$  (gráfico 5.25). Ao passo que a função do exemplo a seguir deixa de ser contínua sobre a circunferência de raio 2 (gráfico 5.26)

**Exemplo 5.11**

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4\} \\ 0, & (x, y) \in \{(x, y); x^2 + y^2 > 4\} \end{cases}$$

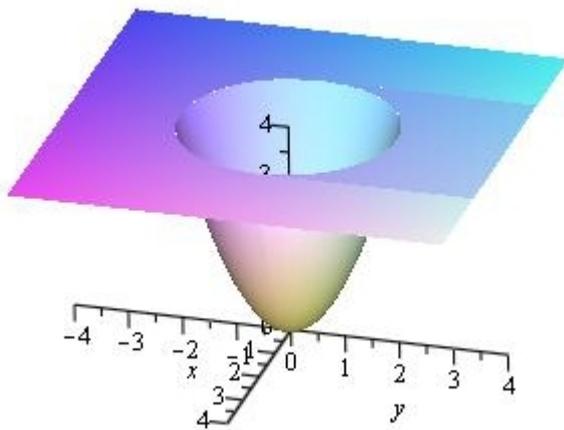


Figura 5.25

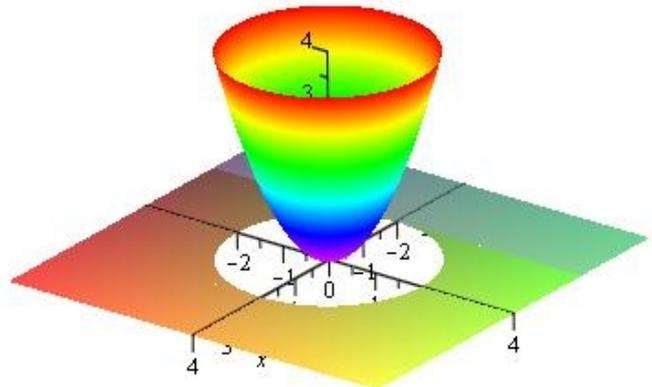


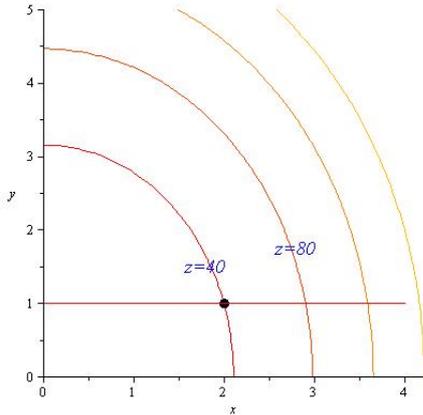
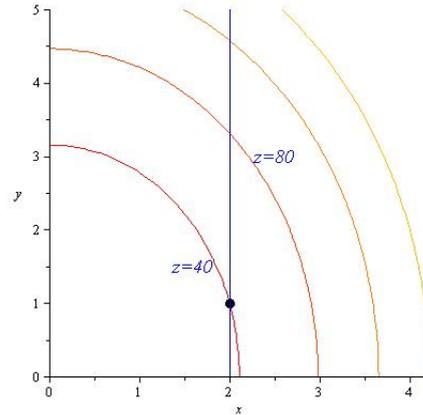
Figura 5.26

## 5.4 Derivadas Parciais

Antes de definirmos o conceito de derivada parcial vejamos o seguinte exemplo:

**Problema:** A temperatura em uma placa de metal em cada ponto  $(x, y)$  é dada por  $T(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ .

- (a) Determine a curva de nível que passa pelo ponto  $(2, 1)$ .
- (b) Uma formiga está no ponto  $(2, 1)$  e caminha na direção do eixo  $x$ , isto é, sobre a reta  $y = 1$  até o ponto sobre a curva de nível  $z = 80$ . Calcule a taxa média de variação da temperatura sofrida pela formiga.
- (c) Calcule, agora, a taxa (instantânea) de variação da temperatura sofrida pela formiga, em relação à distância andada na direção do eixo  $x$  sofrida pela formiga.
- (d) Se ela andar na direção do eixo  $y$ , qual é a taxa instantânea de variação de temperatura?

Figura 5.27: direção eixo  $x$ Figura 5.28: direção eixo  $y$ 

**Solução:** (a)  $T(2, 1) = 9 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 = 40$ . Logo a equação da curva de nível que passa pelo ponto  $(2, 1)$ , chamada de isoterma, é

$$9x^2 + 4y^2 = 40$$

(b) Como podemos ver na figura 5.27, a temperatura no ponto  $(2, 1)$  é de 40 graus. Determinando o ponto de interseção da curva de nível  $z = 80$  com a reta  $y = 1$ ,

$$9x^2 + 4 = 80 \Rightarrow x = 2,9$$

Assim a taxa média de variação de temperatura para a formiga ir do ponto  $(2, 1)$  até ponto  $(2,9, 1)$  é aproximadamente:

$$\frac{80 - 40}{2,9 - 2} = \frac{40}{0,9} = 44,4 \frac{\text{graus}}{\text{metro}}$$

na direção do eixo  $x$ .

(c) Para calcularmos a taxa (instantânea) de variação de temperatura no ponto  $(2, 1)$  em relação à distância andada na direção do eixo  $x$ , observe que  $y$  permanece constante e igual a 1, o que varia é apenas a variável  $x$ . Neste caso, o que fazemos é calcular o limite das taxas médias de variação de temperatura em relação à variação de  $x$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(2 + \Delta x, 1) - T(2, 1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9(2 + \Delta x)^2 + 4 - 40}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{36\Delta x + 9\Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 36 + 9\Delta x \\ &= 36 \frac{\text{graus}}{\text{metro}} \end{aligned}$$

andado na direção do eixo  $x$ .

(d) Se a formiga andar na direção do eixo  $y$ , a variável  $x$  permanece constante e neste caso calculamos o limite,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{T(2, 1 + \Delta y) - T(2, 1)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{40 + 4(1 + \Delta y)^2 - 40}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{8\Delta y + 4(\Delta y)^2}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 8 + 4\Delta y \\ &= 8 \frac{\text{graus}}{\text{metro}} \end{aligned}$$

andando na direção do eixo  $y$ .

Observe que em (c) quando calculamos a taxa de variação de temperatura na direção do eixo  $x$ ,  $y$  permanece constante. De forma similar, quando calculamos a taxa de variação de temperatura na direção do eixo  $y$  no item (d), a variável  $x$  permanece constante. Isto nos leva à definição de Derivada Parcial:

**Definição 5.4** A *Derivada Parcial de  $f$  em relação a  $x$*  em um ponto  $(x, y)$  é definida como sendo o valor do limite

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se este limite existir.

**Definição 5.5** A *Derivada Parcial de  $f$  em relação a  $y$*  em um ponto  $(x, y)$  é definida como sendo o valor do limite

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

se este limite existir.

**Exemplo 5.12** Calcule as derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  de  $z = f(x, y) = x^2 y^3 \text{sen } xy$ .

**Solução:** Para calcular a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$ , considera-se  $y$  como uma constante e deriva-se  $f$  normalmente como uma função de uma variável  $x$ . Primeiro aplica-se a regra do produto e depois a regra da cadeia para função de uma variável,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2)'y^3 \text{sen } xy + x^2 y^3 (\text{sen } xy)' = 2xy^3 \text{sen } xy + x^2 y^3 \text{sen}' xy \cdot (xy) = 2xy^3 \text{sen } xy + x^2 y^4 \cos xy$$

Para calcular a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$ , considera-se  $x$  como uma constante e da mesma forma obtém-se,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 \text{sen } xy + x^3 y^3 \cos xy$$

**Exemplo 5.13** Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  :

(a)  $z = \sqrt{x^2 + 3xy^2}$

(b)  $z = e^{x^3 y} + (x^5 + 10xy) \ln xy^2$

**Solução:** (a)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + 3y^2}{2\sqrt{x^2 + 3xy^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6xy}{2\sqrt{x^2 + 3xy^2}}$$

(b)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2ye^{x^3y} + (5x^4 + 10y) \ln xy^2 + (x^5 + 10xy) \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3e^{x^3y} + 10x \ln xy^2 + (x^5 + 10xy) \frac{2}{y}$$

### 5.4.1 Interpretação Geométrica da Derivadas Parciais



A figura 5.29 nos mostra a interpretação geométrica da derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ . Quando derivamos em relação a  $x$  mantemos a variável  $y$  fixa. Com isto temos uma função de uma variável  $x$ ,  $z = f(x, y_0)$ . O gráfico desta função de uma variável  $x$  é a curva  $C_1$ , obtida pela interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $y = y_0$ . A curva  $C_1$  tem uma reta tangente  $T_1$  no ponto  $P$  do gráfico de  $f$  no plano  $y = y_0$ .

A derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  representa, então, a tangente do ângulo  $\alpha$ , que é o ângulo que a reta tangente  $T_1$  forma com a reta  $y = y_0$  paralela ao eixo  $x$ , ou seja, ela é a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $z = f(x, y_0)$  (curva  $C_1$  no ponto  $P$  no plano  $y = y_0$ ).

Da mesma forma, a figura 5.30 nos mostra a interpretação geométrica da derivada parcial de  $f$  com relação a  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . O plano  $x = x_0$  intercepta o gráfico de  $f$  na curva  $C_2$ , que é o gráfico da função  $z = f(x_0, y)$ . A curva  $C_2$  tem uma reta tangente neste plano que forma um ângulo  $\beta$  com a reta  $x = x_0$  paralela ao eixo  $y$ . Assim, a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , é igual ao valor da tangente do ângulo  $\beta$ , ou seja, ela é a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $z = f(x_0, y)$  (curva  $C_2$ ) no ponto  $P$  no plano  $x = x_0$ .

## 5.5 Derivadas de Ordem Superior

Como vimos nos exemplos da seção anterior, as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  de uma função  $z = f(x, y)$  são, também, funções de duas variáveis. Assim, podemos considerar novamente suas derivadas parciais, chamadas de derivadas parciais de segunda ordem de  $z = f(x, y)$ , assim definidas:

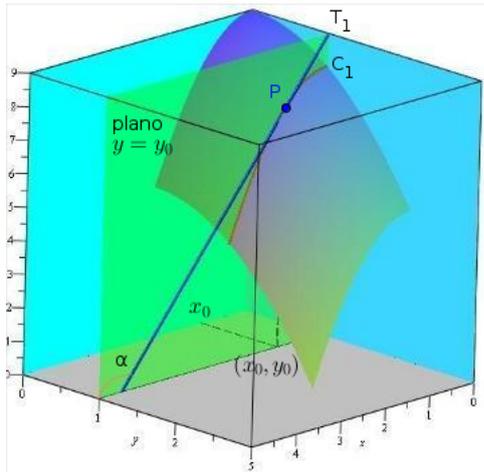


Figura 5.29:  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

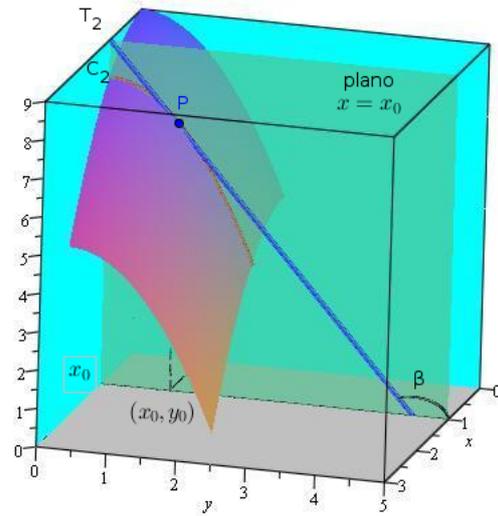


Figura 5.30:  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\begin{aligned}
 f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
 f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo podemos ter derivadas parciais de 3ª ordem, 4ª ordem, ...

**Exemplo 5.14** Determine as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de  $z = f(x, y) = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$

Solução:

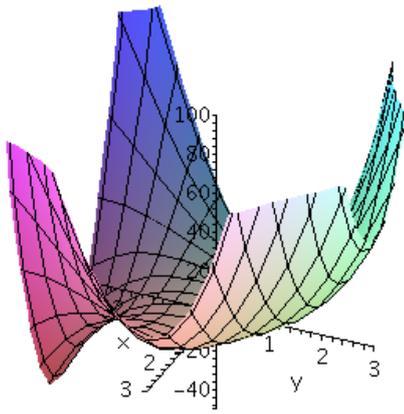
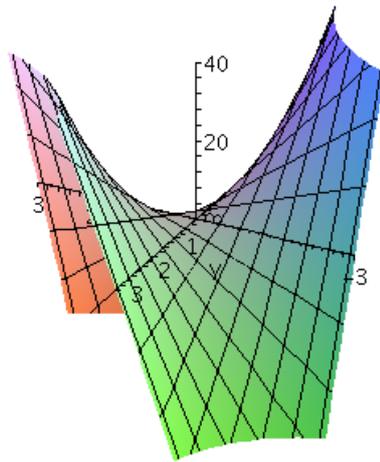
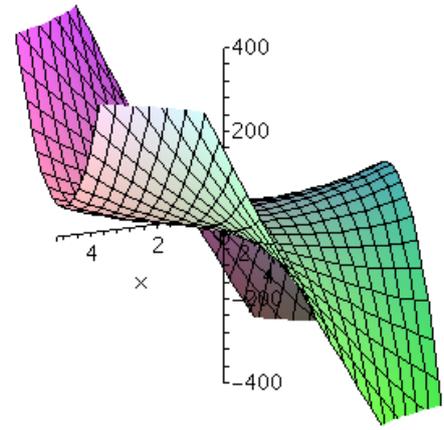
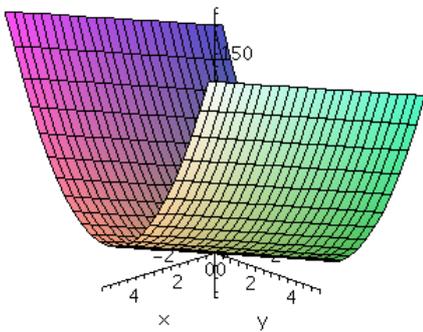
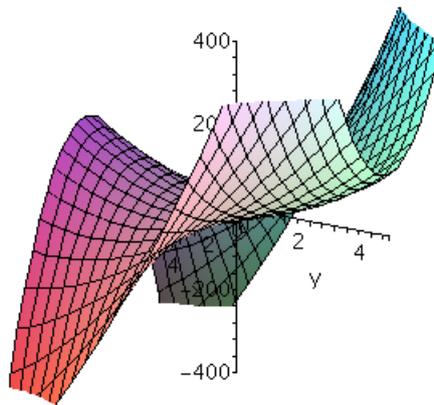
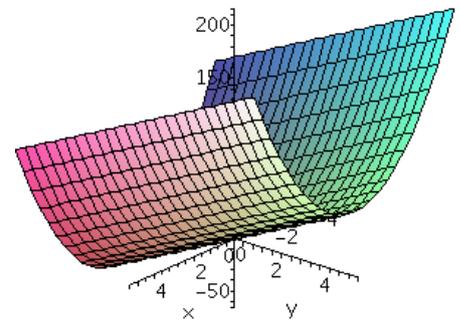
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 + 6xy^2 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 6x + 6y^2 \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= 6y^2 + 6x^2y & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 12y + 6x^2 \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & &= 12xy
 \end{aligned}$$

Veja seus gráficos mostrados nas figuras de 5.31 a 5.36.

**Exercício 5.1** Determine as derivadas parciais mistas de  $z = xy + \text{sen } xy$

Solução:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= y + y \cos xy \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 + \cos xy - xy \text{sen } xy \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= x + x \cos xy \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 + \cos xy - xy \text{sen } xy
 \end{aligned}$$

Figura 5.31:  $z = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$ Figura 5.32:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12xy$ Figura 5.33:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$ Figura 5.34:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6y^2$ Figura 5.35:  $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2 + 6x^2y$ Figura 5.36:  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y + 6x^2$ 

Observe que, nos dois exemplos acima, as derivadas parciais mistas  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  coincidem. Este fato não é uma coincidência, isto se verifica para a grande maioria das funções com as quais trabalhamos em Cálculo. O exercício 20 mostra que a igualdade nem sempre se verifica.

As condições que garantem a igualdade das derivadas parciais mistas são dadas pelo próximo teorema do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765).

**Teorema 5.1** *Se  $z = f(x, y)$  tem derivadas parciais mistas contínuas, então, elas são iguais, isto é,*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

## 5.6 Planos Tangentes

Vimos em Cálculo I que se uma reta é tangente ao gráfico de uma função de uma variável em um ponto  $P$ , à medida que nos aproximamos deste ponto o gráfico da função e a reta praticamente se confundem. Este conceito geométrico se aplica também no caso de funções de 2 variáveis. Neste caso, o conceito de tangência de um plano à uma superfície que é gráfico de uma função de 2 variáveis é o mesmo: À medida que nos aproximamos do ponto de tangência o plano e a superfície vão se confundindo. Ou, se pode pensar ainda que, à medida que damos “zoom” em um ponto da superfície,

a superfície vai se tornando mais e mais um plano. Veja na figura 5.37, a sequência de gráficos de um parabolóide com um plano tangente à medida que damos “zoom”: 

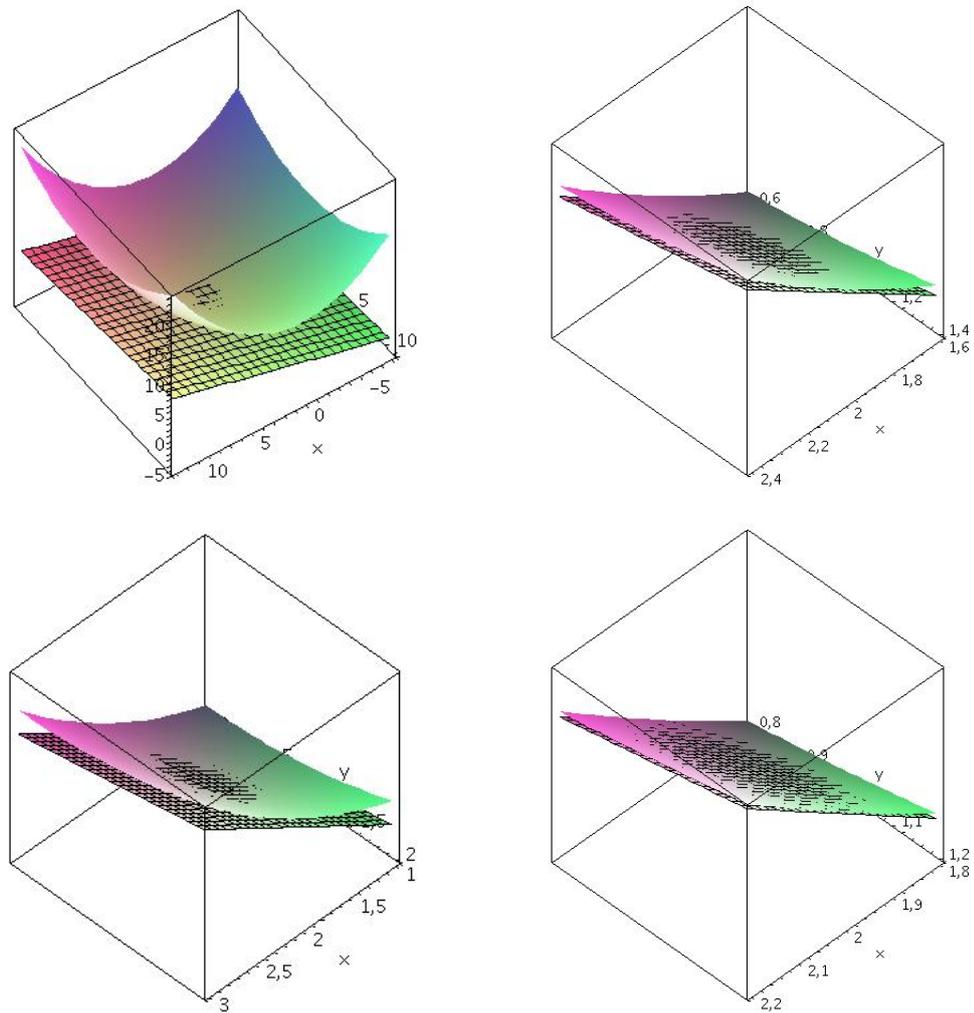


Figura 5.37: “zoom” de um plano tangente em um ponto de um parabolóide

Vejamos a seguir um exemplo de uma superfície que não tem plano tangente na origem. Observe o gráfico do cone  $z^2 = x^2 + y^2$ . Qualquer plano que passe pela origem é perfeitamente distinguível do cone, por mais que nos aproximemos da origem (veja 5.38). 

Vamos supor, então, que uma superfície  $S$ , gráfico de uma função  $z = f(x, y)$ , tenha plano tangente em um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , onde  $z_0 = f(x_0, y_0)$ .

Já vimos que as derivadas parciais de  $z = f(x, y)$  expressam as inclinações de duas retas tangentes  $r_x$  e  $r_y$  às curvas  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$  de interseção da superfície  $S$  com planos verticais  $x = x_0$  e  $y = y_0$  nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, como mostra a figura 5.39. Portanto, estas duas retas tangentes definem um plano e, evidentemente, se  $S$  tem um plano tangente, este plano contém estas duas retas (veja figura 5.40).

Observe que as curvas  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$  tem parametrizações naturais, respectivamente:

$$\gamma_x := \begin{cases} x = x \\ y = y_0 \\ z = f(x, y_0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_y := \begin{cases} x = x_0 \\ y = y \\ z = f(x_0, y) \end{cases}$$

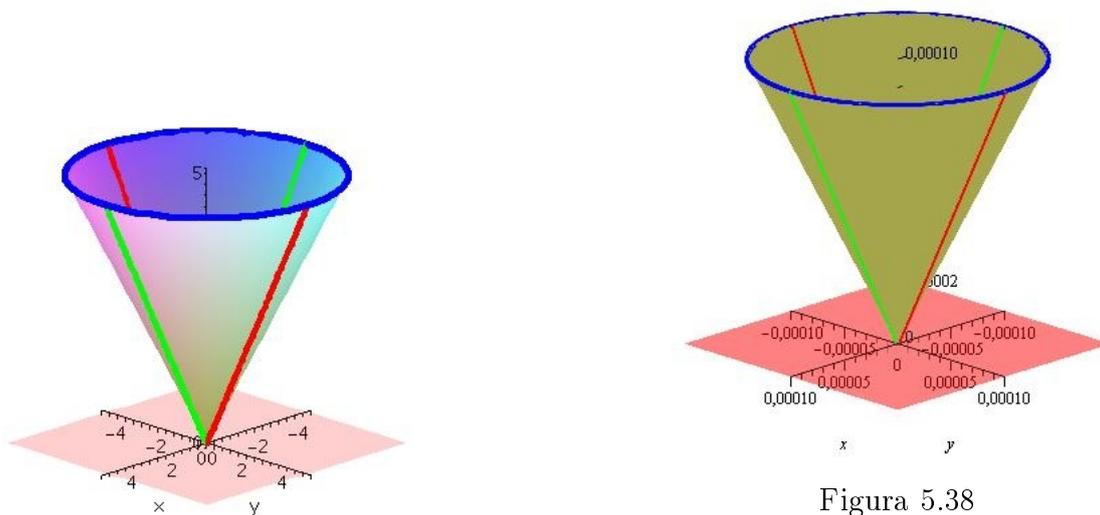


Figura 5.38

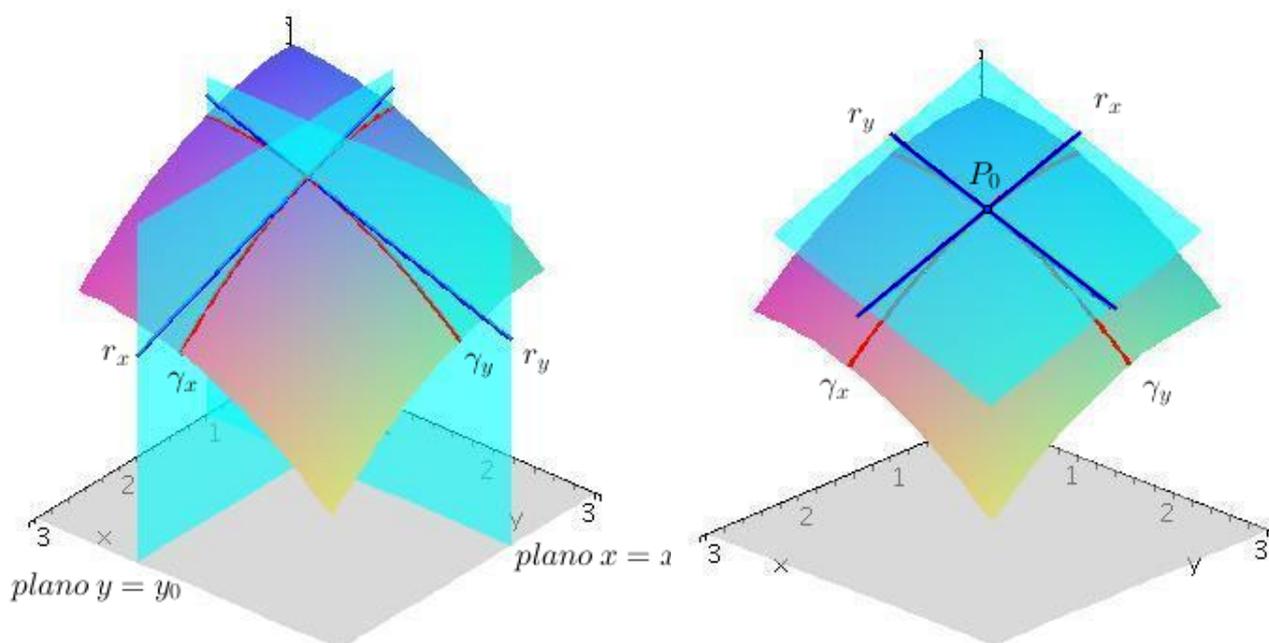


Figura 5.39

Figura 5.40

e, assim, tem-se

$$\gamma'_x(x_0) := \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \\ z' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma'_y(y_0) := \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 1 \\ z' = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Assim, os vetores  $u_x = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$  e  $u_y = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$  dão as direções das retas  $r_x$  e  $r_y$ , respectivamente (veja figura 5.41).

Assim, o vetor  $n$ , normal ao plano tangente no ponto  $P_0$ , é obtido como:

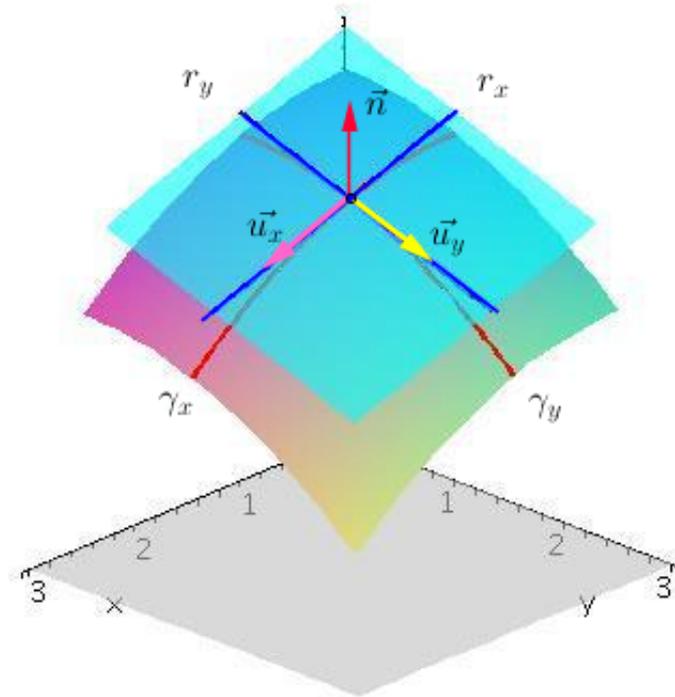


Figura 5.41

$$\begin{aligned}
 n = u_x \times u_y &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \vec{k} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \vec{j} \\
 &= \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Assim, se  $P = (x, y, z)$  é um ponto qualquer do plano, a equação do plano tangente é obtida pelo produto escalar do vetor  $n$  e o vetor do plano  $P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ,

$$n \cdot (P - P_0) = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ou seja, a equação do plano tangente é dada por:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (5.2)$$

**Exercício 5.2** Considere o parabolóide  $z = f(x, y) = 1 + 4x^2 + y^2$

- (a) Determine a equação do plano tangente ao parabolóide no ponto  $P = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5)$ .
- (b) Determine o ponto  $Q$  de interseção da reta perpendicular ao gráfico de  $f$  em  $P = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5)$  com o plano  $xy$ .

*Solução:* (a) O plano tangente ao parabolóide no ponto  $P = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5)$  tem equação

$$z = f\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)(y - \sqrt{3})$$

Como  $f(x, y) = 1 + 4x^2 + y^2$ , então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) = 4 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

Logo, a equação do plano tangente é dada por

$$z = 5 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{3}(y - \sqrt{3})$$

(b) Como vimos em 5.1, um vetor normal ao parabolóide no ponto  $P$  é dado por

$$n = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right), -\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)\right) = (-4, -2\sqrt{3}, 1)$$

Assim, as equações paramétricas da reta perpendicular ao parabolóide no ponto  $P$  são dadas por:

$$x(t) = \frac{1}{2} - 4t, \quad y(t) = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}t \quad \text{e} \quad z(t) = 5 + t$$

O ponto  $Q$ , de interseção desta reta com o plano  $xy$ , ou seja,  $z = 0$ , será encontrado para  $t = -5$ . Logo,  $Q = (\frac{41}{2}, 11\sqrt{3}, 0)$ .

Observe que se o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$  tem plano tangente em um ponto, este plano contém todas as retas tangentes ao gráfico desta função neste ponto. Logo, existem as derivadas parciais de  $f$  neste ponto. O próximo exemplo mostra que, embora existam as derivadas parciais de  $f$  na origem, a função pode não ter plano tangente.

**Exemplo 5.15** *Considere a função*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Veja o gráfico desta função (figura 5.42) e observe que ela contém os eixos  $x$  e  $y$ . Logo, os eixos  $x$  e  $y$  são tangentes à superfície e as derivadas parciais*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

*Porém, ela não tem plano tangente na origem, como mostram os gráficos das figuras 5.43, 5.44 e 5.45. Por mais que nos aproximemos da origem, podemos perfeitamente distinguir a superfície do plano. Observe que a interseção da superfície com o plano  $y = x$  é a curva de equações paramétricas*

$$x = t, \quad y = t \quad \text{e} \quad z = \frac{|t|}{\sqrt{2}}. \quad \text{!}$$

Iremos ver na próxima seção que a existência do plano tangente está relacionada, como no caso de uma variável, à diferenciabilidade da função.

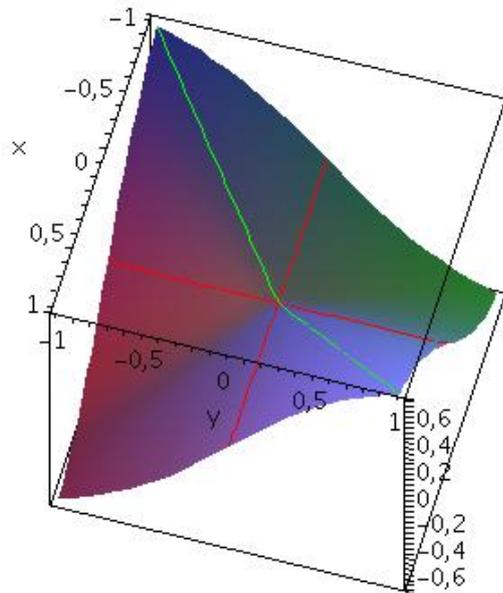


Figura 5.42:  $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

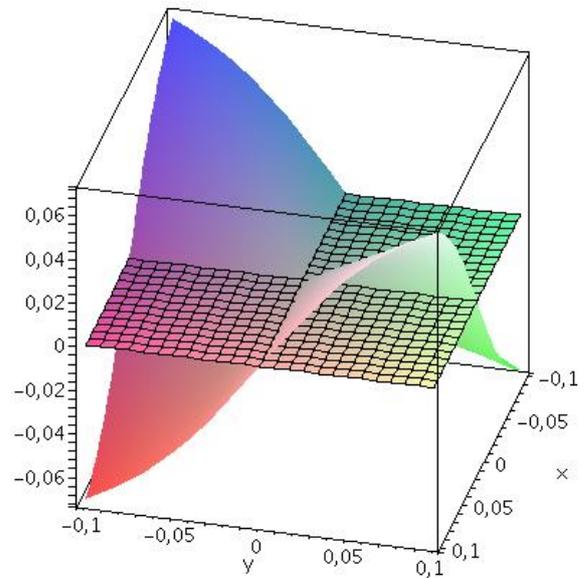


Figura 5.43

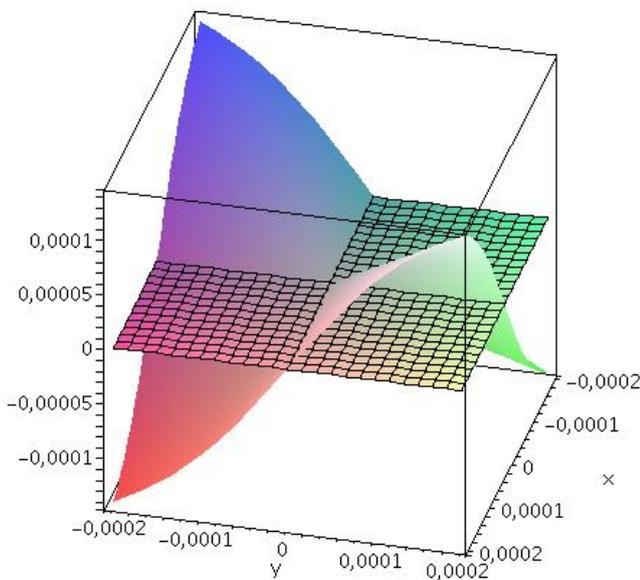


Figura 5.44

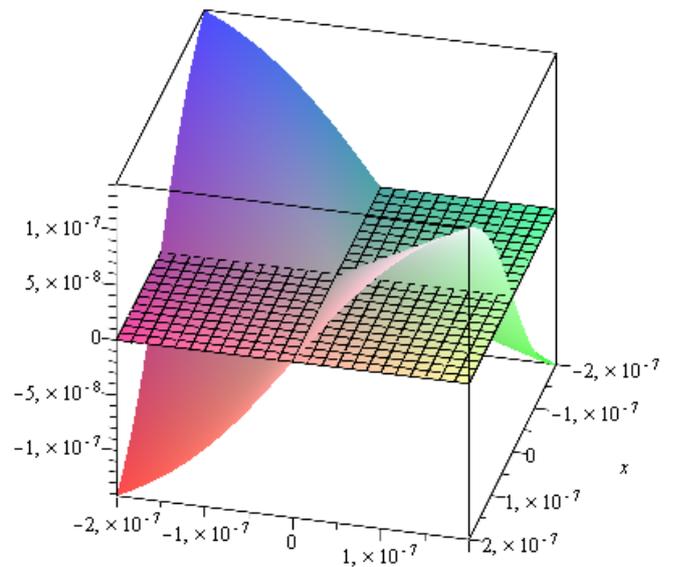


Figura 5.45

## 5.7 Diferenciabilidade

Vimos em Cálculo I, a definição de derivada de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em um ponto  $x_0$  como sendo o valor do limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Sua interpretação geométrica é a inclinação de uma reta tangente não vertical passando pelo ponto  $P_0 = (x_0, f(x_0))$ . Como já vimos, a reta tangente se confunde com o gráfico de  $f$  nas proximidades

do ponto de tangência  $(x_0, f(x_0))$ . Assim, podemos aproximar o valor de  $f(x)$ , para  $x$  próximo de  $x_0$ , pelo valor da reta tangente no ponto  $P_0$  mais um erro (figura 5.46), i.é,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon$$

Ao fazermos  $x$  tender a  $x_0$ , teremos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varepsilon}{x - x_0}$$

e se  $f$  é derivável em  $x_0$ ,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{então, necessariamente o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varepsilon}{x - x_0} = 0$$

Isto nos leva à definição de diferenciabilidade:

**Definição 5.6** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $x_0$  se  $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varepsilon$ , onde  $m, \varepsilon \in \mathbb{R}$  e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varepsilon}{x - x_0} = 0$$

Claramente, uma função  $f$  ser diferenciável em  $x_0$  é equivalente a ela ser derivável e neste caso,  $m = f'(x_0)$ . Ou seja,  $f$  é diferenciável em  $x_0$  se ela puder ser aproximada em um ponto  $x$  próximo de  $x_0$  por uma reta tangente  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  e o erro cometido  $f(x) - t(x) = \varepsilon \rightarrow 0$  mais rápido do que  $x \rightarrow x_0$  (veja figura 5.46).

Este conceito de diferenciabilidade se aplica para funções de 2 variáveis. De modo intuitivo, dizemos que uma função  $z = f(x, y)$  é diferenciável em um ponto  $(x_0, y_0)$ , se existir um plano, não vertical, tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Denotando  $x - x_0 = \Delta x$  e  $y - y_0 = \Delta y$ , temos,

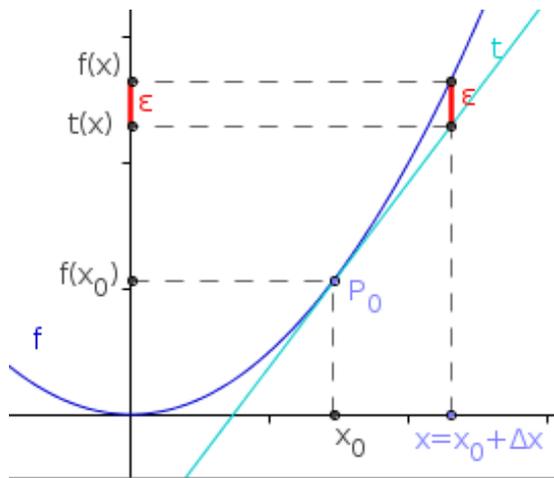


Figura 5.46: Diferenciabilidade de 1 variável

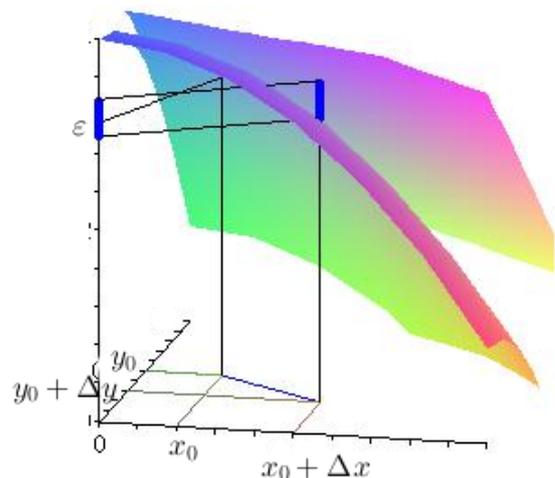


Figura 5.47: Diferenciabilidade de 2 variáveis

**Definição 5.7** Uma função  $z = f(x, y)$  é diferenciável em  $P_0 = (x_0, y_0)$ , se, e só se, existem constantes reais  $m$  e  $n$ , tais que,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + m\Delta x + n\Delta y + \varepsilon, \quad \text{onde} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Veja a figura 5.47. Neste caso,  $m = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $n = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

De fato: Na definição 5.7 de diferenciabilidade (definição 5.7), o erro  $\varepsilon$  é uma função do ponto  $P_0$  e dos acréscimos  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , isto é,

$$\varepsilon = \varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - m\Delta x - n\Delta y$$

Como o  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$ , então,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0)}{\|(\Delta x, 0)\|} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) - m\Delta x}{|\Delta x|} = 0$$

logo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{|\Delta x|} - m \frac{\Delta x}{|\Delta x|} \right) = 0$$

Agora, se  $\Delta x > 0 \Rightarrow |\Delta x| = \Delta x$  e, se  $\Delta x < 0 \Rightarrow |\Delta x| = -\Delta x$ , de modo que

$$0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{|\Delta x|} - m \frac{\Delta x}{|\Delta x|} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} - m \right)$$

e, portanto,  $m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ .

De modo análogo, se mostra que  $n = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

Portanto, **se uma função é diferenciável em um ponto  $P$ , ela tem derivadas parciais em  $P$** . O exemplo 5.15 mostra que a recíproca não é verdadeira, ou seja, a simples existência das derivadas parciais não implica em diferenciabilidade.

Observe ainda que, o limite na definição 5.7, está dizendo que o erro  $\varepsilon$  na aproximação pelo plano tangente tende a zero mais rápido do que o ponto  $(x, y)$  tende a  $(x_0, y_0)$  e que, portanto, o plano se confunde com a superfície próximo do ponto de tangência  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

**Exemplo 5.16** *Vimos no exemplo 5.15 que a função*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*tem derivadas parciais na origem iguais a zero e que não tem plano tangente passando pela origem, logo ela não é diferenciável na origem. Mostre utilizando a definição.* 

**Solução:** Para mostrar que  $f$  não é diferenciável na origem, basta provar que o limite

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

não existe.

Calculando este limite pelo caminho  $y = x$ , obtém-se

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{2\Delta x^2} = \frac{1}{2}$$

Pelo caminho  $x = 2y$ ,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta y^2}{4\Delta y^2 + \Delta y^2} = \frac{2}{5}$$

**Exemplo 5.17** Mostre que  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

*Solução:* Calculemos o erro na aproximação em um ponto qualquer  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y \\ &= (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2 - 2x\Delta x - 2y\Delta y \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$$

Portanto,  $f$  é diferenciável em qualquer ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Como no caso de funções de uma variável, o próximo teorema mostra que

### diferenciabilidade $\implies$ continuidade

**Teorema 5.2** Se  $z = f(x, y)$  é diferenciável em  $P_0 = (x_0, y_0)$ , então,  $f$  é contínua em  $P_0$ .

*Dem:* Pela definição de continuidade, temos que provar que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

De fato, se  $f$  é diferenciável em  $P_0$ , existem constantes  $m$  e  $n$ , tais que,

$$\begin{aligned}\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} (f(x_0, y_0) + m\Delta x + n\Delta y + \varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) \\ &= f(x_0, y_0) + \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} (m\Delta x + n\Delta y) + \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &= f(x_0, y_0) + \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &= f(x_0, y_0) + \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \|(\Delta x, \Delta y)\| \\ &= f(x_0, y_0) + \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \|(\Delta x, \Delta y)\| \\ &= f(x_0, y_0) + 0 \cdot 0 \\ &= f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Como no caso de uma variável, a recíproca do teorema acima não é verdadeira. Basta tomar como exemplo o cone. O cone de uma folha é contínuo em qualquer ponto, porém, não tem plano tangente na origem e, portanto, não é diferenciável.

**Exemplo 5.18** Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ .

*Solução:* Já vimos no exemplo 5.8 que o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

não existe. Logo,  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ . Isto implica que  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ , pelo teorema 5.2.

Note que as derivadas parciais existem e são iguais a zero na origem. Isto devido ao fato de que, como foi visto no exemplo 5.8, o limite de  $f$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  por retas é igual a zero, e, portanto, o gráfico de  $f$  contém os eixos  $x$  e  $y$ . Assim, existe o plano definido pela equação 5.2, mas não é tangente à superfície. 

Mostrar que uma função é diferenciável usando sua definição nem sempre é uma tarefa fácil. O próximo teorema nos mostra que a continuidade das derivadas parciais garante sua diferenciabilidade.

**Teorema 5.3** *Se as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existem em uma vizinhança de  $P_0 = (x_0, y_0)$ , e são contínuas em  $P_0$ , então,  $f$  é diferenciável em  $P_0$ .*

*Demonstração:* Pela definição de diferenciabilidade, devemos mostrar que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Temos:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (5.3)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função de uma variável  $g(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$ , existe um ponto  $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ , tal que,

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(c)\Delta x \iff f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0 + \Delta y)\Delta x \quad (5.4)$$

Analogamente, aplicando o Teorema do Valor Médio à função  $h(x) = f(x_0, y)$ , existe um ponto  $d \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ , tal que,

$$h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(d)\Delta y \iff f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, d)\Delta y \quad (5.5)$$

Substituindo 5.4 e 5.5 em 5.3, obtém-se que

$$\varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0 + \Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, d)\Delta y - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

Assim,

$$\frac{\varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] \frac{\Delta x}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \frac{\Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \quad (5.6)$$

Agora, quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ , tem-se que  $c \rightarrow x_0$  e  $d \rightarrow y_0$ . Desde que as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em  $P_0$ , as duas diferenças que aparecem na equação 5.6 tendem a zero e como

$$\left| \frac{\Delta x}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \right| \leq 1$$

tem-se que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

*Observação:* A recíproca do Teorema 5.3 não é verdadeira, isto é, existem funções que são diferenciáveis num ponto sem que suas derivadas parciais sejam contínuas neste ponto. Veja o exercício 21.

## 5.8 A Regra da Cadeia

### 5.8.1 Função Composta

No problema colocado na introdução de derivadas parciais em que uma formiga está em uma placa de metal no ponto  $(2, 1)$ , se pensarmos que a posição da formiga em cada instante varia com o tempo, isto é,  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , a temperatura  $z = T(x, y)$  pôde ser pensada, então, como uma função de  $t$ . Para cada valor de  $t$ , a temperatura no ponto  $(x(t), y(t))$  é o valor da função composta  $T(x(t), y(t))$  e podemos querer saber, então, a taxa de variação de temperatura em relação ao tempo.

Se as funções envolvidas são fáceis de compor, podemos derivar diretamente a composta em relação a  $t$ , mas frequentemente temos que trabalhar com funções cujas expressões são mais complicadas de compor. Nestes casos utilizamos a Regra da Cadeia que abordaremos na seção seguinte.

Para funções de uma variável,  $y = F(x)$ , onde  $x = x(t)$ , a composta toma a forma

$$y = F(x(t))$$

e sua regra da cadeia

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt}$$

No caso de funções de 2 variáveis podemos ter as seguintes situações na composição de funções:

- 1 -  $y = F(x)$  e  $x = x(u, v) \Rightarrow y = F(x(u, v))$
- 2 -  $z = f(x, y)$ ,  $x = x(t)$  e  $y = y(t) \Rightarrow z = f(x(t), y(t))$
- 3 -  $z = f(x, y)$ ,  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v) \Rightarrow z = f(x(u, v), y(u, v))$

**Exemplo 5.19** *Encontre a fórmula da composta para:*

- (a)  $y = F(x) = x^5 + 3x^2 + 10$  e  $x = x(u, v) = u^2 \cos v$
- (b)  $z = f(x, y) = x^5 y^2 + 3x^2 y + 10$ ,  $x = x(t) = 2e^t$  e  $y = y(t) = 3 \ln t$
- (c)  $z = f(x, y) = x^5 y^2 + 3x^2 y + 10$ ,  $x = x(u, v) = u \cos v$  e  $y = y(u, v) = ve^u$

*Solução:*

- (a)  $y = F(x) = (u^2 \cos v)^5 + 3(u^2 \cos v)^2 + 10 = u^{10} \cos^5 v + 3u^4 \cos^2 v + 10$
- (b)  $z = f(x, y) = x^5 y^2 + 3x^2 y + 10 = (2e^t)^5 (3 \ln t)^2 + 3(2e^t)^2 3 \ln t + 10 = 288e^{5t} \ln^2 t + 36e^{2t} \ln t + 10$
- (c)  $z = f(x, y) = x^5 y^2 + 3x^2 y + 10 = u^5 v^2 \cos^5 v e^{2u} + 3u^2 v \cos^2 v e^u + 10$

O domínio para cada uma das funções compostas acima consiste de todos os valores de suas variáveis para os quais as expressões da definição fazem sentido. Por exemplo, o domínio de  $f(x(t), y(t))$  consiste de todos os  $t$  que estão no domínio de ambos,  $x(t)$  e  $y(t)$ , e estas são tais que o ponto  $(x(t), y(t))$  está do domínio de  $f$ .

Como no caso de uma variável, continua valendo o seguinte resultado:

**Teorema 5.4** *A composta de funções contínuas é contínua*

*Prova:* Iremos ver a prova para a composta  $z = f(x(u, v), y(u, v))$ . Os outros casos são análogos. Suponhamos que  $(u_0, v_0)$  esteja no domínio da função composta e que os pontos  $(u, v)$  do domínio tendam a  $(u_0, v_0)$ . Como  $x(u, v)$  e  $y(u, v)$  são contínuas, os pontos  $(x(u, v), y(u, v))$  tendem a ao ponto  $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$  e, então, como  $f$  é contínua,  $f(x(u, v), y(u, v))$  tende a  $f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ . Isto mostra que a função composta é contínua no ponto  $(u_0, v_0)$ .

### 5.8.2 Regra da Cadeia

A regra da cadeia para função de uma variável  $y = F(x)$ , onde  $x = x(t)$ , e cuja composta é  $y = F(x(t))$  é dada por:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (5.7)$$

Para funções de mais de uma variável, a regra da cadeia tem várias versões. Veremos cada uma delas segundo as compostas dadas na seção 5.8.1.

**Regra da Cadeia (caso 1)** Se  $x = x(u, v)$  tem derivadas parciais em  $(u, v)$  e  $y = F(x)$  tem derivada em  $x(u, v)$ , então, a função composta  $y = F(x(u, v))$  tem derivadas parciais em  $(u, v)$ , dadas por

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial u} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial v} \quad (5.9)$$

*Demonstração:* A demonstração destas duas regras é bem simples. Basta observar que quando derivamos parcialmente em relação a  $u$ , por exemplo, a variável  $v$  permanece constante. Logo, a função  $y = F(x(u, v))$  fica uma função de apenas uma variável  $u$ , e, portanto, aplica-se a regra da cadeia 5.7 para função de uma variável e temos a fórmula provada.

**Regra da Cadeia (caso 2):** Suponhamos  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  sejam deriváveis em relação a  $t$  e que  $z = f(x, y)$  é diferenciável no ponto  $(x(t), y(t))$ . Então a composta  $z = f(x(t), y(t))$  é uma função derivável em relação a  $t$  e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (5.10)$$

*Demonstração:* Denotemos por:

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) \quad \text{e} \quad \Delta z = f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))$$

Então,

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Vamos supor que  $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ , pois caso contrário a fórmula 5.10 se verifica facilmente, pois teremos  $0 = 0$ .

Desde que  $f$  é diferenciável em  $(x(t), y(t))$ , segue da definição que

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon \quad (5.11)$$

onde as derivadas parciais são calculadas em  $(x(t), y(t))$  e

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Dividindo os dois lados de 5.11 por  $\Delta t$  tem-se,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\varepsilon}{\Delta t} \quad (5.12)$$

Agora, desde que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta t|} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

e como  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , pois por hipótese as funções  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são deriváveis e portanto, contínuas, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} \right| = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta t|} \\ &= 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Portanto, tomando o limite de ambos os lados de 5.12, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se a equação 5.10,

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}} \quad (5.15)$$

**Regra da Cadeia (caso 3):** Suponhamos que  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  tenham derivadas parciais no ponto  $(u, v)$  e que  $z = f(x, y)$  seja diferenciável em  $(x(u, v), y(u, v))$ . Então,  $z = f(x(u, v), y(u, v))$  tem derivadas parciais em  $(u, v)$  dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(x(u, v), y(u, v)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \end{aligned} \quad (5.16)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x(u, v), y(u, v)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{aligned} \quad (5.17)$$

ou, abreviadamente

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (5.18)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \quad (5.19)$$

O caso 3 é uma consequência imediata do caso 2, pois quando calculamos a derivada parcial com relação a  $u$ , por exemplo, a variável  $v$  permanece constante, logo a composta  $f(x(u, v), y(u, v))$  fica em função apenas da variável  $u$ .

**Exemplo 5.20** Uma função  $z = f(x, y)$  tem derivadas parciais de primeira ordem,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 5 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -2$$

Supondo-se que  $x = x(u, v) = \frac{u}{\pi} + \sin v$  e  $y = y(u, v) = \frac{v^2}{\pi^2} - \cos u$ , calcule

$$\frac{\partial f}{\partial u} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial v}$$

em  $u = \pi$  e  $v = \pi$

*Solução:* Como

$$x = \frac{u}{\pi} + \sin v \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\pi} \quad e \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \cos v$$

e

$$y = \frac{v^2}{\pi^2} - \cos u \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial u} = \sin u \quad e \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2v}{\pi^2}$$

utilizando as fórmulas 5.18 e 5.19 em  $u = \pi$  e  $v = \pi$ , obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 5 \cdot \frac{1}{\pi} - 2 \cdot 0 = \frac{5}{\pi} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 5 \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{2}{\pi} = -5 - \frac{4}{\pi}$$

**Exemplo 5.21** A temperatura em uma placa de metal é dada em cada ponto  $(x, y)$  por  $T(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{8}$  graus Celsius. Uma formiga passeia pela placa percorrendo um caminho de modo que sua posição após  $t$  segundos seja dada por  $x(t) = 1 + 2t$  e  $y(t) = \frac{t^2}{3}$ . Qual a taxa de variação de temperatura, em relação ao tempo, no caminho da formiga após 3 segundos?

*Solução:* Aplicando-se o caso 2 da Regra da Cadeia

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x \cdot 2 + \frac{y}{4} \cdot \frac{2t}{3}$$

Após 3 segundos a formiga estará no ponto  $(7, 3)$ , então,

$$\frac{dT}{dt}(x(3), y(3)) = 2 \cdot 7 \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3} = 29,5 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}}$$

Note que no exemplo 5.21 obtivemos a taxa de variação de temperatura com relação ao tempo. No problema do início da seção 5.4, item (c), a taxa de variação obtida foi com relação ao deslocamento horizontal e no item (d), em relação ao deslocamento vertical. Na próxima seção estudaremos o caso da variação de temperatura em relação à distância percorrida em uma reta qualquer.

## 5.9 Derivada Direcional

Voltemos ao problema da formiga que está em uma placa de metal no ponto  $(2, 1)$  e cuja temperatura em cada ponto é dada por  $T(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ . Vamos supor, agora, que a formiga queira andar na direção da reta  $y = \frac{x}{2}$ . A figura 5.48 mostra as isotermas e o ponto onde está a formiga.

- (a) Calcule a taxa média de variação da temperatura sofrida pela formiga para ela ir do ponto  $(2, 1)$  até a próxima isoterma  $z = 80$ .
- (b) Calcule, agora, a taxa instantânea de variação da temperatura em relação à distância andada na direção da reta  $y = \frac{x}{2}$ , sofrida pela formiga.

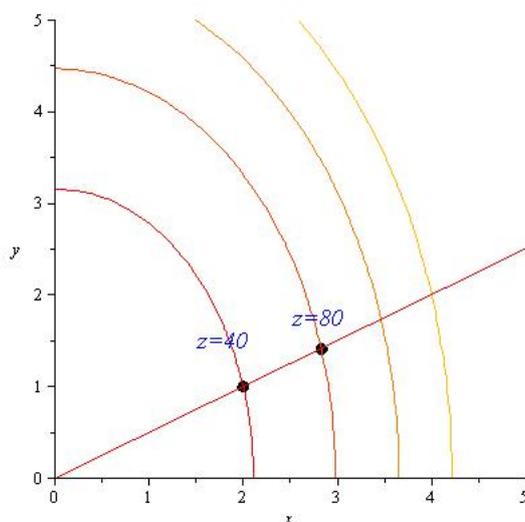


Figura 5.48: Deslocamento na direção de  $y = \frac{x}{2}$

**Solução:** (a) O ponto sobre a isoterma mais próxima é  $(2.8, 1.4)$ . Assim, a taxa média de variação da temperatura sofrida pela formiga para ela ir do ponto  $(2, 1)$  ao ponto  $(2.8, 1.4)$  é:

$$\frac{80 - 40}{\sqrt{(2.81 - 2)^2 + (1.41 - 1)^2}} = 44,1 \frac{\text{graus}}{\text{metro}}$$

andado na direção da reta  $y = \frac{x}{2}$ .

(b) Para calcular a taxa instantânea de variação da temperatura em relação à distância andada na direção da reta  $y = \frac{x}{2}$ , sofrida pela formiga, calculamos o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{T(x, y) - T(2, 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}}$$

onde  $(x, y)$  é um ponto sobre a reta  $y = \frac{x}{2}$ . Para facilitar o cálculo deste limite, o que fazemos é parametrizar a reta tendo como direção um vetor unitário, pois isto fará com que a distância entre os dois pontos que aparece no denominador do quociente acima se reduza ao valor do parâmetro  $t$ . Para isto considere o vetor unitário  $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$  que dá a direção da reta. Assim, as equações paramétricas da reta  $y = \frac{x}{2}$  são:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \frac{2}{\sqrt{5}}t \\ y(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{T(x,y) - T(2,1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}t, 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t) - T(2,1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{16\sqrt{5}t + 8t^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 16\sqrt{5} + 8t \\ &= 16\sqrt{5} \frac{\text{graus}}{\text{metro}} \end{aligned}$$

De um modo geral, se quisermos calcular a taxa de variação de uma função  $z = f(x, y)$  em um ponto  $P = (x_0, y_0)$  na direção de um vetor unitário  $u = (u_1, u_2)$ , procedemos do mesmo modo:

- Considere a reta  $r$  de equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + tu_1 \\ y(t) &= y_0 + tu_2 \end{cases}$$

Ao calcularmos o valor da função  $f$  em cada ponto da reta  $r$ ,  $f(x(t), y(t))$ , obtemos uma curva  $C$  no plano vertical  $V$  passando pela reta  $r$  interseção com a superfície  $S$ , gráfico de  $f$ . Repare que ao calcularmos o valor de  $f$  em cada ponto  $(x(t), y(t))$  obtemos uma função de uma variável  $t$ , i.é.,

$$f(x(t), y(t)) = F(t)$$

e, portanto,  $F(0) = f(x(0), y(0)) = f(x_0, y_0)$ . Colocamos, então, um sistema de eixo  $(t, F(t))$  no plano vertical  $V$ , fazendo coincidir a origem no ponto  $(x_0, y_0)$ , conforme mostra a figura 5.49. Observe que, como a distância entre um ponto qualquer  $(x, y)$  da reta  $r$  ao ponto  $(x_0, y_0)$  é  $|t|$ , a cada valor de  $t$  deste eixo corresponde um ponto  $(x(t), y(t))$ . Com isto definimos a

**Derivada Direcional de  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , na direção do vetor unitário  $u = (u_1, u_2)$**  como sendo

$$D_u f(P_0) = \frac{dF}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

se este limite existir.

**Interpretação Geométrica:**  As figuras 5.49 e 5.50 mostram a interpretação geométrica da derivada direcional. O quociente

$$\frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

nada mais é do que o coeficiente angular da reta secante à curva  $C$  conforme mostra a figura 5.49. O limite deste quociente, i.é., o valor da derivada direcional é, portanto, o coeficiente angular da reta tangente à curva  $C$  no ponto  $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  mostrado na figura 5.50.

**Observação:**

1- Se  $u = (1, 0)$ ,

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

2- Se  $u = (0, 1)$

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- 3- Se  $v$  é um vetor qualquer que não seja unitário, considera-se o vetor unitário  $u = \frac{v}{\|v\|}$  e define-se a Derivada Direcional de  $f$  na direção de  $v$  como sendo:

$$D_v f(x, y) = D_u f(x, y)$$

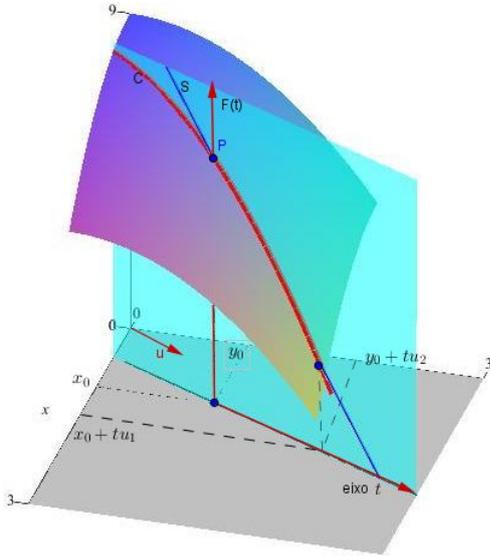


Figura 5.49

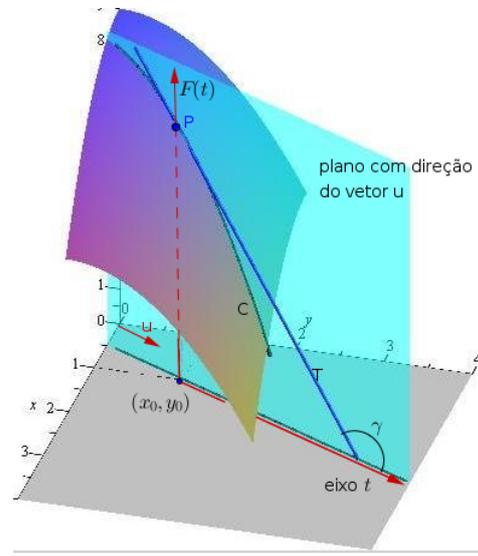


Figura 5.50

## 5.10 O Gradiente e o Cálculo da Derivada Direcional

No que segue, iremos supor que  $z = f(x, y)$  é uma função diferenciável em  $P_0 = (x_0, y_0)$ . Na definição de Derivada Direcional de uma função  $z = f(x, y)$  em um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , supomos que  $x = x(t) = x_0 + tu_1$  e  $y = y(t) = y_0 + tu_2$ . Assim,  $z = f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) = F(t)$  é uma função composta. Logo, pela Regra da Cadeia (caso 2) aplicada à função  $F(t)$  no ponto  $t = 0$ , tem-se imediatamente que

$$\begin{aligned} D_u f(x_0, y_0) &= \frac{dF}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{dy}{dt}(0) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0) \right) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot (u_1, u_2) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot u \end{aligned}$$

O primeiro vetor deste produto escalar é chamado de **gradiente de  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$**  denotado por

$$\nabla f(P_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right)$$

O símbolo  $\nabla$ , lê-se “del”, é um delta invertido também conhecido como “nabla”. Iremos ver que o gradiente de  $f$  não é meramente um vetor que simplifica o cálculo da derivada direcional, mas que, também fornece importantes informações sobre a função  $f$  e a superfície  $z = f(x, y)$ .

Vamos supor que  $\nabla f(P_0) \neq 0$ , assim, se  $\alpha$  é o ângulo entre os vetores  $\nabla f(P_0)$  e o vetor unitário  $u$ , a Derivada Direcional de  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  é dada por: 

$$\begin{aligned} D_u f(P_0) &= \nabla f(P_0) \cdot u \\ &= |\nabla f(P_0)| |u| \cos \alpha \\ &= |\nabla f(P_0)| \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.20)$$

Observe que, como o  $|\nabla f(P_0)|$  é uma constante:

- o valor máximo da derivada direcional é atingido quando  $\cos \alpha = 1$ , isto é, quando o ângulo  $\alpha = 0$ , ou seja, quando o vetor  $u$  estiver na mesma direção e sentido do  $\nabla f(P_0)$  e seu valor  $D_u f(P_0) = |\nabla f(P_0)|$ ;
- o valor mínimo da derivada direcional é atingido quando  $\cos \alpha = -1$ , isto é, quando o ângulo  $\alpha = \pi$ , ou seja, quando o vetor  $u$  estiver na mesma direção e sentido de  $-\nabla f(P_0)$  e seu valor  $D_u f(P_0) = -|\nabla f(P_0)|$ ;
- o valor da derivada direcional é zero quando o ângulo  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Veja a figura 5.51

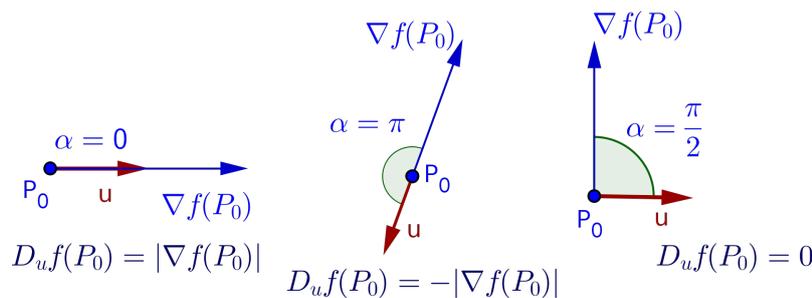


Figura 5.51: Valores máximo e mínimo da Derivada Direcional

Portanto, o gradiente aponta a direção e sentido em que a função cresce mais rapidamente ou seja em que o gráfico de  $f$  tem maior inclinação. O sentido oposto do gradiente é o sentido que a função decresce mais rapidamente ou o gráfico de  $f$  tem a menor inclinação. 

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se  $z = f(x, y)$  representar a altura do morro no ponto  $(x, y)$ , então, o gradiente aponta a direção e sentido de maior auge, evidentemente, o sentido oposto é o de maior declive.

No caso em que  $\nabla f(P_0) = 0$ , segue de (5.20) que  $D_u f(P_0) = 0$  em todas as direções no ponto  $P_0$ . Isto ocorre, tipicamente em pontos de máximo ou mínimo relativos ou em pontos de sela, como veremos no capítulo sobre máximos e mínimos de funções.

**Exemplo 5.22** Determine a derivada direcional da função  $f(x, y) = xy$  no ponto  $P_0 = (2, 1)$  na direção do vetor  $v = (4, 3)$

*Solução:* Temos que  $|v| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$  e, então, seja  $u = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$  o vetor unitário na direção de  $v$ . Então,

$$D_u f(P_0) = (1, 2) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = 2$$

Veja a interpretação geométrica na figura 5.52.

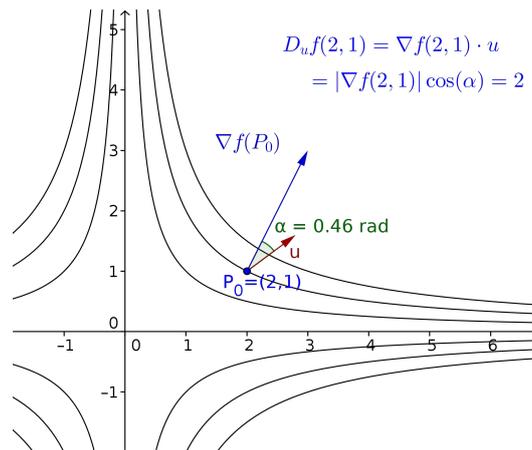


Figura 5.52:  $D_u f(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot u$

## 5.11 Vetores Gradientes e Curvas de Nível

O próximo teorema mostra que os vetores gradientes de uma função são perpendiculares às suas curvas de nível:

**Teorema 5.5** *Suponhamos que  $z = f(x, y)$  tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança de um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e que  $\nabla f(P_0) \neq 0$ . Então,  $\nabla f(P_0)$  é perpendicular à curva de nível que passa por  $P_0$ .*

*Prova:* Como o vetor gradiente  $\nabla f(P_0) \neq 0$ , a curva de nível  $f(x, y) = c$  que passa por  $P_0$  pode ser parametrizada em uma vizinhança de  $P_0$  com equações

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

onde  $x_0 = x(0)$  e  $y_0 = y(0)$  e com um vetor tangente não-nulo  $\left(\frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0)\right)$  (Isto é uma consequência do Teorema das Funções Implícitas, visto em cursos de Cálculo Avançado).

Derivando  $z = f(x(t), y(t)) = c$  em relação a  $t$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) = \frac{d}{dt} c = 0$$

Em  $t = 0$ , tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

ou seja,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0)\right) = 0$$

isto é,

$$\nabla f(P_0) \cdot \left(\frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0)\right) = 0$$

O que mostra que o gradiente de  $f$  é perpendicular ao vetor tangente em  $P_0$  e, portanto, perpendicular à curva de nível  $f(x, y) = c$ .

**Exemplo 5.23** A figura 5.53 mostra um mapa de contorno da função  $z = f(x, y) = xy$  e o gradiente de  $f$  no ponto  $P = (2, \frac{1}{2})$ . Repare que o  $\nabla f(P)$  é perpendicular à curva de nível de  $f$  que passa por  $P$ . 

Como exercício, encontre as curvas de nível que passam pelos pontos  $Q = (1, 2)$  e  $R = (-2, 1)$  bem como os gradientes de  $f$  nestes pontos e esboce um gráfico mostrando estes elementos.

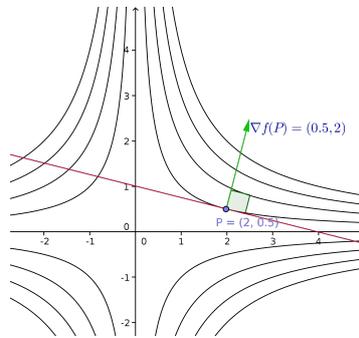


Figura 5.53: Mapa de contorno de  $z = xy$

**Exemplo 5.24** A figura 5.54 mostra as curvas de nível de uma função  $z = f(x, y)$ . Faça uma representação geométrica, aproximada, dos gradientes de  $f$  nos pontos  $D = (1.1, 1)$ ,  $E = (-1.1, 1)$ ,  $I = (-1.1, -1)$  e  $J = (1.1, -1)$ .

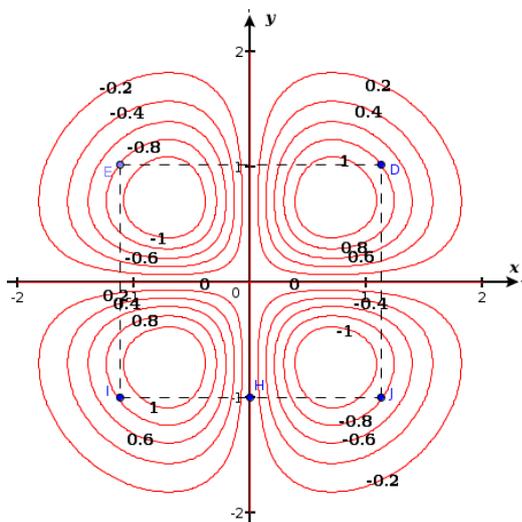


Figura 5.54: Curvas de nível de  $f(x, y)$

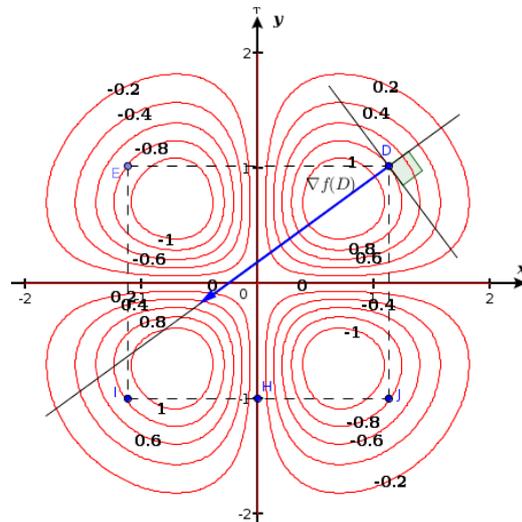


Figura 5.55:  $\nabla f(D)$

*Solução:* Faremos uma representação para o ponto  $D$ . Para os outros pontos o procedimento é similar, bastando apenas prestar atenção na direção do crescimento da função.

Primeiro traçamos uma reta tangente à curva de nível no ponto  $D$  e a seguir uma reta  $r$ , perpendicular. O vetor gradiente terá a direção desta reta  $r$ . No ponto  $D$ , o valor da função é de 0.8, isto é,  $f(D) = 0.8$ . A curva de nível mais próxima com valor maior é  $f(x, y) = 1$ . A distância entre as curvas  $f = 0.8$  e  $f = 1$  é aproximadamente 0.1 unidade. Assim a derivada direcional na direção da reta  $r$  em sentido de  $f = 0.8$  para  $f = 1$  é aproximadamente  $\frac{1 - 0.8}{0.1} = 2$ . Logo, o  $|\nabla f(D)|$  é aproximadamente 2, como mostrado na figura 5.55.

**Exemplo 5.25** Um morro possui forma definida pelo gráfico de  $z = f(x, y) = 36 - 2x^2 - 4y^2$ .

- (a) Faça um desenho do morro, marcando as interseções com os planos coordenados ;
- (b) Se um alpinista está no ponto  $A = (2, 1, 24)$ , que direção ele deve tomar para subir pela parte mais íngreme do morro? Qual a taxa de variação da altura neste ponto?
- (c) Se o alpinista se mover na direção do vetor  $v = (-3, 4)$ , ele estará subindo ou descendo? Qual a taxa?
- (d) Em que direção ele deve inicialmente se mover para percorrer um caminho plano?

**Solução:**

(a) Fazendo as interseções com os planos coordenados, obtém-se as curvas:

- superfície  $\cap$  plano  $z = 0 \Rightarrow 36 - 2x^2 - 4y^2 = 0$  (elipse)
- superfície  $\cap$  plano  $x = 0 \Rightarrow z = 36 - 4y^2$  (parábola)
- superfície  $\cap$  plano  $y = 0 \Rightarrow z = 36 - 2x^2$  (parábola)

o que nos dá a figura 5.56

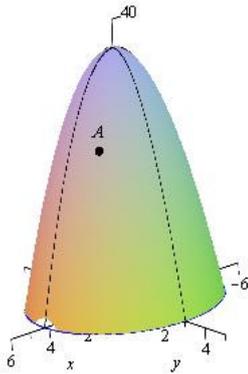


Figura 5.56: Morro formato parabolóide elíptico

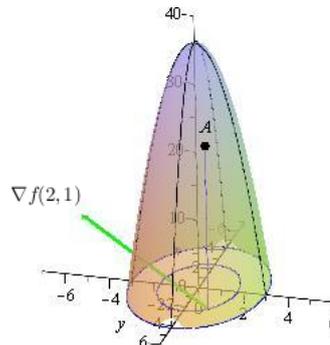


Figura 5.57

- (b) O gradiente aponta a direção e sentido em que a função cresce mais rapidamente, logo, para subir pela parte mais íngreme toma-se a direção e sentido do gradiente (veja a figura 5.57)

$$\nabla f(2, 1) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) \right) = (-8, -8)$$

- (c) Calculemos a taxa de variação da função no ponto  $(2, 1)$ , isto é, sua derivada direcional, na direção do vetor  $v$ . Como o vetor  $v$  não é unitário, um vetor unitário na direção de  $v$  é o vetor  $u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{5}(-3, 4)$ . Assim,

$$D_u f(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot u = -(8, 8) \cdot \frac{1}{5}(-3, 4) = \frac{1}{5}(24 - 32) = -\frac{8}{5}$$

Portanto, a taxa de variação de altura no ponto  $(2, 1)$  é de  $-\frac{8}{5}$  m/m andando na direção do vetor  $v = (-3, 4)$ . Como a taxa é negativa ele estará descendo.

- (d) Para percorrer um caminho plano ele não deve subir nem descer, ou seja, a taxa de variação de altura deve ser zero. Portanto, ele deve ir na direção perpendicular ao gradiente, isto é, na direção do vetor  $u_1 = (8, -8)$  ou de  $u_2 = (-8, 8)$ .

Observe que o gradiente varia a cada ponto e, portanto, para percorrer um caminho plano ele deve variar a direção continuamente na direção do gradiente. O caminho plano corresponde à curva de nível que contém o ponto  $A$ .

## 5.12 Funções de $n$ variáveis

Nesta seção estendemos às funções de três ou mais variáveis, os conceitos apresentados nas seções anteriores para funções de duas variáveis. Considere  $n \in \mathbb{N}$ , definimos:

**Definição 5.8** Dado um subconjunto  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ , uma função  $f$  de  $n$  variáveis é uma regra que associa a cada  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{D}$  um único valor real denotado por  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . O conjunto  $\mathbb{D}$  é chamado de domínio de  $f$  e sua imagem é o subconjunto  $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n); (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{D}\} \subset \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Daremos ênfase nesta seção às funções de 3 variáveis, isto é, às funções

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto w = f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

**Exemplo 5.26** Determine o domínio e a imagem de  $w = f(x, y, z) = x^2 + \sqrt{y - z}$

*Solução:* A expressão de  $f$  é definida desde que  $y - z \geq 0$ . Assim, o domínio de  $f$  é o conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > z\}$$

ou seja,  $D$  é o semi-espaço constituído por todos os pontos que estão abaixo do plano  $y = z$ , pois  $x$  é qualquer. A imagem de  $f$  é o intervalo  $[0, \infty)$ .

O gráfico de uma função de 3 variáveis é um subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ :

$$\{(x, y, z, w); w = f(x, y, z)\}$$

Portanto, fica impossível fazer uma análise de uma função de 3 variáveis através de seu gráfico. O que fazemos aqui para se ter uma ideia do comportamento da função é uma análise das chamadas **superfícies de nível**, que correspondem às **curvas de nível** para funções de 2 variáveis.

Uma **Superfície de Nível** de uma função  $w = f(x, y, z)$  é a superfície de equação

$$f(x, y, z) = k$$

onde  $k$  é uma constante.

**Exemplo 5.27** A temperatura em uma sala é dada em cada ponto  $(x, y, z)$  por

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

As superfícies de nível para esta função são chamadas de isotermas e são esferas concêntricas de mesma temperatura, ou seja, todos os pontos equidistantes da origem tem mesma temperatura, o que nos dá uma idéia do aquecimento dentro da sala (figura 5.58).

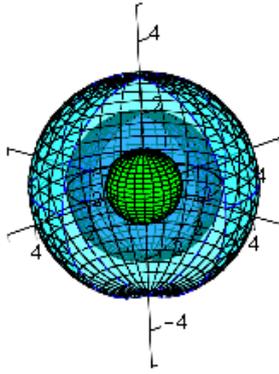
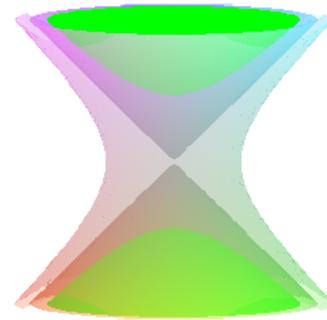


Figura 5.58: Esferas concêntricas

Figura 5.59:  $x^2 + y^2 - z^2 = k$  para  $k = -2, 0, 2$ 

**Exemplo 5.28** A figura 5.59 mostra as superfícies de nível  $x^2 + y^2 - z^2 = k$ , para  $k = -2, 0, 2$ , de dentro para fora, da função  $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .

Note que se  $k > 0$  a superfície de nível é um hiperboloide de uma folha. Se  $k = 0$ , tem-se um cone e se  $k < 0$  é um hiperboloide de duas folhas. 

### 5.12.1 Derivadas Parciais e a Regra da Cadeia

Os conceitos de limite, continuidade e derivadas parciais para funções de três variáveis  $w = f(x, y, z)$ , são os mesmos que vimos para funções de duas variáveis. No caso das derivadas parciais, temos a mais a derivada parcial com respeito à variável  $z$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , que se obtém derivando  $f$  com respeito a  $z$  e mantendo as variáveis  $x$  e  $y$  fixas.

Do mesmo modo temos as derivadas de ordem superior.

**Exemplo 5.29** Calcule as derivadas parciais de  $w = \sin xyz$

Solução:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = yz \cos xyz$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = xz \cos xyz$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = xy \cos xyz$$

#### Regra da Cadeia

As regras da cadeia para funções de 3 variáveis são similares às que já vimos para funções de duas variáveis. A regra mais utilizada é a similar ao caso 2 da seção 5.8.2, bem como sua demonstração:

Se  $z = f(x, y, z)$  e  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$ , então,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (5.21)$$

### 5.12.2 Derivadas Direcionais e Gradiente

A definição de derivada direcional de uma função  $w = f(x, y, z)$  é a mesma que para função de duas variáveis. Pode-se provar de modo análogo ao caso de duas variáveis, que em um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , a derivada direcional é dada por

$$D_u f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot u = |\nabla f(P_0)| \cos \alpha$$

onde  $u = (u_1, u_2, u_3)$  é um vetor unitário e  $\alpha$  é o ângulo entre o  $\nabla f(P_0)$  e  $u$ . Assim, como no caso de duas variáveis, como  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ , o valor máximo da derivada direcional será igual a  $|\nabla f(P_0)|$  e ocorre quando o vetor  $u$  estiver na direção e sentido do gradiente. Portanto, o gradiente de  $f$  aponta para a direção e sentido em que a função cresce mais rapidamente. O sentido oposto ao gradiente é a direção e sentido em que a função decresce mais rapidamente e onde teremos o menor valor da derivada direcional igual a  $-|\nabla f(P_0)|$ .

Prova-se de modo análogo ao caso de duas variáveis que o vetor gradiente  $\nabla f(P_0)$  é perpendicular, neste caso, a superfície de nível que passa por  $P_0$ .

**Exemplo 5.30** *A temperatura do ar em cada ponto  $(x, y, z)$  de uma sala é dada por  $T(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  graus Celsius e a distância é dada em metros. Um mosquito está no ponto  $Q = (3, 1, 2)$ . Pede-se:*

- Se ele voar na direção do vetor  $v = (1, 1, 1)$ , ele estará aquecendo ou esfriando? Com qual taxa de variação de temperatura?*
- Em qual direção e sentido ele deve voar para que a temperatura decresça mais rapidamente? Qual é a taxa de variação?*
- Se ele deseja voar de modo a se manter na mesma temperatura, que direção ele deve seguir inicialmente?*

*Solução:* (a) Considere o vetor unitário  $u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ . Como o  $\nabla f = (2x, 2y, -2z)$ , então,

$$D_u f(Q) = \nabla f(Q) \cdot u = (6, 2, -4) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, ele estará se aquecendo na razão de  $\frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{0C}{m}$ .

(b) O gradiente aponta a direção e sentido em que a temperatura cresce mais rapidamente, logo, ele deve voar no sentido oposto ao do gradiente, isto é, na direção do vetor  $(-6, -2, 4)$ . Nesta direção e sentido a taxa de variação de temperatura é igual a

$$-|\nabla f(Q)| = -\sqrt{6^2 + 2^2 + 4^2} = -\sqrt{56} \frac{0C}{m}$$

(c) Ele deve voar inicialmente em uma direção perpendicular ao gradiente, isto é, na direção do vetor  $w = (a, b, c)$  de tal modo que

$$\nabla f(Q) \cdot u = (6, 1, -4) \cdot (a, b, c) = 0 \implies 6a + b - 4c = 0$$

ou seja, temos infinitas soluções do tipo  $b = 4c - 6a$ . Tome, por exemplo,  $a = 0$  e  $c = 1$  e tem-se  $b = 4$ , logo ele pode voar na direção, por exemplo, do vetor  $w = (0, 4, 1)$ .

Geometricamente, ele deve voar, inicialmente, na direção de qualquer reta contida no plano tangente à superfície de nível que passa pelo ponto  $(3, 1, 2)$ .

### 5.12.3 Planos Tangentes

Como já foi dito na seção anterior, mostra-se de modo similar ao caso de duas variáveis que o gradiente de uma função de três variáveis em um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  é perpendicular à superfície de nível que passa por  $P_0$ . Assim se a superfície tem plano tangente em  $P_0$  e como o vetor gradiente

$$\nabla f(P_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right)$$

é perpendicular ao plano tangente, sua equação, então, será:

$$\nabla f(P_0) \cdot (P - P_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0 \quad (5.22)$$

A **reta normal** à superfície de nível  $S$ , dada por  $F(x, y, z) = k$ , em um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  é a reta que passa por  $P_0$  e é perpendicular ao plano tangente a  $S$  em  $P_0$ . A direção da reta normal é, portanto, dada pelo gradiente de  $F$ ,  $\nabla F(P_0)$ . Assim, suas equações paramétricas são:

$$x(t) = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}(P_0)t, \quad y(t) = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)t, \quad z(t) = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)t$$

e suas equação simétricas:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}$$

**Observação 5.1** *Todo gráfico de uma função de duas variáveis  $z = f(x, y)$  é superfície de nível de uma função de três variáveis:  $w = F(x, y, z) = z - f(x, y)$ . Neste caso, tomando-se  $k = 0$ , tem-se a equação da superfície de nível*

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$$

Logo, o gradiente de  $F$  no ponto  $P_0$

$$\nabla F(P_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right) = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}((x_0, y_0)), -\frac{\partial f}{\partial y}((x_0, y_0)), 1 \right)$$

Assim, aplicado à equação 5.22 retorna a equação 5.2

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

O próximo exemplo mostra que, às vezes, é mais fácil trabalhar com a equação da superfície de nível do que com uma função de duas variáveis.

**Exemplo 5.31** *Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de  $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$  no ponto  $P_0 = (1, 1, 1 + \sqrt{2})$*

*Solução:* O gráfico da função  $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$  é a parte superior do cone de duas folhas  $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ . Agora, considere a função

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - (z - 1)^2$$

Logo, o plano tangente que procuramos é o mesmo plano tangente da superfície de nível

$$x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$$

Como o  $\nabla F = (2x, 2y, -2(z - 1)) \Rightarrow \nabla F(1, 1, 1 + \sqrt{2}) = (2, 2, -2\sqrt{2})$ , a equação do plano tangente será

$$(x - 1) + (y - 1) - \sqrt{2}(z - (1 + \sqrt{2})) = 0$$

As equações paramétricas da reta normal são:

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 + 2t \quad \text{e} \quad z = 1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}t$$

## 5.13 Exercícios

1. Determine o domínio e a imagem da função:

(a)  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

(b)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x - y}$

(Respostas)

2. Dada a função  $f(x, y) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4y^2}$ . Pede-se:

(a) O domínio e a imagem de  $f$ .

(b) As interseções do gráfico de  $f$  com os planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 3$ .

(c) Um esboço do gráfico de  $f$ .

(d) A equação da curva de nível que passa pelo ponto  $(3, 2)$ . Esboce seu gráfico. (Respostas)

3. Seja  $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in \mathcal{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O domínio e a imagem de  $f$ .

(b) As curvas de interseção do gráfico de  $f$  com os planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ .

(c) As curvas de nível de  $f$  para  $z = 1/2$  e  $z = 1$ .

(d) Um esboço do gráfico de  $f$  destacando as curvas obtidas em (b).

(e) Em quais pontos do  $\mathbb{R}^2$  a função  $f$  é contínua e em quais ela é descontínua? Justifique.

(Respostas)

4. Dada a função  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ . Pede-se:

(a) O domínio e a imagem de  $f$ .

(b) As curvas de interseção do gráfico de  $f$  com os planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ .

(c) As curvas de nível de  $f$  para  $z = -2, 0, 2, 4$ .

(d) Um esboço do gráfico de  $f$  destacando as curvas obtidas em (b). (Respostas)

5. Associe as funções

- $z = x^2 - y^2$  (sela de cavalo)
- $z = -x^3 + xy^2$  (sela de macaco)
- $z = 2(-x^3y + xy^3)$  (sela de cachorro)

aos seus gráficos e às suas respectivas curvas de nível mostradas nas figuras de 5.60 a 5.65.

(Respostas)

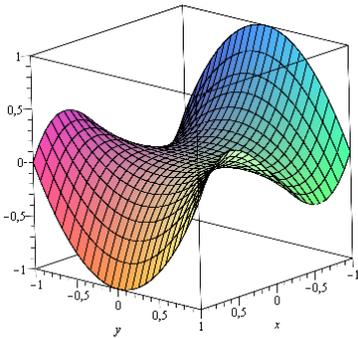


Figura 5.60

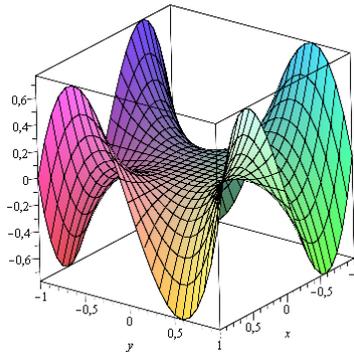


Figura 5.61

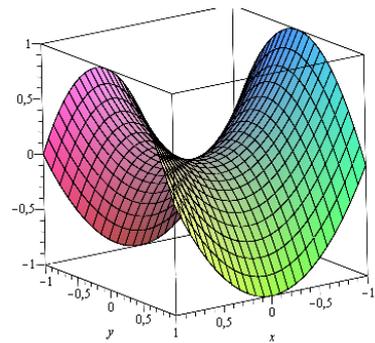


Figura 5.62

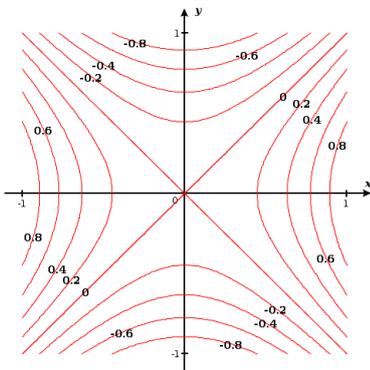


Figura 5.63

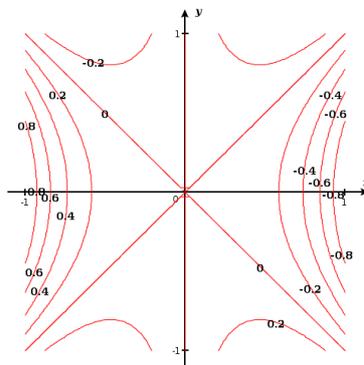


Figura 5.64

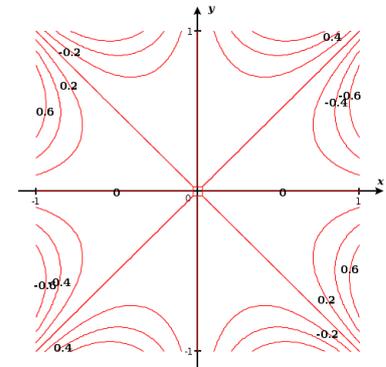


Figura 5.65

6. Associe as funções

- (a)  $z = \frac{\text{sen } xy}{xy}$       (b)  $z = e^{-x^2} + e^{-y^2}$       (c)  $z = \cos x \text{ sen } y$

aos seus gráficos e às suas respectivas curvas de nível mostradas nas figuras de 5.66 a 5.71.

(Respostas)

7. Dada a função  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{3x^2 - y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ,

(a) Calcule o limite de  $f$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  através da reta  $y = mx$ , onde  $m \in \mathbb{R}$ .

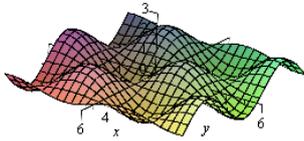


Figura 5.66

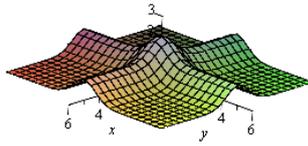


Figura 5.67

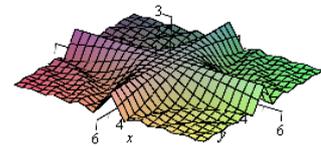


Figura 5.68

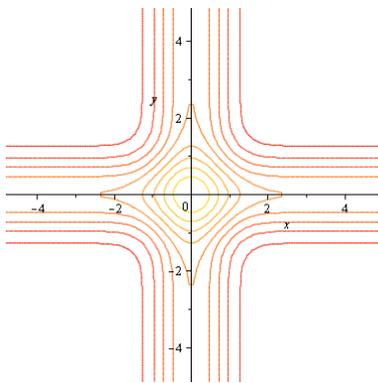


Figura 5.69

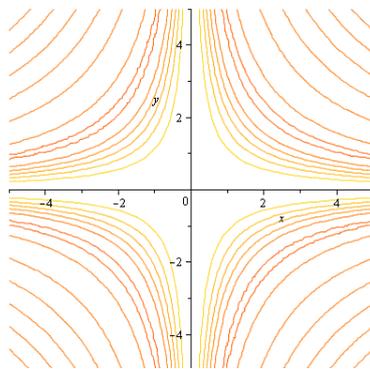


Figura 5.70

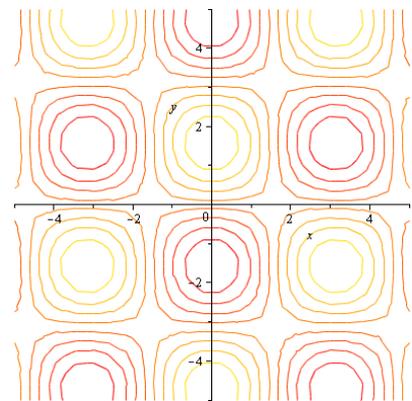


Figura 5.71

(b) A função é contínua em  $(0, 0)$ ? Justifique sua resposta.

(Respostas)

8. Seja  $z = f(x, y) = 1 + 4x^2 + y^2$

(a) Determine as curvas de nível de  $f$  para  $z = 1, 2, 3, 4$ .

(b) Faça um mapa de contorno para as curvas de nível encontradas em (a).

(c) Determine as equações paramétricas da curva  $\gamma$ , interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $z = 5$ .

(d) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5)$ .

(e) Determine a equação da reta perpendicular ao gráfico de  $f$  em  $P = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5)$ .

(Respostas)

9. Um morro possui forma definida pelo gráfico de  $f(x, y) = 100 - 4x^2 - 5y^2$ .

(a) Faça um desenho do morro, marcando as interseções com os planos coordenados ;

(b) Se um alpinista está no ponto  $A = (3, 2, 44)$ , que direção ele deve tomar para subir pela parte mais íngreme do morro? Qual a taxa de variação da altura neste ponto e nesta direção?

(c) Se o alpinista se mover na direção do vetor  $v = (1, -2)$ , ele estará subindo ou descendo? Qual a taxa?

- (d) Em que direção ele deve se mover para percorrer um caminho plano?
- (e) Determine a equação da curva de nível correspondente ao ponto onde ele está. Faça um desenho mostrando a interpretação geométrica da relação entre esta curva de nível e o  $\nabla f(3, 2)$ . (Respostas)
10. Um morro possui forma definida pelo gráfico de  $z = f(x, y) = 36 - 2x^2 - 4y^2$ .
- (a) Faça um desenho do morro, marcando as interseções com os planos coordenados ;
- (b) Se um alpinista está no ponto  $A = (2, 1, 24)$ , que direção ele deve tomar para subir pela parte mais íngreme do morro? Qual a taxa de variação da altura neste ponto?
- (c) Se o alpinista se mover na direção do vetor  $v = (-3, 4)$ , ele estará subindo ou descendo? Qual a taxa?
- (d) Em que direção ele deve se mover para percorrer um caminho plano? (Respostas)
11. A superfície de um lago é representada por uma região  $D$  no plano  $xy$  e a sua profundidade em cada ponto  $(x, y)$  é dada pela função  $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$  (metros). Um menino está nadando no lago e, num certo instante, se encontra no ponto  $P = (4, 9)$ .
- (a) Em que direção e sentido ele deve nadar para ir para a parte mais rasa do lago?
- (b) Determine a taxa de variação da profundidade se o menino nadar na direção do vetor  $u = (3, 4)$ .
- (c) Dê a equação da curva sobre a qual o menino deve nadar para que a profundidade permaneça constante. (Respostas)
12. Um morro possui forma definida pelo gráfico de  $z = f(x, y) = 16 - y^2 - x$ .
- (a) Determine as curvas de nível para  $z = 5$ ,  $z = 10$ ,  $z = 14$  e  $z = 16$ . Represente-as geometricamente.
- (b) Se uma bola é colocada no ponto  $Q = (0, 0, 16)$ , em que direção e sentido ela cairá? Justifique.
- (c) Se a bola for obrigada a percorrer uma curva  $C$ , obtida pela interseção da superfície do morro com o plano  $y = x$ , que taxa de variação da altura ela terá ao passar pelo ponto  $T = (3, 3, 4)$ ? (Respostas)
13. (a) Considere a função  $y = f(x) = x^2$ . Encontre uma função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , cuja curva de nível  $F(x, y) = 0$  seja igual ao gráfico de  $f$ .
- (b) Considere a função  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ . Encontre uma função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , cuja superfície de nível  $F(x, y, z) = 0$  seja igual ao gráfico de  $f$ . (Respostas)
14. Considere a função  $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$
- (a) Determine a superfície de nível  $S$  que passa pelo ponto  $P = (3, 1, 2)$ . Determine a equação do plano tangente a  $S$  que é paralelo ao plano  $4x + 12y - 8z + 10 = 0$
- (b) Determine o ponto de interseção da reta normal à superfície  $S$  que passa pelo ponto  $P$ , com o plano  $y = 0$ . (Respostas)
15. Considere a superfície  $S$  do parabolóide  $z = 3x^2 + y^2 - 2$ .

- (a) Encontre a equação do plano tangente a  $S$  no ponto  $P = (1, 1, 2)$ ;  
 (b) A superfície  $S$  do parabolóide deve ser apoiada por uma viga presa no chão ( $z = 0$ ), de tal modo que esta seja perpendicular a  $S$  no ponto  $P$ . Calcule o comprimento da viga.  
 (Respostas)

16. A temperatura em cada ponto de uma placa de metal é dada por

$$T(x, y) = \frac{16}{1 + x^2 + 2y^2}$$

- (a) Encontre a equação da isoterma que passa pelo ponto  $P = (1, 1)$  e o gradiente neste ponto. Esboce um desenho de ambos no mesmo sistema de coordenadas, mostrando o aspecto geométrico;  
 (b) Se uma formiga está no ponto  $P$ , qual direção e sentido ela deve andar de modo que a temperatura tenha sua menor taxa de variação? Qual é esta taxa?  
 (c) Se a formiga se mover na direção do vetor  $v = (-3, 4)$ , ela estará esquentando ou esfriando? Qual a taxa?  
 (d) Se a formiga começa a se mover de modo que sua posição em cada instante seja dada por  $r(t) = (\sqrt{1+t}, 1+2t)$ , qual a taxa de variação de temperatura em relação ao tempo que a formiga sofre 3 segundos depois?  
 (Respostas)

17. Considere a superfície  $S$  de equação  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  e  $S$  seu gráfico.

Determine a equação do plano tangente a  $S$  que seja paralelo ao plano  $x - 2y + 6z = 1$ .  
 (Resposta)

18. Considere a função  $z = f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 10y^2}$  e que  $x = 5e^{t-1}$  e  $y = 2 \ln t$ . Calcule  $\frac{dz}{dt}$  para  $t = 1$ .  
 (Resposta)

19. Seja a função dada por  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- (a)  $f(x, y)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ ?  
 (b) Calcule  $\frac{df}{dt}(g(t))|_{t=0}$  onde  $g(t) = (1 - t^2, 2 + t)$ .  
 (Respostas)

20. Mostre que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tem derivadas parciais contínuas em  $(0, 0)$ , porém, as derivadas parciais mistas não são aí contínuas.

21. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

(b) Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não são contínuas em  $(0, 0)$ .

(c) Prove, utilizando a definição, que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

22. Suponha que uma pessoa em uma festa beba  $x = x(t) = 0.8t$  litros de refrigerante e coma  $y = y(t) = 0,2t$  quilogramas de bolo de chocolate após  $t$  horas. Com isso ele produz  $E(x, y) = \frac{1}{2}x + 3y$  calorias de energia ao beber  $x$  litros de refrigerante e comer  $y$  quilogramas de bolo.

Quanta energia ele produziu após 5 horas de festa? Qual a taxa de produção de energia em  $t = 5$ ? (Resposta)

# Capítulo 6

## Máximos e Mínimos

---

### 6.1 Extremos de uma função

**Definição 6.1** Dada uma função  $z = f(x, y)$ , um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  é chamado de

(a) um **ponto de máximo local (relativo)** de  $f$  se existir um disco aberto

$$D_r(P_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

tal que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  para todo  $(x, y) \in D_r(P_0)$ . O valor  $f(P_0)$  é chamado de **valor máximo local (relativo)** de  $f$ .

(b) um **ponto de mínimo local (relativo)** de  $f$  se existir um disco aberto  $D_r(P_0)$  tal que  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  para todo  $(x, y) \in D_r(P_0)$ . O valor  $f(P_0)$  é chamado de **valor mínimo local (relativo)** de  $f$ .

Se no item (a) da definição 6.1 a condição  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  valer para todos os pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$ , então,  $P_0$  é chamado de **ponto de máximo absoluto** de  $f$  e seu valor de **valor máximo absoluto** de  $f$ .

Se no item (b) da definição 6.1 a condição  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  valer para todos os pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$ , então,  $P_0$  é chamado de **ponto de mínimo absoluto** de  $f$  e seu valor de **valor mínimo absoluto** de  $f$ .

Um valor máximo ou mínimo local de  $f$  é chamado genericamente de **valor extremo local** de  $f$  e o respectivo ponto é chamado de ponto extremo local de  $f$  (veja figura 6.1). Observe seu mapa de contorno e o aspecto geométrico onde ocorrem seus pontos extremos.

**Definição 6.2** Um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  é chamado **ponto crítico** de  $f$  se as derivadas parciais satisfazem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$$

ou, então, alguma delas não existe.

O próximo teorema nos dá as condições necessárias para a existência de extremos locais para uma função  $z = f(x, y)$ :

**Teorema 6.1** Se  $f$  tem um extremo local em  $P_0$ , então,  $P_0$  é um ponto crítico de  $f$ .

Geometricamente, isto significa que se o gráfico de  $f$  tem um plano tangente em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Este plano tangente é horizontal à superfície neste ponto (veja figura 6.3).

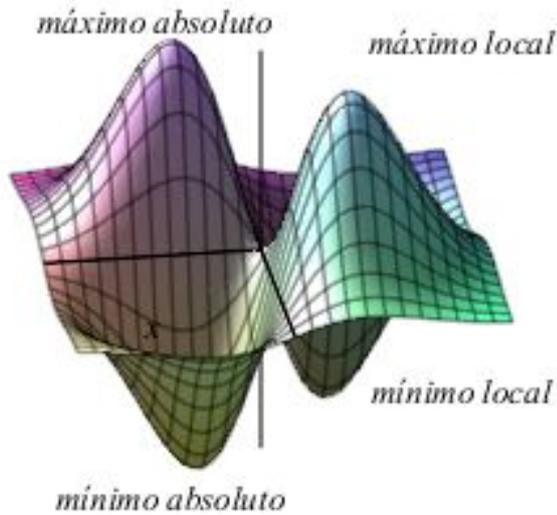


Figura 6.1: máximos e mínimos

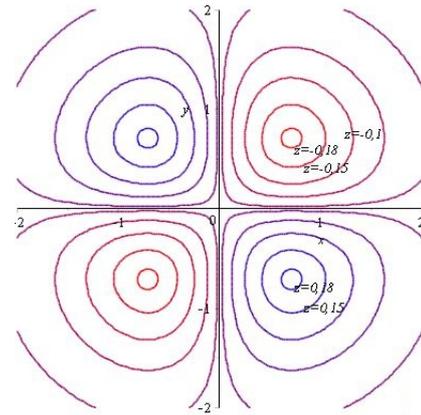


Figura 6.2: mapa de contorno

*Dem:* Vamos considerar o caso em que  $P_0$  é um ponto de máximo local. Neste caso,  $P_0$  também é um ponto de máximo local para a função de uma variável  $g(x) = f(x, y_0)$ . Assim, sua derivada  $\frac{dg}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0$  ou não existe. Analogamente, para a função  $h(y) = f(x_0, y)$ , conclui-se que  $\frac{dh}{dy}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$  ou não existe.

A demonstração para o caso em que  $P_0$  é mínimo é análoga.

Como no caso de função de uma variável, nem todos os pontos críticos são pontos extremos, mesmo que as derivadas parciais existam. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local, um mínimo, ou ainda, nenhum dos dois (veja o exemplo 6.2).

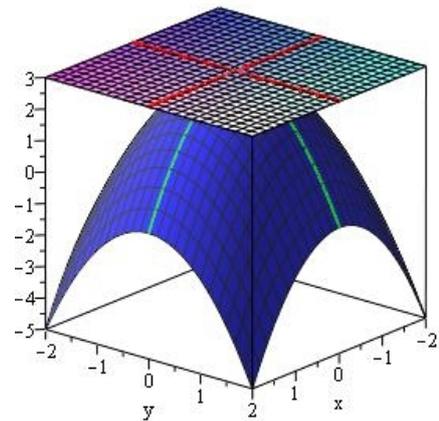


Figura 6.3: plano tangente horizontal

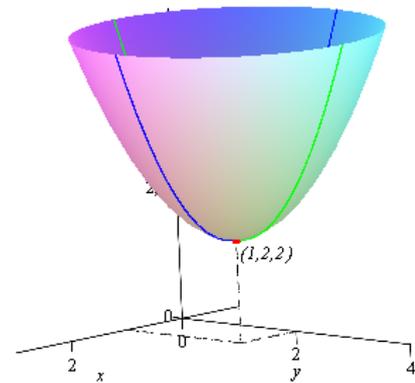
**Exemplo 6.1** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7$ . Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$$

Estas derivadas parciais são nulas para  $x = 1$  e  $y = 2$ . Logo, o único ponto crítico é o ponto  $P_0 = (1, 2)$ . Completando o quadrado na função, temos

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2$$

como  $(x - 1)^2 \geq 0$  e  $(y - 2)^2 \geq 0$ , então,  $f(x, y) \geq 2$  para qualquer  $(x, y)$ . Assim,  $P_0 = (1, 2)$  é um ponto de mínimo absoluto de  $f$ . O gráfico da função (figura 6.4) é um parabolóide com vértice  $P_0 = (1, 2, 2)$ .

Figura 6.4:  $z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7$

Observando as figuras 6.3 e 6.4, seria de se esperar que a natureza dos pontos críticos pudesse ser determinada pelo estudo das funções  $f(x, y_0)$  e  $f(x_0, y)$  usando o critério da segunda derivada. Porém, pode acontecer de uma destas funções ter um máximo e a outra um mínimo. Vejamos o exemplo:

**Exemplo 6.2** Determine os valores extremos de  $z = f(x, y) = y^2 - x^2$ .

*Solução:* As derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

se anulam somente para  $x = 0$  e  $y = 0$ . Portanto, o único ponto crítico é o ponto  $P_0 = (0, 0)$ . Acontece que o ponto  $(0, 0)$  é ponto de mínimo para a curva  $f(0, y) = y^2$  e máximo para a curva  $f(x, 0) = -x^2$  (veja a figura 6.5). Este ponto é chamado de **ponto de sela**.

**Definição 6.3** Uma função diferenciável  $f$  tem um **ponto de sela** em um ponto crítico  $(a, b)$  se em todo disco aberto centrado em  $(a, b)$  existem pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$ , onde  $f(x, y) > f(a, b)$  e pontos onde  $f(x, y) < f(a, b)$ . O ponto correspondente  $(a, b, f(a, b))$  na superfície  $z = f(x, y)$  é chamado de **ponto de sela da superfície**.

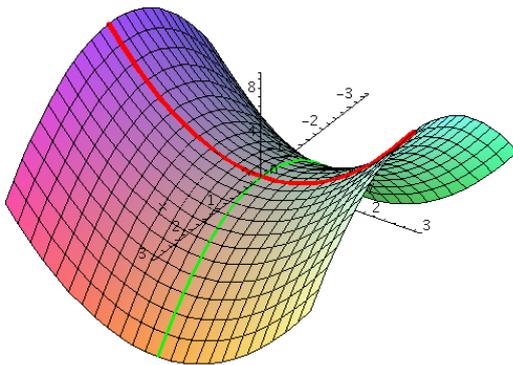


Figura 6.5:  $z = y^2 - x^2$

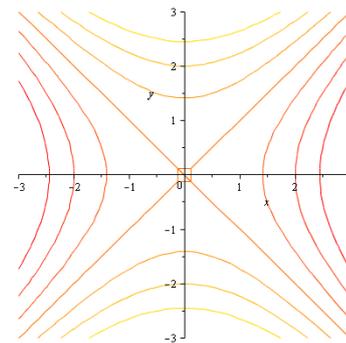


Figura 6.6: mapa de contorno da sela

Podemos ter ainda uma função, por exemplo,  $z = f(x, y) = 1 - x^2 + 4xy - y^2$  (veja que seu gráfico, figura 6.7, é uma sela rotacionada), de tal modo que as curvas  $z = f(x, 0)$  e  $z = f(0, y)$  tenham um máximo em  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ , sem que o ponto  $(x_0, y_0)$  seja um máximo de  $f$ . Veja o gráfico da figura 6.7 e observe que  $(0, 0)$  é um ponto de mínimo para a curva do gráfico de  $f$  interseção com o plano  $x = y$ .

Os exemplos acima podem nos levar a pensar que se analisarmos o comportamento dos traços do gráfico com planos perpendiculares ao plano  $z = 0$  passando pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , poderemos classificar tais pontos, se todas as curvas tiverem a mesma concavidade próxima ao ponto  $P_0$ . Observe o exemplo abaixo mostrando que devemos ter muito cuidado ao fazer este tipo de raciocínio:

**Exemplo 6.3** Considere a função  $z = g(x, y) = 3x^4 + y^2 - 4x^2y$ . Observando a figura 6.9 vemos que a interseção do gráfico desta função com um plano perpendicular ao plano  $xy$ ,  $y = kx$ , é a curva  $\gamma$  (figura 6.10) que tem concavidade voltada pra cima, próxima à origem, para qualquer que seja o valor de  $k \in \mathbb{R}$ . Esta observação pode ser provada facilmente usando-se os critérios de máximos e mínimos locais para função de uma variável.

Isto pode nos levar a pensar que a origem é um ponto de mínimo, o que não é verdade. Observando o gráfico da função, vemos que ela parece ficar abaixo do plano  $xy$  para pontos sobre uma curva, que nos parece ser uma parábola voltada para o eixo  $y$ . Veja o gráfico da figura 6.11.

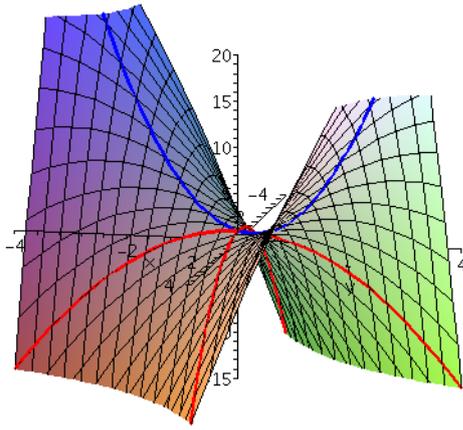
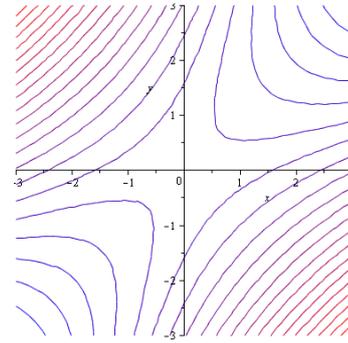
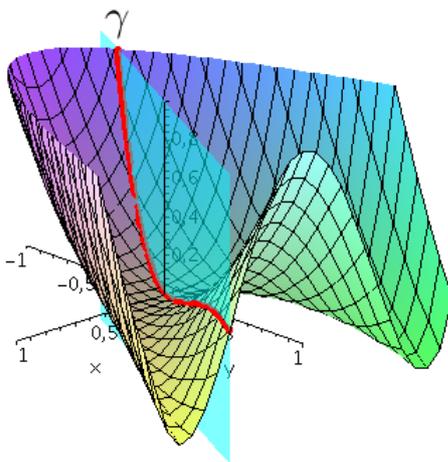
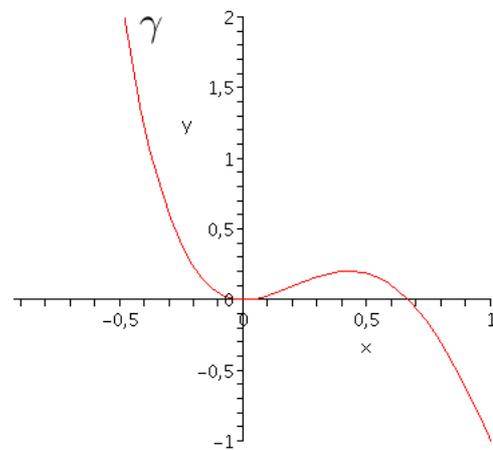
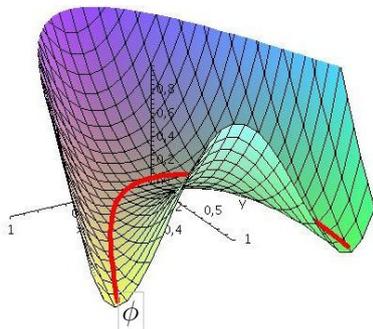
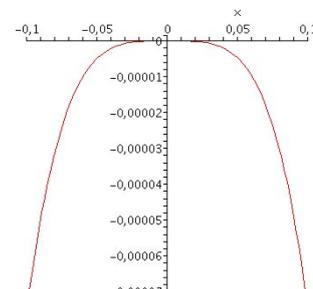
Figura 6.7:  $z = 1 - x^2 + 4xy - y^2$ 

Figura 6.8

Figura 6.9:  $z = 3x^4 + y^2 - 4x^2y$ Figura 6.10:  $z = 3x^4 + k^2x^2 - 4kx^3$ Figura 6.11:  $z = 3x^4 + y^2 - 4x^2y$ Figura 6.12:  $z = -0.75x^4$ 

Vamos determinar as equações paramétricas desta curva ou melhor de uma parábola  $\phi$  muito próxima desta curva. Considere a curva interseção da superfície  $g$  com o plano vertical  $y = 1$ , isto é,  $z = 3x^4 + 1 - 4x^2$ . Seus pontos de mínimo são  $x = 0.81$  e seu simétrico  $x = -0.81$ . Como a parábola passa pela origem e pelos pontos  $(0.81, 1)$  e  $(-0.81, 1)$ , é fácil mostrar que a curva  $\phi$  projetada no plano  $xy$  é a parábola  $y = 1.5x^2$ . Assim, suas equações paramétricas são  $\phi(t) = (t, 1.5t^2, g(t, 1.5t^2)) =$

$(t, 1.5t^2, -0.75t^4)$  e sua projeção no plano  $xz$  é dada pela equação  $z = -0.75x^4$ , como é mostrada na figura 6.12. Assim, muito embora, os traços do gráfico de  $g$  com planos perpendiculares ao plano  $xy$  passando pela origem tenham concavidade voltada para cima, os pontos sobre a parábola  $\phi$  estão abaixo do plano  $xy$  e, portanto, a origem não é ponto de mínimo.

A sutileza está no fato de que para a origem ser ponto de mínimo, tem que existir uma vizinhança  $D_r(0,0)$ , de tal modo que toda curva de interseção do gráfico de  $g$  com um plano vertical que passa pela origem, tenha concavidade voltada para cima dentro do cilindro  $D_r(0,0)$ . Observe que neste exemplo, qualquer que seja o disco aberto  $D_r(0,0)$ , sempre existe um ponto (sobre a parábola  $\phi$ ) em que o valor de  $g$  neste ponto é menor que zero.

O teorema a seguir nos dá condições suficientes para extremos locais:

**Teorema 6.2 *Teste da Segunda Derivada:*** *Suponha que  $f$  tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas em um disco aberto com centro em um ponto crítico  $(a,b)$  de  $f$ . Denotemos por*

$$A = f_{xx}(a,b), \quad B = f_{xy}(a,b), \quad C = f_{yy} \quad e \quad D = B^2 - AC$$

(a) *Se  $D < 0$  e  $A > 0$ , então,  $(a,b)$  é um ponto de mínimo local de  $f$*

(b) *Se  $D < 0$  e  $A < 0$ , então,  $(a,b)$  é um ponto de máximo local de  $f$*

(c) *Se  $D > 0$ , então,  $(a,b)$  é um ponto de sela.*

*Dem:* Iremos demonstrar o item (a). Os itens (b) e (c) tem demonstrações semelhantes.

A idéia é provar o que dissemos no final do exemplo da seção anterior, isto é, que existe uma vizinhança  $D_r(a,b)$ , de tal modo que, para qualquer ponto  $P$  de  $D_r(a,b)$ , a curva  $C$  de interseção do gráfico de  $f$  com o plano vertical que passa por  $P$  tenha concavidade voltada para cima no intervalo de comprimento  $2r$ . Para isso, vamos calcular a derivada segunda direcional de  $f$  na direção do vetor unitário  $u = (u_1, u_2)$ . A derivada de primeira ordem é:

$$D_u f = f_x u_1 + f_y u_2$$

e a derivada segunda é

$$\begin{aligned} D_u^2 f &= D_u(D_u f) = \frac{\partial(D_u f)}{\partial x} u_1 + \frac{\partial(D_u f)}{\partial y} u_2 = ((f_{xx} u_1 + f_{yx} u_2) u_1 + (f_{xy} u_1 + f_{yy} u_2) u_2) \\ &= f_{xx} u_1^2 + 2f_{xy} u_1 u_2 + f_{yy} u_2^2 \end{aligned}$$

Completando o quadrado em  $u_1$  na última expressão obtemos

$$D_u^2 f = f_{xx} \left( u_1 + \frac{f_{xy} u_2}{f_{xx}} \right)^2 - \frac{u_2^2 (f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy})}{f_{xx}}$$

Como  $f_{xx}$  e  $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}$  são funções contínuas e estamos supondo que  $A > 0$  e  $D < 0$ , existe um disco aberto  $D_r(a,b)$ , tal que,  $f_{xx} > 0$  e  $D(x,y) < 0$ , para todo ponto  $(x,y)$  pertencente a  $D_r(a,b)$ . Portanto,  $D_u^2 f > 0$  para todo ponto  $(x,y)$  pertencente a  $D_r(a,b)$ . Isso implica que se  $C$  é uma curva obtida pela interseção do gráfico de  $f$  com o plano vertical que passa por  $(a,b)$  na direção de  $u = (u_1, u_2)$ , então,  $C$  tem a concavidade voltada para cima no intervalo de comprimento  $2r$ . Como isto é verdade na direção de qualquer vetor  $u = (u_1, u_2)$ , o gráfico de  $f$  restrito ao disco  $D_r(a,b)$  estará acima do plano horizontal tangente a  $f$  no ponto  $(a,b, f(a,b))$ . Logo,  $f(a,b) \leq f(x,y)$  para todo  $(x,y)$  em  $D_r(a,b)$ . O que mostra que  $(a,b)$  é um ponto de mínimo local de  $f$ .

**Observação:** Se  $D = 0$ , o teste não fornece informação (exemplos 6.3 e 6.6). A função pode ter um máximo, um mínimo, um ponto de sela.

**Exemplo 6.4** Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 7y$$

Solução: Tem-se

$$f_x = 4x - y \quad e \quad f_y = -x + 2y - 7$$

Para encontrar os pontos críticos resolvemos o sistema de equações

$$4x - y = 0 \quad e \quad -x + 2y - 7 = 0$$

Da primeira equação,  $y = 4x$  e substituindo na segunda obtemos  $x = 1$  e, assim,  $y = 4$ . Logo, o único ponto crítico é  $P = (1, 4)$ .

As derivadas parciais de segunda ordem são

$$f_{xx} = 4, \quad f_{yy} = 2 \quad e \quad f_{xy} = -1$$

e, portanto,  $A = 4$ ,  $B = -1$ ,  $C = 2$  e  $D = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$

Logo, pelo teste da segunda derivada, o ponto  $(1, 4)$  é ponto de mínimo local.

**Exemplo 6.5** Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Solução: Tem-se

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 \quad e \quad f_y = 6xy - 12$$

Resolvendo o sistema de equações

$$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \quad e \quad 6xy - 12 = 0$$

obtemos quatro pontos críticos

$$P_1 = (1, 2), \quad P_2 = (2, 1), \quad P_3 = (-1, -2), \quad e \quad P_4 = (-2, -1)$$

As derivadas parciais de segunda ordem são

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6x, \quad e \quad f_{xy} = 6y$$

Ponto crítico	$B^2 - AC$	$A$	
$P_1$	$12^2 - 6 \cdot 6 > 0$		sela
$P_2$	$6^2 - 12 \cdot 12 < 0$	$12 > 0$	mínimo local
$P_3$	$(-12)^2 - (-6) \cdot (-6) > 0$		sela
$P_4$	$(-6)^2 - (-12) \cdot (-12) < 0$	$-12 < 0$	máximo local

Veja o gráfico de  $f$  (figura 6.13) e observe em seu mapa de contorno (figura 6.14) o aspecto geométrico onde ocorrem os pontos de máximo e mínimo e os pontos de sela.

O exemplo a seguir mostra que o teste não se aplica.

**Exemplo 6.6** Determine e classifique os pontos críticos da função  $f(x, y) = x^4 + y^4$

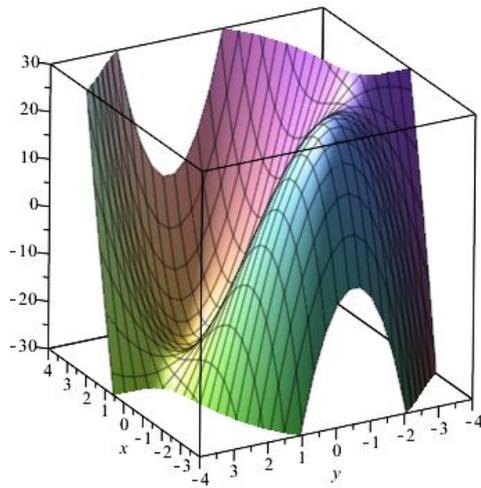


Figura 6.13:  $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

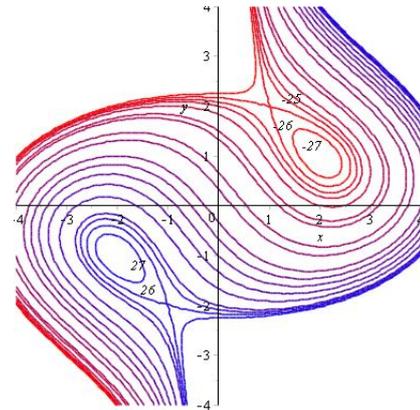


Figura 6.14: Mapa de contorno

Solução: Resolvendo o sistema

$$f_x = 4x^3 = 0, \quad \text{e} \quad f_y = 4y^3 = 0$$

obtém-se o ponto  $P = (0, 0)$ . Calculando-se as derivadas de segunda ordem

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = 0 \quad \text{e} \quad f_{yy} = 12y^2$$

tem-se que no ponto  $P = (0, 0)$   $B^2 - AC = 0$  e, portanto, nada se conclui pelo teste da segunda derivada. Porém, podemos ver  $f(0, 0) = 0 < f(x, y)$ , para qualquer  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Logo,  $P = (0, 0)$  é ponto de mínimo absoluto (figura 6.15).

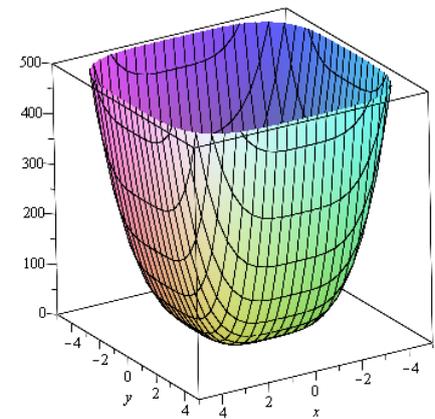


Figura 6.15:  $z = x^4 + y^4$

**Exemplo 6.7** Determine e classifique os pontos críticos da função  $z = f(x, y) = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{32}y^4 - x^2$

Solução: Resolvendo o sistema de equações

$$f_x = -2x = 0 \quad \text{e} \quad f_y = \frac{3}{2}y + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{8}y^3 = 0$$

obtém-se os pontos

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, -3), \quad P_3 = (0, 4)$$

Calculando as derivadas de segunda ordem

$$f_{xx} = -2, \quad f_{xy} = 0 \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}y^2$$

tem-se a tabela:

Ponto crítico	$B^2 - AC$	$A$	
$P_1$	$0 - (-2) \cdot \frac{3}{2} > 0$		sela
$P_2$	$0 - (-2) \cdot (-\frac{21}{8}) < 0$	$-2 < 0$	máximo local
$P_3$	$-(-2) \cdot (-\frac{7}{2}) < 0$	$-2 < 0$	máximo local

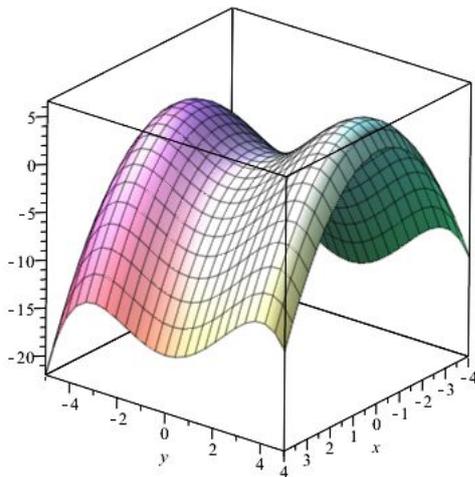


Figura 6.16:  $z = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{32}y^4 - x^2$

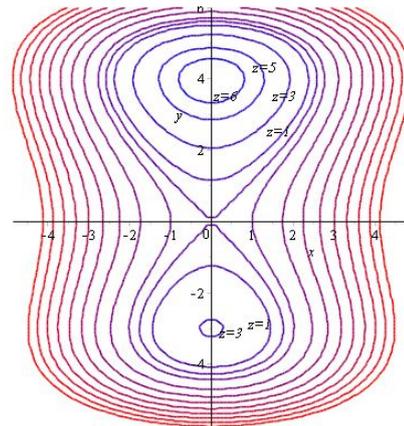


Figura 6.17: Mapa de contorno

**Exemplo 6.8** *Determine as dimensões do paralelepípedo retangular que tem três faces sobre os planos coordenados e um vértice no primeiro octante sobre o plano  $x + y + z = 1$ , que tenha volume máximo (veja a figura 6.18).* ⓘ

*Solução:* Como queremos encontrar um paralelepípedo de volume máximo, podemos considerar o paralelepípedo de arestas  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $z > 0$ , pois caso contrário o volume seria zero. Seu volume é  $V = xyz$ . Como o vértice  $P = (x, y, z)$  está no plano  $x + y + z = 1$ , tem-se que  $z = 1 - x - y$  e, portanto, o volume  $V$  se torna uma função de 2 variáveis

$$V = V(x, y) = xy(1 - x - y) = xy - x^2y - xy^2$$

Assim, para encontrar seus pontos críticos, resolvemos as equações

$$V_x = y - 2xy - y^2 = 0 \quad \text{e} \quad V_y = x - x^2 - 2xy = 0$$

obtendo

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{3}$$

Calculando as derivadas de segunda ordem

$$V_{xx} = -2y, \quad V_{xy} = 1 - 2x - 2y, \quad \text{e} \quad V_{yy} = -2x$$

tem-se

$$B^2 - AC = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 < 0 \quad \text{e} \quad A = -\frac{2}{3} < 0$$

Pelo teste da derivada segunda, o ponto  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  é um ponto de máximo local e como temos um único ponto crítico, pela própria natureza do problema, este ponto é, também, absoluto.

Como  $z = 1 - x - y$ , para  $x = \frac{1}{3}$  e  $y = \frac{1}{3}$ , tem-se que  $z = \frac{1}{3}$ . Portanto, o paralelepípedo de arestas  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{1}{3}$  e  $z = \frac{1}{3}$  é o paralelepípedo de volume máximo.

Neste exemplo maximizamos a função volume  $V = xyz$  com a condição de que  $x + y + z = 1$ . O que fizemos foi substituir a variável  $z = 1 - x - y$  em  $V = xyz$  e resolver um problema de duas variáveis  $x$  e  $y$ .

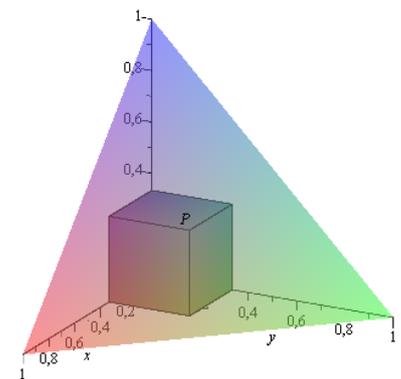


Figura 6.18

Na próxima seção veremos o Método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos de uma função  $w = f(x, y, z)$ , com a restrição de que os pontos  $(x, y, z)$  satisfaçam a condição  $g(x, y, z) = 0$ .

## 6.2 Máximos e Mínimos Condicionados

### 6.2.1 Multiplicadores de Lagrange para funções de 2 variáveis



Nesta seção apresentamos, a técnica dos **Multiplicadores de Lagrange** para determinar os pontos de máximo ou mínimo de uma função  $z = f(x, y)$  com a restrição de que os pontos  $(x, y)$  satisfaçam a condição  $g(x, y) = 0$ . Geometricamente, isto significa que ao invés de procurarmos os pontos extremos de  $f$  em todo o plano  $\mathbf{R}^2$ , estaremos procurando apenas sobre uma curva  $C$  dada pela equação  $g(x, y) = 0$ .

Para resolver um problema deste tipo podemos, a princípio, tentar resolver a equação  $g(x, y) = 0$  para  $y = \phi(x)$  ou  $x = \psi(y)$  e, então, resolver um problema de otimização de uma função de uma variável  $z = f(x, \phi(x))$  (ou  $z = f(\psi(y), y)$ ). Caso isto não seja possível ou seja muito trabalhoso, utilizamos a técnica dos **Multiplicadores de Lagrange** que é baseado no seguinte resultado:

“Se  $P = (x_0, y_0)$  é um ponto extremo de  $z = f(x, y)$  sobre a curva  $C$ , dada por  $g(x, y) = 0$ , então, o  $\nabla f(P)$  é paralelo ao  $\nabla g(P)$ .”

Geometricamente é fácil ver a validade desta proposição. Observe em particular o gráfico da figura 6.19. Como estamos procurando os pontos extremos de  $f$  restritos à curva  $C$ , quando percorremos esta curva os valores de  $f$  aumentam até a curva de nível  $f = 50$  no ponto de contato  $P$  e depois voltam a diminuir. O ponto de contato  $P$  entre as duas curvas  $C$  e  $f = 50$  é exatamente o ponto onde as curvas se tangenciam. Logo, as duas curvas tem uma reta tangente em comum e, portanto, o gradiente de  $f$  em  $P$ ,  $\nabla f(P)$ , é perpendicular a esta reta tangente e, assim, à curva  $C$ . Como o  $\nabla g(P)$  também é perpendicular a esta tangente, segue que os dois vetores são paralelos, como mostra a figura 6.20.

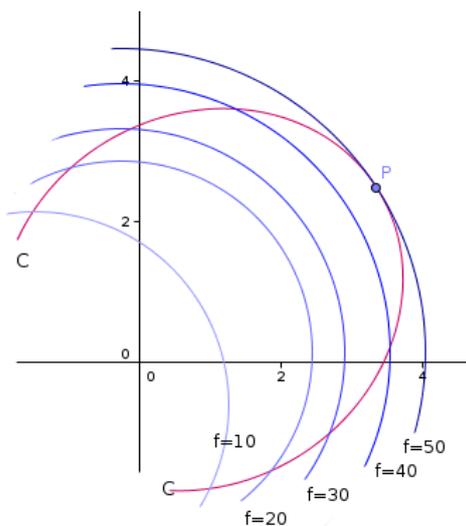


Figura 6.19

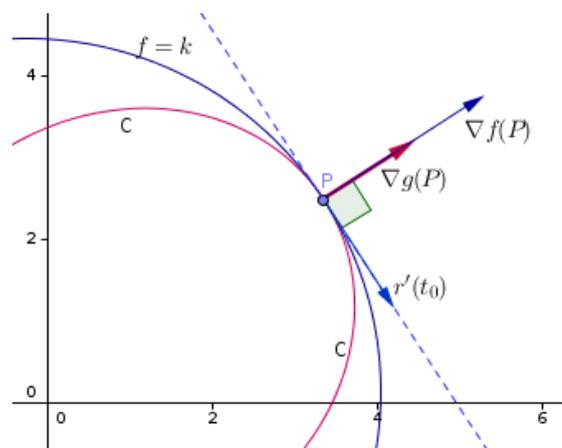


Figura 6.20

Este argumento geométrico pode ser provado como segue:

Suponha que a curva  $C$  tenha uma parametrização próxima a  $P$ :  $r(t) = (x(t), y(t))$  e que  $t_0$  seja o parâmetro onde  $r(t_0) = P$ . Ao calcularmos os valores de  $f$  sobre a curva  $C$ , obtemos a função composta

$$h(t) = f(x(t), y(t))$$

Como  $f$  tem um valor extremo em  $P = (x_0, y_0)$ , segue que  $h$  tem um valor extremo em  $t_0$  e, portanto,  $h'(t_0) = 0$ . Assim, se  $f$  for diferenciável, pela Regra da Cadeia, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{dy}{dt}(t_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0) \right) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot r'(t_0) \end{aligned}$$

Isto mostra que o vetor gradiente  $\nabla f(P)$  é perpendicular ao vetor  $r'(t_0)$ , tangente à curva  $C$  em  $P$ . Como a curva  $C$  dada por  $g(x, y) = 0$  é uma curva de nível de uma função  $z = g(x, y)$ , o gradiente de  $g$  em  $P$ ,  $\nabla g(P)$ , também é perpendicular a  $r'(t_0)$ . Logo, os vetores  $\nabla f(P)$  e  $\nabla g(P)$  são paralelos. Portanto, existe um número  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que,

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) \quad (6.1)$$

*Observação:* Na demonstração acima fizemos várias suposições. A primeira foi o fato da curva  $C$  ter uma parametrização. Este fato é garantido pelo Teorema da Função Implícita, desde que o  $\nabla g(P) \neq 0$ . Outra hipótese foi de que  $f$  seja diferenciável. Assim, o resultado exposto acima pode ser formulado mais precisamente como:

**Teorema 6.3** *Sejam  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$  funções diferenciáveis. Se o extremo de  $f$  sujeita à restrição  $g(x, y) = 0$  ocorre em um ponto  $P$  onde  $\nabla g(P) \neq 0$ , então,*

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) \quad (6.2)$$

para alguma constante real  $\lambda$ .

O número  $\lambda$  é chamado **multiplicador de Lagrange**. Assim o procedimento para encontrar pontos extremos absolutos, se existirem, de uma função  $z = f(x, y)$  sujeita à restrição  $g(x, y) = 0$  se resume a:

**Método dos Multiplicadores de Lagrange para funções de 2 variáveis:**

(a) Determinar todos os valores de  $x$ ,  $y$  e  $\lambda$ , tais que,

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{e} \quad g(x, y) = 0 \quad (\nabla g \neq 0)$$

ou seja, resolver o sistema de 3 variáveis:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

(b) Calcule os valores de  $f$  em todos os pontos  $(x, y)$  encontrados em (a). O maior valor será o valor máximo de  $f$  e o menor o valor mínimo de  $f$ .

Lembre-se de que pelo Teorema dos Valores Extremos, a existência dos extremos absolutos só ocorrerá se o conjunto dos pontos que satisfazem a restrição  $g(x, y) = 0$  formarem um conjunto fechado e limitado.

Não existe uma regra geral para resolver o sistema acima, como veremos nos exemplos a seguir.

**Exemplo 6.9** Determinar os extremos da função  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3$  sobre a curva  $C : 4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0$

*Solução:* Completando os quadrados em ambas as equações acima, vemos que trata-se de encontrar os extremos de um parabolóide

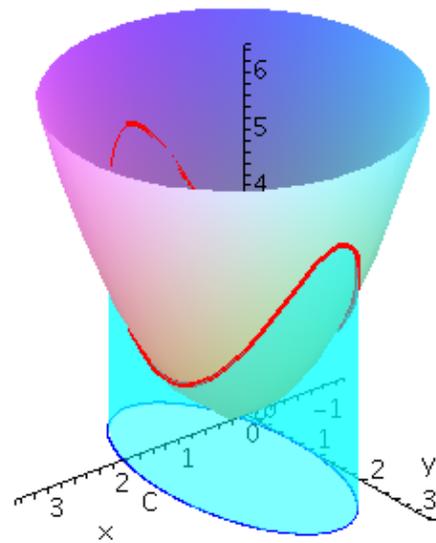
$$z = 1 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

sobre uma elipse

$$(x - 1)^2 + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

Observando a figura 6.21 vemos que esta função terá 4 pontos extremos, sendo 2 de máximo e 2 de mínimo.

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, temos que resolver o sistema



$$\begin{cases} 2x - 2 = \lambda(8x - 8) \\ 2y - 2 = \lambda(2y - 2) \\ 4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 = 4\lambda(x - 1) \\ y - 1 = \lambda(y - 1) \\ 4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, tem-se que se  $y \neq 1$ , então,  $\lambda = 1$ . Substituindo este valor na primeira equação, tem-se  $x = 1$ . Substituindo este valor na terceira equação, encontra-se  $y = 3$  e  $y = -1$ . Assim, encontramos os dois primeiros pontos

$$P_1 = (1, 3) \quad \text{e} \quad P_2 = (1, -1)$$

Agora, se  $y = 1$ , substituindo-se na terceira equação encontramos  $x = 2$  e  $x = 0$ . Logo, encontramos os outros dois pontos

$$P_3 = (2, 1) \quad \text{e} \quad P_4 = (0, 1)$$

Como

$$f(P_1) = f(P_2) = 5 \quad \text{e} \quad f(P_3) = f(P_4) = 2$$

segue que os pontos  $P_1 = (1, 3)$  e  $P_2 = (1, -1)$  são de máximo e os pontos  $P_3 = (2, 1)$  e  $P_4 = (0, 1)$  são de mínimo.

**Exemplo 6.10** Determinar os extremos da função  $z = f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$  sobre a hipérbole  $C : x^2 - y^2 = 1$

*Solução:* O problema consiste em determinar os pontos de um parabolóide  $z = x^2 + (y - 2)^2$  nos quais se obtém o menor valor sobre a hipérbole  $C : x^2 - y^2 = 1$ . Veja a figura 6.22, representativa deste problema. Neste caso não temos pontos de máximo e, sim, apenas de mínimo.

A restrição pode ser escrita como  $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

Aplicando o métodos dos multiplicadores de Lagrange temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2(y - 2) = -2\lambda y \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda x \\ y - 2 = -\lambda y \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Como os pontos pertencem a hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$ , isto implica que  $x \neq 0$ , logo, da primeira igualdade do sistema tem-se que  $\lambda = 1$ . Substituindo-se na segunda igualdade, obtém-se  $y = 1$ . Assim, da terceira igualdade obtém-se  $x = \sqrt{2}$  e  $x = -\sqrt{2}$ . Portanto, encontramos 2 pontos que satisfazem o sistema:

$$P_1 = (\sqrt{2}, 1) \quad \text{e} \quad P_2 = (-\sqrt{2}, 1)$$

e  $f(P_1) = f(P_2) = 3$ .

Geometricamente se observa que  $P_1$  e  $P_2$  são os pontos de mínimo e que não temos pontos de máximo. Para uma demonstração algébrica tem-se que mostrar que

$$f(\sqrt{2} + h, 1 + k) \geq f(\sqrt{2}, 1) = 3$$

e que

$$f(-\sqrt{2} + h, 1 + k) \geq f(\sqrt{2}, 1) = 3$$

para quaisquer valores de  $h$  e  $k$  para os quais os pontos  $(\pm\sqrt{2} + h, 1 + k)$  pertence à hipérbole  $C : x^2 - y^2 = 1$ .

De fato, mostremos para a primeira desigualdade (a segunda é análoga):

$$f(\sqrt{2} + h, 1 + k) = (\sqrt{2} + h)^2 + (1 + k - 2)^2 = 3 + 2\sqrt{2}h + h^2 - 2k + k^2$$

Agora, como  $(\sqrt{2} + h, 1 + k)$  pertença à hipérbole  $C : x^2 - y^2 = 1$ , tem-se

$$(\sqrt{2} + h)^2 - (1 + k)^2 = 1 \Rightarrow -2k = k^2 - 2\sqrt{2}h - h^2$$

logo,

$$f(\sqrt{2} + h, 1 + k) = 3 + 2\sqrt{2}h + h^2 + k^2 + k^2 - 2\sqrt{2}h - h^2 = 3 + 2k^2 \geq 3$$

para qualquer valor de  $k$ .

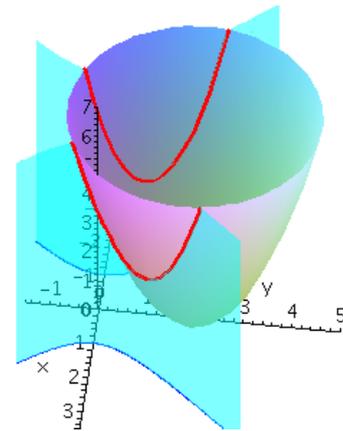


Figura 6.22

## 6.2.2 Multiplicadores de Lagrange para funções de 3 variáveis e uma restrição

A determinação dos pontos extremos de uma função de 3 variáveis  $w = f(x, y, z)$  com a restrição de que  $x, y$  e  $z$  satisfaçam a condição  $g(x, y, z) = 0$  é análoga ao caso de 2 variáveis, com a diferença que o sistema a ser resolvido é um sistema de 4 variáveis com 4 incógnitas  $x, y, z$  e  $\lambda$ :

Método dos Multiplicadores de Lagrange para funções de 3 variáveis com uma restrição:

(a) Determinar todos os valores de  $x, y, z$  e  $\lambda$ , tais que,

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = 0 \quad (\nabla g \neq 0)$$

ou seja, resolver o sistema de 4 variáveis:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

(b) Calcule os valores de  $f$  em todos os pontos  $(x, y, z)$  encontrados em (a). O maior valor será o valor máximo de  $f$  e o menor o valor mínimo de  $f$  (supondo que estes pontos extremos existam!).

Neste caso, a interpretação geométrica é a de que estamos procurando os pontos extremos de  $f$  sobre uma superfície de nível  $g = 0$ .

**Exemplo 6.11** *Determinar o paralelepípedo retangular de volume máximo inscrito em uma esfera de raio  $a$ .*

*Solução:* Considere uma esfera de raio  $a$  com centro na origem e um paralelepípedo retangular com faces paralelas aos eixos coordenados conforme figura 6.23 (O problema independe do referencial). Como as faces do paralelepípedo que estamos vendo cortam os eixos coordenados nos pontos  $(x, 0, 0)$ ,  $(0, y, 0)$  e  $(0, 0, z)$  o volume do paralelepípedo é dado por  $V(x, y, z) = 8xyz$  com a restrição de que o ponto  $P = (x, y, z)$  pertença à esfera de raio  $a$ , i.é., satisfaz a condição  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , com  $x > 0, y > 0$  e  $z > 0$ . Aplicando o métodos dos multiplicadores de Lagrange temos que resolver o sistema

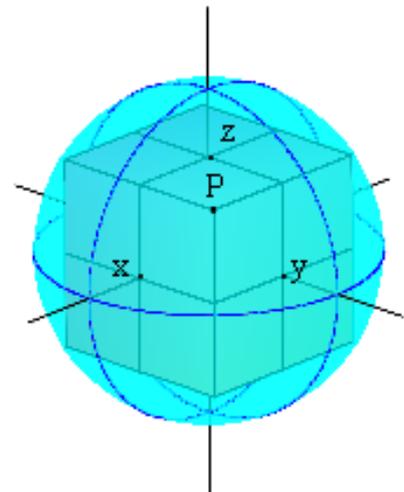


Figura 6.23

$$\begin{cases} 8yz = \lambda 2x \\ 8xz = \lambda 2y \\ 8xy = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4xyz = \lambda x^2 \\ 4xyz = \lambda y^2 \\ 4xyz = \lambda z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

Vemos que  $\lambda x^2 = \lambda y^2 = \lambda z^2$  e como  $\lambda > 0$ , pois caso contrário teríamos ou  $x$  ou  $y$  ou  $z$  igual a zero, temos que  $x = y = z$ . Substituindo na quarta equação, obtemos  $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Portanto, o paralelepípedo com volume máximo inscrito em um a esfera

de raio  $a$  tem arestas de comprimento  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$  e seu volume é  $\frac{8\sqrt{3}a^3}{9}$ .

### 6.2.3 Multiplicadores de Lagrange para funções de 3 variáveis com 2 restrições

Suponha agora, que queiramos determinar os pontos extremos de uma função de 3 variáveis  $w = f(x, y, z)$  sujeita às restrições  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$ .

Geometricamente, isto significa que estamos procurando os pontos extremos de  $f$  sobre uma curva  $C$ , que é a interseção de duas superfícies de nível  $g = 0$  e  $h = 0$ . Mostra-se, de modo análogo ao caso de duas variáveis, que se  $f$  tem um ponto extremo em  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , o  $\nabla f$  é ortogonal à curva  $C$  em  $P$ . Como, também, os gradientes  $\nabla g$  e  $\nabla h$  são ortogonais às superfícies de nível  $g = 0$  e  $h = 0$ , respectivamente, eles são ortogonais à curva  $C$ . Supondo que estes vetores não sejam paralelos e nem nulos, o gradiente  $\nabla f(P)$  pertence ao plano determinado pelos gradientes  $\nabla g(P)$  e  $\nabla h(P)$  (figura 6.24). Assim, existem constantes  $\lambda$  e  $\mu$ , chamados de **Multiplicadores de Lagrange**, tais que,

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P)$$

Neste caso o método do multiplicadores de Lagrange se resume a resolver um sistema de 5 equações e 5 incógnitas  $x, y, z, \lambda$  e  $\mu$ :

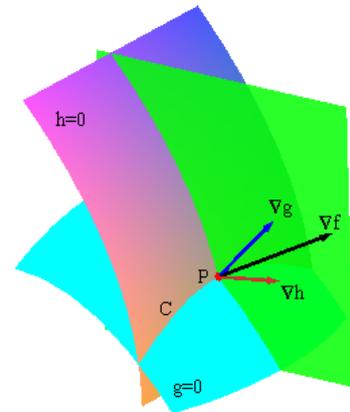


Figura 6.24

**Método dos Multiplicadores de Lagrange para funções de 3 variáveis com duas restrições:**

(a) Determinar todos os valores de  $x, y, z, \lambda$  e  $\mu$ , tais que,

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$$

( $\nabla g \neq 0, \nabla h \neq 0$  e não paralelos), ou seja, resolver o sistema de 5 equações e 5 variáveis:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} + \mu \frac{\partial h}{\partial z} \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

(b) Calcule os valores de  $f$  em todos os pontos  $(x, y, z)$  encontrados em (a). O maior valor será o valor máximo de  $f$  e o menor o valor mínimo de  $f$  (supondo que estes pontos extremos existam!).

**Exemplo 6.12** Considere a curva  $\gamma$  intersecção do plano  $x + 2y + z = 1$  com o cilindro  $\frac{x^2}{4} + z^2 = 1$ . Determine as distâncias máxima e mínima dos pontos de  $\gamma$  ao plano  $y = 0$ .

**Solução:** Determinar os pontos da curva  $\gamma$  que dão a maior e a menor distância ao plano  $y = 0$  é determinar os pontos que tem o maior e o menor valor de  $|y|$ . Isto é equivalente a determinar os

pontos extremos da função  $g(x, y, z) = \sqrt{y^2}$ , o que é equivalente a determinar os pontos extremos da função  $f(x, y, z) = y^2$  com duas restrições:  $x + 2y + z = 1$  e  $\frac{x^2}{4} + z^2 = 1$ .

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange para duas restrições, temos que resolver o sistema de 5 equações e 5 incógnitas  $x, y, z, \lambda$  e  $\mu$ :

$$\begin{cases} 0 = \lambda + \frac{1}{2}x\mu \\ 2y = 2\lambda \\ 0 = \lambda + \mu 2z \\ x + 2y + z = 1 \\ \frac{x^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \frac{1}{2}\mu x = 0 \\ \lambda = y \\ \lambda + 2\mu z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ \frac{x^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y + \frac{1}{2}\mu x = 0 \\ y + 2\mu z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ \frac{x^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases}$$

Pela primeira e segunda equações, tem-se  $\mu(x - 4z) = 0$ . Então,  $\mu = 0$  ou  $x = 4z$ . Se  $\mu = 0$  a primeira equação também implica que  $y = 0$ . Com isto, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ \frac{x^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases}$$

obtem-se as soluções:

$$\{x = 0, z = 1\} \quad \text{e} \quad \left\{x = \frac{8}{5}, z = -\frac{3}{5}\right\}$$

ou seja, encontramos os pontos

$$P_1 = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{8}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

Agora, se  $x = 4z$ . Substituindo-se na última equação obtém-se

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad x = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Substituindo estes valores na equação  $x + 2y + z = 1$  obtém-se os pontos

$$P_3 = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{e} \quad P_4 = \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

Obviamente, como os pontos  $P_1$  e  $P_2$  estão no plano  $y = 0$ , eles são os pontos de mínimo e o ponto  $P_4$  é o ponto de máximo, pois tem o maior valor de  $y$ .

A figura 6.25 mostra a curva  $\gamma$ , interseção do plano  $x + 2y + z = 1$  com o cilindro  $\frac{x^2}{4} + z^2 = 1$  e os pontos encontrados na resolução do sistema dado pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

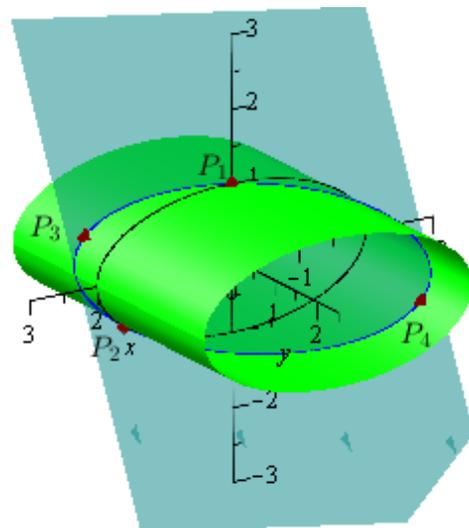


Figura 6.25

### 6.3 Máximos e Mínimos em regiões fechadas e limitadas

A determinação de pontos extremos de uma função de uma variável  $y = f(x)$  em intervalos da reta depende de o intervalo ser fechado ou aberto, limitado ou ilimitado. A garantia da existência de pontos extremos é dada pelo Teorema dos Valores Extremos:

“Toda função contínua  $y = f(x)$  definida sobre um intervalo fechado e limitado  $[a, b]$  tem máximo e mínimo neste intervalo.”

No caso de funções de duas variáveis a extensão do teorema acima depende da extensão dos conceitos de intervalo fechado e limitado para regiões fechadas e limitadas do plano.

**Definição 6.4** (*Ponto interior e conjunto aberto*) Um ponto  $(x_0, y_0)$  é chamado de ponto interior de um conjunto  $A \in \mathbb{R}^2$  se existir um disco aberto com centro em  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$

$$D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

que esteja totalmente contido em  $A$

Um conjunto  $A \in \mathbb{R}^2$  é dito aberto se todos os seus pontos forem interiores.

**Definição 6.5** (*Fronteira e conjunto Fechado*) Um ponto  $(x_0, y_0)$  está na **fronteira** de um conjunto  $F \in \mathbb{R}^2$  se qualquer disco aberto com centro em  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$

$$D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

contém pontos de  $F$  e do complementar de  $F$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus F$ .

Um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^2$  é chamado **fechado** se ele contém todos os pontos de sua fronteira. Isto é equivalente a dizer que um conjunto  $F$  é fechado se o seu complementar  $\mathbb{R}^2 \setminus F$  for aberto.

**Definição 6.6** (*Conjunto Limitado*) Um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^2$  é dito ser **limitado** se existir um disco aberto  $D_r(0, 0)$ , tal que,  $M \subset D_r(0, 0)$ .

**Teorema 6.4** (*Teorema dos valores extremos*) Toda função contínua  $z = f(x, y)$  definida num conjunto fechado e limitado  $D \subset \mathbb{R}^2$  tem máximo e mínimo absoluto em  $D$ .

Como no caso de função de uma variável o teorema dos valores extremos garante a existência de pontos de máximo e mínimo absoluto mas não fornece um critério de localização. Porém, como estamos procurando pontos de máximo ou mínimo em um conjunto  $D$ , fechado e limitado, estes pontos estarão no interior do conjunto  $D$  ou na sua fronteira. Logo, estamos procurando dentre os pontos críticos do interior de  $D$  e os pontos de máximo e mínimo da fronteira de  $D$ . Aí é só comparar os valores da função nestes pontos e verificar dentre eles quais os que dão o valor mínimo e quais os que dão o valor máximo da função. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 6.13** A temperatura em uma placa de metal  $D$  é dada por

$$T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3$$

Determine os pontos de maior e menor temperatura na placa  $D$  se:

(a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 3\}$ .

(b)  $D$  é a região fechada limitada pela elipse  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0\}$ .

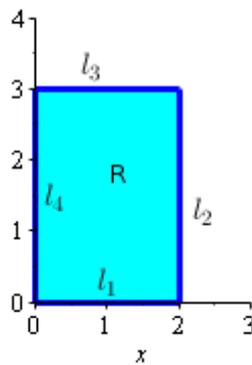


Figura 6.26

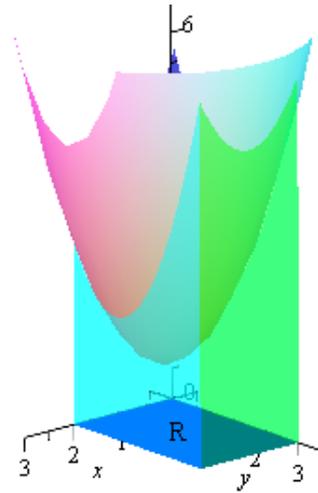


Figura 6.27

*Solução:* (a) Trata-se neste caso de procurar os pontos de máximo e mínimo do parabolóide  $z = T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1$  sobre o retângulo  $R$  (figuras 6.26 e 6.27).

Primeiro determinamos os pontos críticos de  $T$  no interior de  $R$  resolvendo o sistema:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 2y - 2 = 0$$

e obtendo a solução  $x = 1$  e  $y = 1$ . Verificamos que o ponto crítico  $P_1 = (1, 1)$  pertence ao interior do retângulo  $R$ . Aplicando o teste da derivada segunda verifica-se facilmente que ele é um ponto de mínimo local, o que pode ser visto na figura 6.27.

Agora, determinamos os pontos de máximo e mínimo de  $T$  sobre os lados  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  e  $l_4$  do retângulo  $R$ . Sobre estes lados, a função  $T$  passa a ser função de uma variável restrita a intervalos fechados. Logo seus pontos de máximo e mínimo se encontram no interior ou nas extremidades de cada lado.

Observando a figura 6.27, vemos que a função  $T$  restrita aos lados de  $R$  são parábolas voltadas para cima, portanto, seus pontos críticos são pontos de mínimo.

Sobre o lado  $l_1$

$$z = T(x, y) = T(x, 0) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Sobre o lado  $l_2$

$$z = T(2, y) = y^2 - 2y + 3 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

Sobre o lado  $l_3$

$$z = T(x, 3) = x^2 - 2x + 6 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Sobre o lado  $l_4$

$$z = T(0, y) = y^2 - 2y + 3 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

Assim obtemos os pontos

$$P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (2, 1), \quad P_4 = (1, 3) \quad \text{e} \quad P_5 = (0, 1)$$

Comparando os valores de  $T$  nos pontos encontrados e nos pontos dos vértices de  $R$

$$P_6 = (0, 0), \quad P_7 = (2, 0), \quad P_8 = (2, 3) \quad \text{e} \quad P_9 = (0, 3)$$

temos

$$T(P_1) = 1, \quad T(P_2) = 2, \quad T(P_3) = 2, \quad T(P_4) = 5, \quad T(P_5) = 2, \quad T(P_6) = T(P_7) = 3 \quad \text{e}$$

$$T(P_8) = T(P_9) = 6$$

Portanto, o ponto de mínimo absoluto é o ponto  $P_1$  e os pontos  $P_8$  e  $P_9$  são pontos de máximo absoluto, como pode ser observado na figura 6.27.

(b) Para determinar os pontos de máximo e mínimo da função  $T$  sobre a região  $E$  limitada pela elipse  $4x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ , primeiro, verificamos que os pontos críticos de  $T$  encontrados no item (a) que é o ponto  $P_1 = (1, 1)$  pertence ao interior da elipse. Para verificar isto basta completar os quadrados na equação da elipse e encontrar sua equação reduzida

$$(x - 1)^2 + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

e vemos que o ponto  $P_1$  é o centro da elipse (figura 6.28). Portanto, nos resta determinar os pontos extremos de  $T$  sobre a elipse  $4(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$  (figura 6.29). Para isto aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2 = \lambda(8x - 8) \\ 2y - 2 = \lambda(2y - 2) \\ 4x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 = 4\lambda(x - 1) \\ y - 1 = \lambda(y - 1) \\ 4x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Se  $x - 1 \neq 0$ , da primeira equação tem-se  $\lambda = \frac{1}{4}$ . Substituindo na segunda equação encontra-se  $y = 1$  e substituindo este valor na terceira equação, obtém-se  $x = 0$  ou  $x = 2$ . Assim, obtemos os pontos

$$P_2 = (0, 1) \quad \text{e} \quad P_3 = (2, 1)$$

Agora, se  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ . Substituindo este valor na terceira equação obtém-se  $y = 3$  e  $y = -1$ . Assim, obtemos os pontos

$$P_4 = (1, 3) \quad \text{e} \quad P_5 = (1, -1)$$

Calculando os valores de  $T$  nos pontos encontrados, tem-se:

$$T(P_1) = 1 \quad T(P_2) = T(P_3) = 2 \quad T(P_4) = T(P_5) = 5$$

Logo, sobre a região  $E$  o ponto  $P_1$  é de mínimo absoluto e os pontos  $P_4$  e  $P_5$  são de máximo.

## 6.4 Exercícios

1. Determine e classifique os pontos críticos da função

(a)  $z = x^5 + y^4 - 5x - 32y - 3$

(b)  $z = 3x - x^3 - 3xy^2$

(c)  $z = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + y^2 - 2xy + x^2$

(d)  $z = x^4 - y^4 - 2x^2 + 2y^2$

(e)  $z = 2y^3 - 3x^4 - 6x^2y + \frac{1}{16}$

(Respostas)

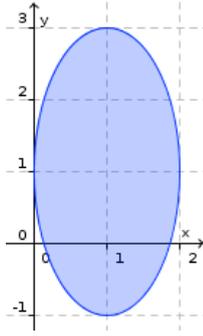


Figura 6.28:  $4(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

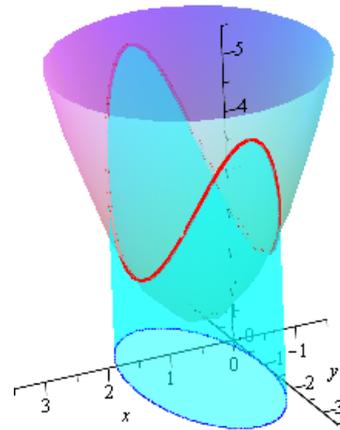


Figura 6.29

2. Uma caixa retangular é colocada no primeiro octante, com um de seus vértices na origem e três de suas faces coincidindo com os três planos coordenados. O vértice oposto à origem está no plano de equação  $x + 2y + 3z = 6$ . Qual é o volume máximo possível de tal caixa? Quais suas dimensões? (Resposta)
3. Deve-se construir uma caixa retangular sem tampa de  $24 \text{ cm}^3$  de volume. O custo do material a ser utilizado é de R\$8,00 por  $\text{cm}^2$  para o fundo, R\$3,00 por  $\text{cm}^2$  para um par de lados opostos e R\$2,00 para o outro par de lados opostos. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo. (Resposta)
4. Determine o retângulo de área máxima inscrito em uma circunferência de raio  $R$  dado. (Resposta)
5. Ache o volume do maior paralelepípedo que pode ser inscrito no elipsóide

$$4x^2 + 36y^2 + 9z^2 = 36$$

cujas arestas sejam paralelos ao eixos coordenados. (Resposta)

6. Determine os pontos do plano  $3x + 2y + z - 14 = 0$  que estão mais próximos da origem. (Resposta)
7. A temperatura em cada ponto do espaço é dada por  $T(x, y, z) = xy + z^2$ . Uma pulga amestrada anda sobre a curva de interseção do plano  $y - x = 0$  com a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Quais são as temperaturas máximas e mínimas encontradas pela pulga? (Resposta)
8. Uma região  $D$  é limitada pelas retas  $x - y = -2, x - y = 2, x + y = -2$  e  $x + y = 2$ . Se  $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$  é a temperatura em qualquer ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Ache o ponto mais quente e mais frio da região. (Resposta)
9. Considere a função  $f(x, y) = -\frac{1}{12}x^3 + x - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$ 
  - (a) Determine e classifique os pontos críticos de  $f$  ;
  - (b) Determine os pontos de máximo e mínimo de  $f$  sobre o círculo  $(x + 2)^2 + y^2 = 4$  ;
  - (c) Determine os valores máximo e mínimo de  $f$  no disco  $D = \{(x, y); (x + 2)^2 + y^2 \leq 4\}$  e os pontos onde estes valores ocorrem. (Resposta)

10. Considere a função  $f(x, y) = 2y^2 - 8y + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + 8$ .

- (a) Determine e classifique os pontos críticos de  $f$  ;
- (b) Determine os pontos de máximo e mínimo de  $f$  sobre a elipse  $(x + 2)^2 + y^2 = 4$  ;
- (c) Determine os valores máximo e mínimo de  $f$  sobre a região  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9\}$  e os pontos onde estes valores ocorrem.

(Respostas)

11. Determine o volume máximo de uma caixa retangular, de faces paralelas aos planos coordenados, que pode ser inscrita no elipsóide  $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$ . (Resposta)

12. Em relação ao sistema de coordenadas cartesianas, uma pessoa está na origem, no interior de uma praça, cujo contorno é uma curva de equação  $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$ . A que ponto do contorno a pessoa deve se dirigir ao sair da praça, para caminhar o menos possível? (Resposta)

13. Considere o plano  $ax + by + cz = 1$ , onde  $a$ ,  $b$ , e  $c$  são positivos. Determine  $a$ ,  $b$ , e  $c$  de modo que o plano contenha o ponto  $(1, 2, 3)$  e tal que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tenha volume máximo. (Volume do tetraedro = área da base x altura x 1/3)

(Resposta)

14. Ar quente circula por um secador de grãos de formato cilíndrico com raio de 1 metro. A temperatura do ar na saída do secador em um ponto  $(x, y)$  da seção transversal da tubulação de descarga do secador, com origem no centro da tubulação, é dada pela função

$$T(x, y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5)$$

Encontre a maior e a menor temperatura na seção de saída do secador.

(Resposta)

15. Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x, y) = 4y^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

na região retangular de vértices  $P_1 = (-2, 2)$ ,  $P_2 = (2, 2)$ ,  $P_3 = (2, -2)$  e  $P_4 = (-2, -2)$ .

(Resposta)

# Apêndice A

## Cônicas em Cálculo

---

Circunferências, elipses, hipérbolas e parábolas são chamadas de **seções cônicas** ou simplesmente de **cônicas**, porque podem ser obtidas como interseções de um cone de folha dupla com um plano como mostram as figuras A.1, A.2, A.3 e A.4, respectivamente. Se o plano passa através do vértice do cone de folha dupla, então, a interseção é um ponto, um par de retas ou uma reta, como mostram figuras A.5, A.6 e A.7, respectivamente. Estas, são chamadas de **cônicas degeneradas**. As demonstrações destes fatos podem ser vistas, por exemplo, na página do Prof. Ricardo Kubrusly (<http://www.dm.im.ufrj.br/~risk/diversos/conicas.html>) e se baseiam nas definições geométricas destas curvas. ⓘ

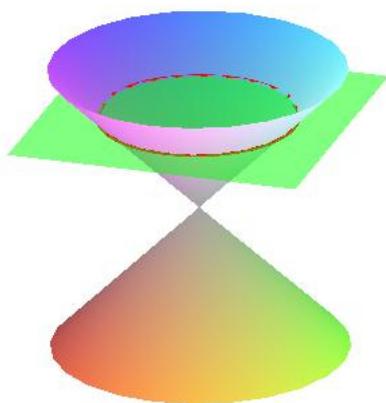


Figura A.1: Circunferência

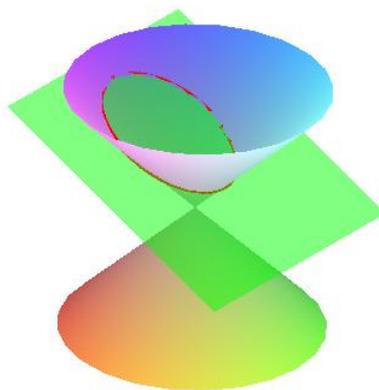


Figura A.2: Elipse

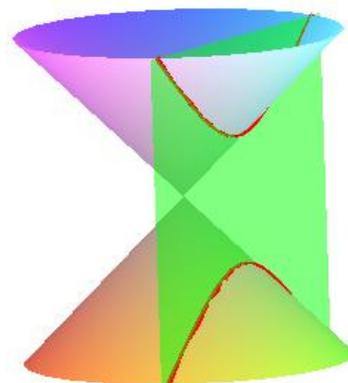


Figura A.3: Hipérbole

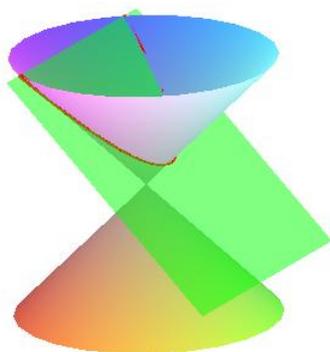


Figura A.4: Parábola

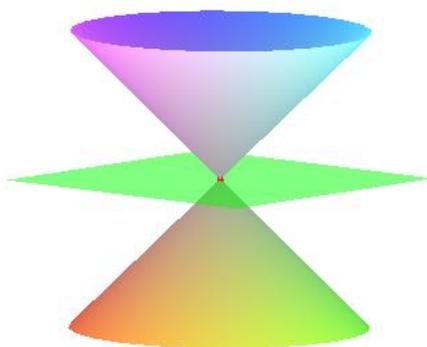


Figura A.5: Um ponto

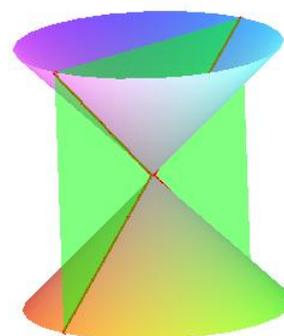


Figura A.6: Um par de retas

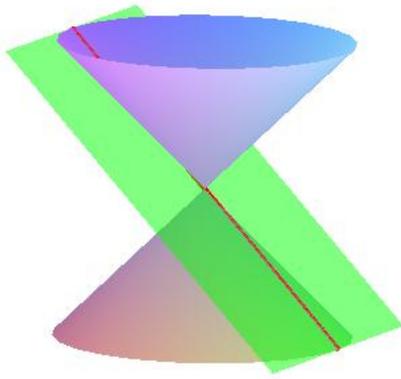


Figura A.7: Uma reta

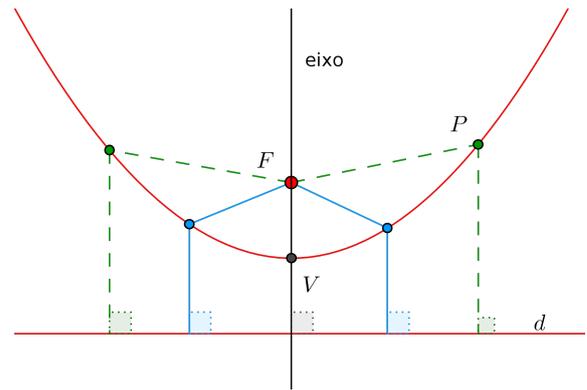


Figura A.8

## A.1 Parábola

Uma **parábola** é o lugar geométrico dos pontos em um plano cuja distância a um ponto fixo  $F$ , chamado **foco**, e a uma reta fixa  $d$ , chamada **diretriz**, são iguais, isto é, se  $P$  é um ponto do plano, então,  $P$  pertence à parábola se

$$\text{distância}(P, F) = \text{distância}(P, d)$$

Veja a figura . Observe que o ponto que fica na reta perpendicular à diretriz  $d$  é chamado de vértice da parábola e esta reta de eixo da parábola.

Iremos determinar, inicialmente, a equação de uma parábola cujo foco está no eixo  $y$  e cuja diretriz seja perpendicular ao eixo  $y$  conforme figura A.9. Neste caso, o foco  $F$  tem coordenadas  $(0, p)$ , para algum número real  $p > 0$  e a equação da diretriz é  $y = -p$ . Logo, pela fórmula da distância, um ponto  $P(x, y)$  pertence à parábola se e somente se

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados e simplificando:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ x^2 &= 4py \end{aligned}$$

ou

$$y = \frac{1}{4p}x^2 = ax^2 \tag{A.1}$$

onde  $a = \frac{1}{4p} > 0$ . Esta é a chamada equação reduzida da parábola com vértice na origem.

Se  $p < 0$ , a equação não se altera, porém a parábola tem a concavidade voltada para baixo (figura A.10).

Permutando  $x$  com  $y$ , obtemos a equação

$$y^2 = 4px$$

que é uma parábola com foco  $(p, 0)$  e diretriz  $x = -p$ . Se  $p > 0$  temos a parábola da figura A.11 e se  $p < 0$  temos a parábola da figura A.12.

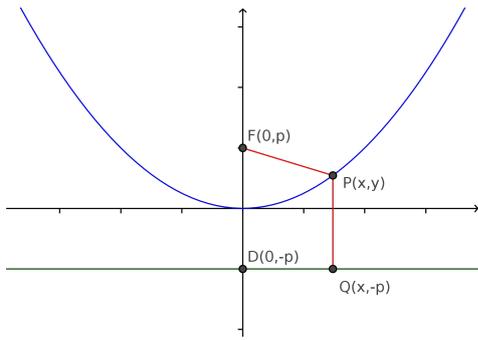


Figura A.9:  $y = ax^2$

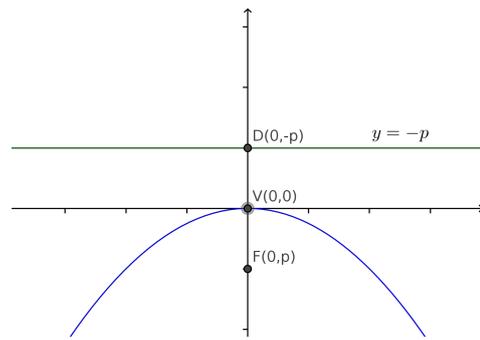


Figura A.10:  $y = -ax^2$

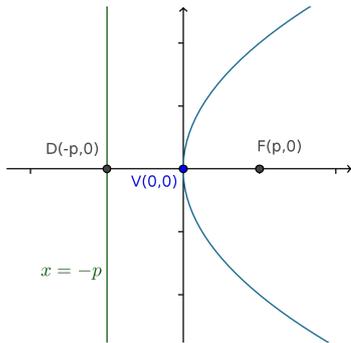


Figura A.11:  $x = ay^2$

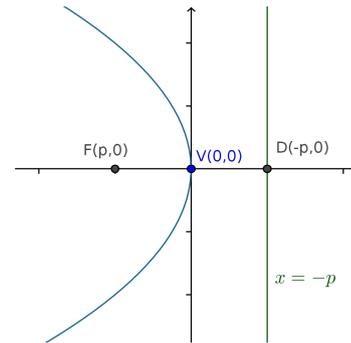


Figura A.12:  $x = -ay^2$

## A.2 Elipse

Uma **Elipse** é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$ , chamados focos (figura A.13), é uma constante dada, isto é, se  $P$  é um ponto do plano, então,  $P$  pertence à elipse se, dado  $a > 0$ , tem-se ⓘ

$$\text{distância}(P, F_1) + \text{distância}(P, F_2) = 2a$$

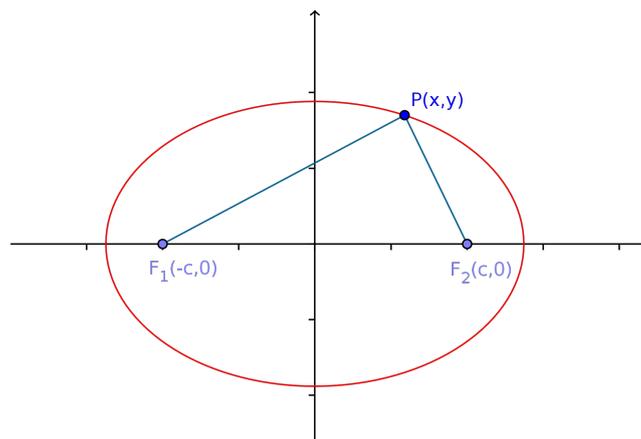


Figura A.13

Para deduzir a equação da elipse da forma mais simples, colocamos os focos no eixo  $x$ , como na figura A.13. Assim, pela definição de elipse, um ponto  $P(x, y)$  pertence à elipse se, e somente se,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados, temos

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

que simplificando tem-se

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando ao quadrado novamente e simplificando

$$\begin{aligned} a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

como  $c < a$ , então,  $a^2 - c^2 > 0$ . Logo, chamando este número positivo de  $b^2$ , isto é,  $a^2 - c^2 = b^2$ , tem-se

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo-se ambos os lados por  $a^2b^2$ , obtém-se a, assim chamada, equação reduzida da elipse com centro na origem:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (\text{A.2})$$

Observe que, como  $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ , tem-se  $b < a$ . As interseções da elipse com os eixos são chamados de vértices. Fazendo  $y = 0$ , obtém-se os vértices  $(a, 0)$  e  $(-a, 0)$  e fazendo  $x = 0$ , obtém-se os vértices  $(0, b)$  e  $(0, -b)$  como mostra a figura A.14. O segmento de reta que une os vértices  $(a, 0)$  e  $(-a, 0)$  é chamado de eixo maior e o segmento de reta que une os vértices  $(0, b)$  e  $(0, -b)$  é chamado de eixo menor.

Se os focos de uma elipse estiverem sobre o eixo  $y$ , isto é, se forem os pontos  $F_1(0, -c)$  e  $F_2(0, c)$  sua equação é determinada trocando-se  $x$  por  $y$  em A.2 (figura A.15).

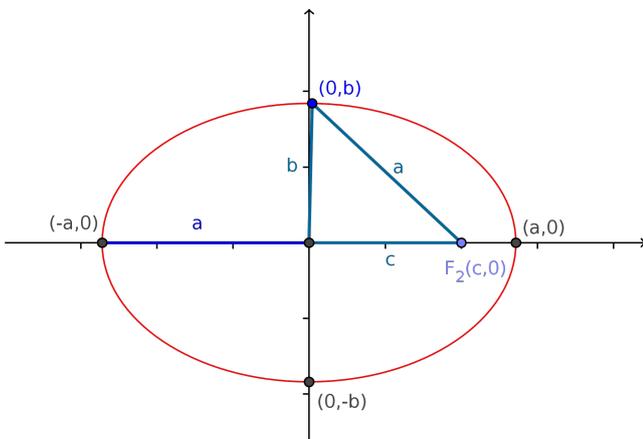


Figura A.14:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

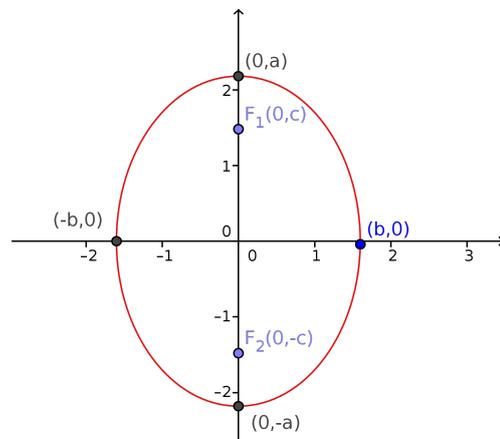


Figura A.15:  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

### A.3 Hipérbole

Uma **Hipérbole** é o conjunto de pontos do plano cuja diferença entre as distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (focos) é uma constante dada (figura , isto é, se  $P$  é um ponto do plano, então,  $P$  pertence à hipérbole se, dado  $a > 0$ , tem-se )

$$|\text{distância}(P, F_1) - \text{distância}(P, F_2)| = 2a$$

Deduz-se a equação da hipérbole de modo similar à dedução da equação da elipse feita anteriormente.

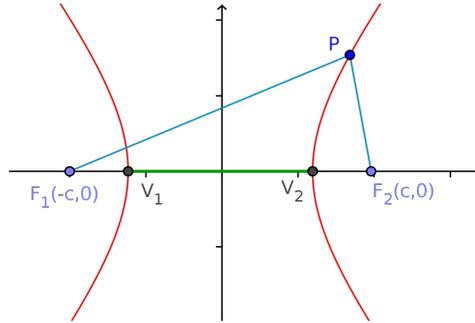


Figura A.16: Hipérbole

No caso em que os focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  estão sobre o eixo  $x$ , a equação reduzida da hipérbole com centro na origem é

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{A.3}$$

onde  $c^2 = a^2 + b^2$  e as interseções com o eixo  $x$  são os pontos  $V_1 = (-a, 0)$  e  $V_2 = (a, 0)$ , chamados vértices da hipérbole. Observe que não há interseção com o eixo  $y$ , pois quando fazemos  $x = 0$  tem-se  $y^2 = -b^2$ , o que é impossível. Observe ainda, que,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \implies x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow |x| \geq a$$

Portanto, tem-se  $x \geq a$  ou  $x \leq -a$ . Assim, a hipérbole é formada por dois ramos voltados para o eixo  $x$ .

Agora, veja que a equação da hipérbole pode ser rescrita como

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \implies y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Observe que quando fazemos  $x \rightarrow +\infty$ , a diferença

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow 0$$

Assim, as retas  $y = \pm \frac{b}{a}x$  são chamadas de assíntotas da hipérbole. Observe na figura A.17 que os lados do triângulo  $OAV_2$  vem da relação  $c^2 = a^2 + b^2$ .

No caso em que os focos estão sobre o eixo  $y$ ,  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$  (veja figura , basta trocar  $x$  por  $y$  na equação A.3 e tem-se a equação reduzida da hipérbole

$$\boxed{-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \tag{A.4}$$

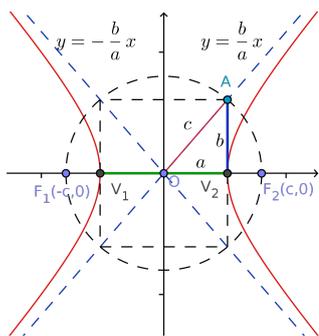


Figura A.17:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

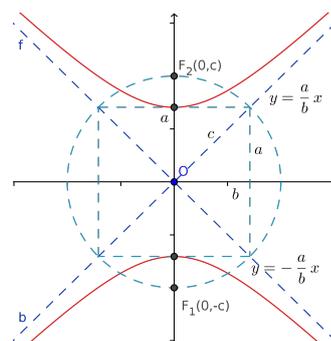


Figura A.18:  $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

## A.4 Translação das Cônicas

-Translações no plano:

Quando transladamos uma figura no plano, por exemplo, uma circunferência com centro na origem de equação:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

e a transladamos para uma circunferência com centro no ponto  $C = (m, n)$ , queremos saber qual a sua nova equação. Neste caso, bem simples, basta calcular a distância de um ponto qualquer  $P = (x, y)$  da nova circunferência até seu centro  $C$  e teremos a nova equação da circunferência transladada: ⓘ

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \tag{A.5}$$

Isto é o que acontece também com as cônicas, como veremos a seguir. Observe a figura A.19. Veja que, se ponto  $P$  é um ponto qualquer sobre a circunferência, no sistema  $x'y'$  suas coordenadas são  $(x', y')$ . Logo, a equação da circunferência no sistema  $x'y'$  é

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

Agora, se chamarmos de  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $P$  no sistema  $xy$ , vemos facilmente na figura

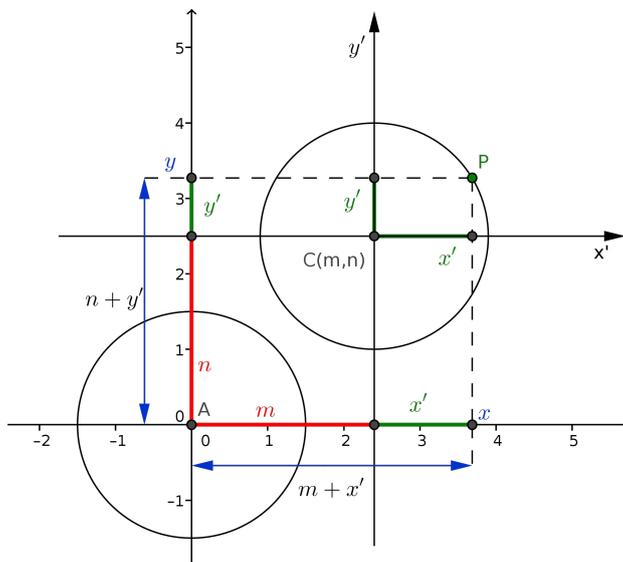


Figura A.19: Translação no plano

A.19, que

$$\begin{cases} x = m + x' \\ y = n + y' \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

que são as fórmulas de translação de um sistema para o outro. Logo, no caso da circunferência, esta fórmula de translação nos leva à equação A.5.

Para o caso da elipse e hipérbole, o procedimento é o mesmo da circunferência. Translada-se o centro da origem para o ponto  $(m, n)$  e no caso da parábola, translada-se seu vértice da origem para o ponto  $(m, n)$ . Assim, temos as equações:

- Parábolas com vértice  $(m, n)$  e eixo paralelo ao eixo  $x$  

$$\begin{aligned} (y - n)^2 &= 4p(x - m) && \text{(abertura à direita)} \\ (y - n)^2 &= -4p(x - m) && \text{(abertura à esquerda)} \end{aligned}$$

- Parábolas com vértice  $(m, n)$  e eixo paralelo ao eixo  $y$  

$$\begin{aligned} (x - m)^2 &= 4p(y - n) && \text{(abertura para cima)} \\ (x - m)^2 &= -4p(y - n) && \text{(abertura para baixo)} \end{aligned}$$

-Elipse com centro  $(m, n)$  

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

-Hipérbole com centro  $(m, n)$  

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

### -Equação geral das cônicas

Pelo que vimos nas seções anteriores, uma cônica com eixos paralelos aos eixos  $x$  ou  $y$  pode ser representada por uma equação da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (\text{A.7})$$

Pode ser visto em livros de Álgebra Linear que quando se dá uma rotação na cônica, isto é, cônicas com eixos inclinados em relação ao eixo  $x$ , sua equação contém um termo retangular  $xy$ :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

**Exemplo A.1** *Identifique e desenhe as cônicas*

(a)  $4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0$

(b)  $2x^2 + 12x - y + 17 = 0$

(c)  $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$

Solução: - (a) Para identificar esta cônica, temos que completar os quadrados em  $x$  e  $y$  para colocá-la em uma das forma reduzidas que vimos na seção anterior. Assim,

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 &= 4(x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) - 64 - 81 + 109 \\ &= 4(x - 4)^2 + 9(y - 3)^2 - 36 \end{aligned}$$

Logo,

$$4(x - 4)^2 + 9(y - 3)^2 - 36 = 0 \iff \frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1$$

Assim, a cônica é uma elipse com centro no ponto  $(4, 3)$ , cujo desenho é mostrado na figura A.20.

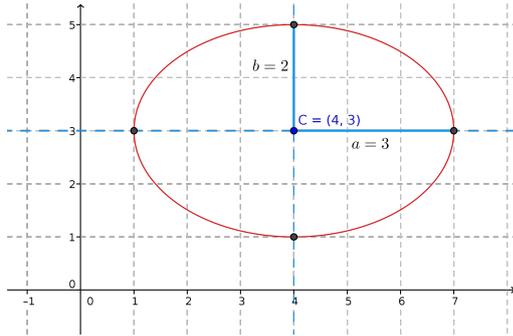


Figura A.20: Elipse:  $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

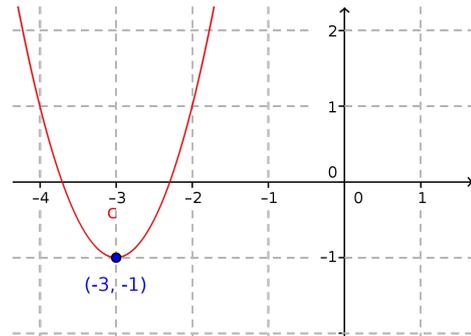


Figura A.21: Parábola:  $y + 1 = 2(x + 3)^2$

- (b) Como no item anterior, completando os quadrados em  $x$  e  $y$ , tem-se,

$$2x^2 + 12x - y + 17 = 2(x^2 + 6x + 9) - y - 18 + 17 = 2(x + 3)^2 - y - 1$$

Logo,

$$2x^2 + 12x - y + 17 = 0 \iff y + 1 = 2(x + 3)^2$$

Assim, a cônica é uma parábola com vértice no ponto  $(-3, -1)$  com concavidade para cima. Veja a figura A.21.

- (c) Como nos itens anteriores, completando os quadrados em  $x$  e  $y$ , tem-se,

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 &= 4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 2y + 1) - 16 + 9 - 29 \\ &= 4(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 - 36 \end{aligned}$$

Logo,

$$4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0 \iff \frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$$

Assim, a cônica é uma hipérbole com centro no ponto  $(2, -1)$  com os ramos voltados para o eixo  $x$  com assíntotas  $y = -1 \pm \frac{2}{3}(x - 2)$ . Veja a figura A.22.

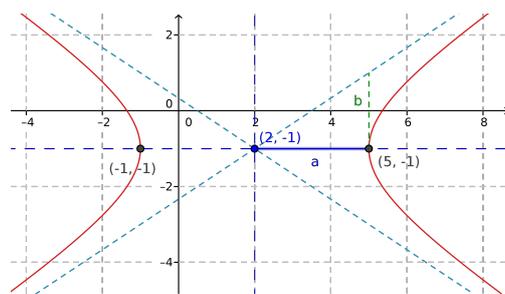


Figura A.22: Hipérbole:  $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$



# Respostas

---

## Seção 1.6

- (a)  $y = \ln\left(\frac{-1}{c+e^x}\right)$ . (b)  $y = ce^{x^2}$ . (c)  $\frac{t+x}{tx} + \ln\left|\frac{x}{t}\right| = c$  e  $x = 0$ . (d)  $y = (\ln|x| + c)^2 + 1$  e  $y = 1$ . (e)  $(\ln y)^2 = \ln x^2 + c$ . (f)  $y = \frac{1-x}{1+x}$ . (g)  $y = \sqrt{2e^x - 1}$ . (h)  $y = cx + x \ln|x|$ . (i)  $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x} + ce^{-3x}$ . (j)  $y = ce^{-\frac{x}{3}} + 1$ . (k)  $y = ce^{3x} - \frac{3}{13}\sin 2x - \frac{2}{13}\cos 2x$ . (l)  $y = \frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$ . (m)  $y = x^2 + x^{-2}$ . (n)  $y = \frac{e^{-3}\cos x + \cos^3 x}{3\sin^2 x}$ . (o) (Equação de Bernoulli:  $y' + p(x)y = q(x)y^n$ . Solução: multiplique a equação por  $y^{-n}$  e faça a substituição  $u = y^{1-n} \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{u'}{1-n}$ ).
- (a)  $k = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{103}{100}\right)$  (b)  $t = \frac{\ln 2}{k}$
- $\frac{-\ln 2}{\ln 0,9} = 6,6$  horas.
- 40 meses.
- (a) 20 minutos. (b) 48 kg.
- 35555,55 gramas.
- tempo maior que 77,54 dias.
- $F = 30$ ,  $t = \ln 2^{1/3}$ .
- $F = kv_1$   $t = \frac{m}{k} \ln 2$ .
- $k = \frac{\ln(5/2)}{10}$ ,  $t = \frac{3}{4 \cdot 10^4 k}$ .
- (a)  $v(1) = 12e^{-6}$  (b) Não, pois a distância percorrida é  $x(t) = 2(1 - e^{-6t})$  e, portanto, a distância limite é de 2 km.
- $v(t) = \frac{2}{3}V(1 - e^{-t})$ .  $vel_{limit} = 75 \text{ km/h}$ .
- (a) Aproximadamente 92 pessoas. (b) 100.

## Seção 2.5

- (a)  $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ . (b)  $y = c_1e^{\sqrt{7}x} + c_2e^{-\sqrt{7}x}$ . (c)  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ . (d)  $y = c_1e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + c_2e^{-x} \sin(\sqrt{2}x)$
- (a)  $x' + 2x = 0$ . (b)  $x'' - x' - 2x = 0$ . (c)  $x'' - 4x' + 4x = 0$ .
- (a)  $y = c_1e^{7x} + c_2e^x + 2$ . (b)  $y = e^t - te^t$ . (c)  $y = \left(-\frac{4}{27} - \frac{5}{9}t\right)e^{-3t} + \frac{t}{9} + \frac{4}{27}$ . (d)  $y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x} - xe^{4x}$ . (e)  $y = (1-x)e^{2x} + x^2e^{2x}$ . (f)  $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} + xe^{2x}\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25}\right)$ . (g)  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x$ . (h)  $y = e^x - x \sin x - \cos x$ . (i)  $y = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{1}{9}e^x + \frac{1}{37}(\sin 3x + 6 \cos 3x)$ . (j)  $y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x$ .
- $x(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{-7t}$ , considere  $g = 9, 8$ .
- $x(t) = \frac{1}{50}(-11e^{-7t} + 20e^{-2t} - 9 \cos t + 13 \sin t)$ .
- $x(t) = \left(\frac{18}{7} + 2t\right) \sin 7t - 4t \cos 7t$ .
- (a)  $x(t) = e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t) + \sin 2t$ . (b) zero.
- (b)  $x(t) = \frac{2}{5} \sin 5t + (1 - 2t) \cos 5t$ .
- (a)  $x(t) = e^{-3t}(t^3 - 2t^2 + t)$ . (b) zero.
- $v(t) = 10 + e^{-t} + e^t$ .

## Seção 3.5

- (a)  $x = 4 + 4t$ ,  $y = 1 - t$  (figura A.23). (b)  $x = 2 + 4t$ ,  $y = 19 + 16t$  (figura A.24). (c)  $x = 2\sqrt{3} + 2t$ ,

$y = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}t$  (figura A.25). (d)  $x = 3 + 3t$ ,  $y = 4 + 8t$  (figura A.26) . (e)  $x = \pi^2 + 2\pi t$ ,  $y = -2t$  (figura A.27). (f)  $x = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t$ ,  $y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t$  (figura A.28).

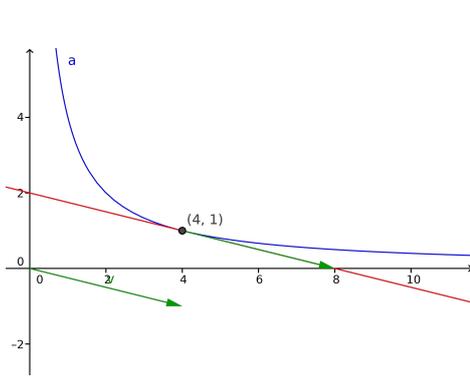


Figura A.23: 3.5.1.a

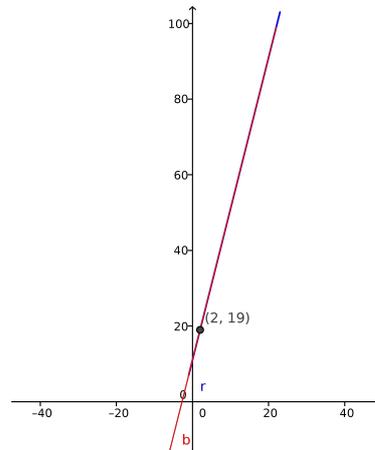


Figura A.24: 3.5.1.b

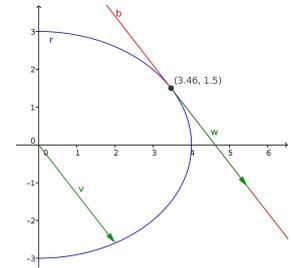


Figura A.25: 3.5.1.c

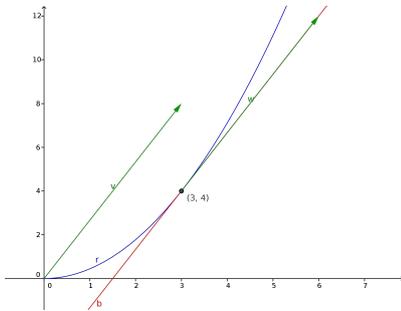


Figura A.26: 3.5.1.d

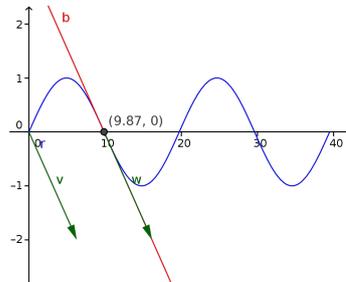


Figura A.27: 3.5.1.e

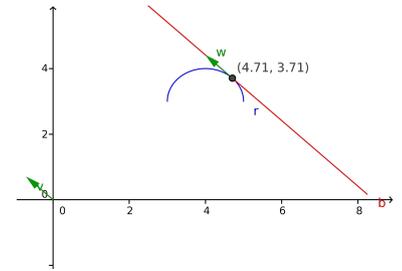


Figura A.28: 3.5.1.f

2. (a)  $x = t$ ,  $y = 1 + t$ . (b)  $x = 2t$ ,  $y = 1 + 2t$ . (c) Representam movimentos diferentes. Sim,  $y = 1 + x$ .
3. (a)  $x = 1 + \sqrt{6} \cos t$ ,  $y = 1 + \sqrt{6} \sin t$ . (b)  $x = R \cos wt$ ,  $y = R \sin wt$ .
4. (a)  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ . (b)  $x = 1 + 3 \cos t$ ,  $y = 2 + 2 \sin t$ .
5. (a)  $x = \frac{-3 + \sqrt{9 + 24t^2}}{t^2}$ ,  $y = 6t$ . (c)  $x^2y^2 + 216x - 864 = 0$  (figura A.29).
6. (a)  $x = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$ ,  $y = 8t$ . (c)  $64x^2 + x^2y^2 = 256$ ,  $x > 0$  (figura A.30).
7. (a) Não se chocarão, pois o sistema  $2 + t = -8 + 7t$ ,  $-2 + t^2/2 = -1 + 7/2t$  é inconsistente. (b) figura A.31 (c) As estradas se cruzam no ponto (6, 6). (d)  $\sigma'(2) = (1, 2)$ .
8.  $\sigma(t) = ((\frac{t}{2} + 1)e^t - \frac{t}{2}e^{-t}, \frac{1}{2}(t+1)e^t + \frac{1}{2}(t-1)e^{-t})$
9. (a)  $y = 2 + \ln x$ , (b)  $x(t) = e^{5t}$ ,  $y(t) = 5t + 2$ .
10.  $x(\theta) = r(\cos \theta + \theta \sin \theta)$ ,  $y(\theta) = r(\sin \theta - \theta \cos \theta)$

### Seção 4.7

1.  $x = -5/9 + 10t$ ,  $y = -8/9 + 7t$ ,  $z = 1 - 9t$ .
2. (a)  $-5(x+1) + 11y - 4(z-2) = 0$ . (b)  $x = 1 - 5t$ ,  $y = 2 + 4t$ ,  $z = -1 - 4t$ .
3. (a)  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = 4$ . (b)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}t$ ,  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}t$ ,  $z = 4$ .
4. (a)  $x = \frac{1}{2} \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 16 - 2 \cos t - 4 \sin t$ . (b)  $x = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}t$ ,
5. (a)  $x = \cos t$ ,  $y = 1 + \sin t$ ,  $z = \sqrt{2 - 2 \sin t}$ . (b)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t$ ,  $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t$ ,  $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}t$ .
6. (a)  $v(\frac{\pi}{6}) = (\frac{3}{2} - \frac{\pi}{12}, \frac{1}{2} + \frac{\pi}{12}, 1)$ . (b) figura A.32

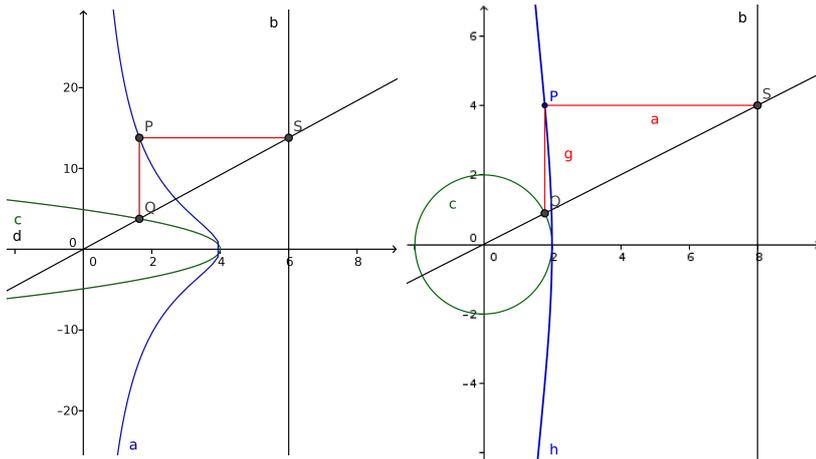


Figura A.29: 3.5.5

Figura A.30: 3.5.6

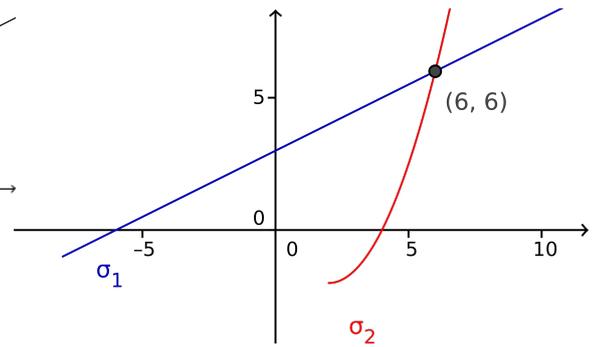


Figura A.31: 3.5.7

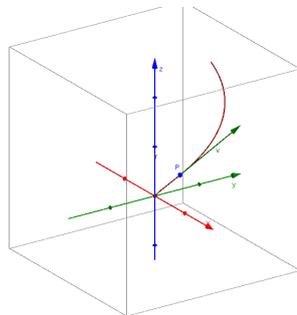


Figura A.32: 4.7.6

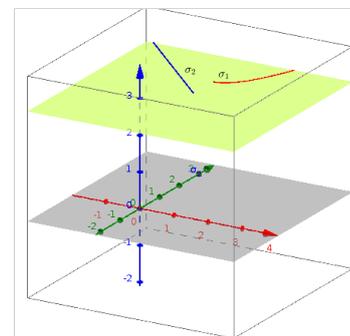


Figura A.33: 4.7.8

7.  $x = x_0 + kat, y = y_0 + kbt, z = z_0 + kct, k \in \mathbb{R}$ .

8. (a) A segunda coordenada é inconsistente para um mesmo valor de  $t$ . (b) Os caminhos não se cruzam (figura A.33). (d)  $\sigma'(2) = (1, 4, 0), \sigma'(2) = (-4, 4, 0)$ . (d)  $\sqrt{17} - \frac{1}{4} \ln(-4 + \sqrt{17})$ .

9.  $x(t) = \frac{1}{40}(3e^{-3t} + 5e^t + 4 \text{sen } t - 8 \text{cos } t), y(t) = -\frac{2}{3}e^{-3t} + 3e^t - \frac{4}{3}, z(t) = \frac{1}{12}(e^{-3t} + 51e^t - 16)$ .

10. (a) Não, observe que para um mesmo valor de  $t$ , a primeira e terceira coordenadas são inconsistentes. (b)  $(300, 1680, 560)$ , (c) Semi-reta. (d)  $\sigma'(0) = (300, 1670, 60)$ .

11 (a)  $x = t - \text{sen } t, y = 1 - \text{cos } t, z = 1$ , (b)  $t_1 = \frac{\pi}{3}, t_2 = \frac{5\pi}{3}$ . (c)  $4\sqrt{3}$ .

12 (a)  $x = (1 + t)e^t, y = te^t, z = (1 + t)e^t$ . (b) Não existe.

13 (a)  $x + y + 2z = 0$ , (b)  $-2x + z + 3 = 0$ , (c)  $x - 4y - 7z + 5 = 0$ , (d)  $2x + 10y + 7z - 3 = 0$ .

14 (a)  $x = 3 + t$ , (b)  $\frac{1}{17}(17, 15, 10)$ , (c)  $(1, 5, 0)$ .

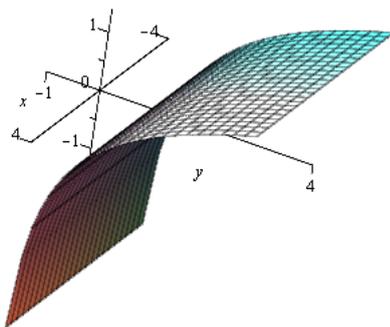


Figura A.34: 4.7.15(a)

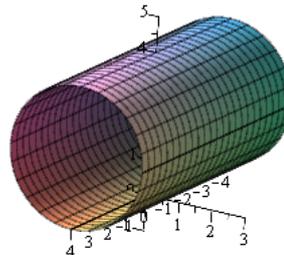


Figura A.35: 4.7.15(b)

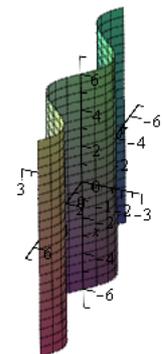


Figura A.36: 4.7.15(c)

## Seção 5.13

1. (a)  $\text{dom}(f) = D_3(0,0) = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 9\}$ ,  $\text{img}(f) = [0,3]$ . (b)  $\text{dom}(f) = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } x \neq y\}$ ,  $\text{img}(f) = [0,3]$ .
2. (a)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{img}(f) = [2.5, \infty)$ . (b) gráfico de  $f \cap \text{plano } x = 0 \Rightarrow z = 2 + |y|$ , gráfico de  $f \cap \text{plano } y = 0 \Rightarrow z = 2 + |x|$ , não existe interseção de  $f$  com o  $\cap \text{plano } z = 0$ , gráfico de  $f \cap \text{plano } z = 3 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4$ . (c) figura A.37. (d)  $x^2 + 4y^2 = 25$ .
3. (a)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{img}(f) = [0,1]$ . (c)  $x^2 + y^2 = 1/2$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ . (d) figura A.38. (e)  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 \setminus S_1(0,0) = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1\}$ .  $f$  é descontínua em  $S_1(0,0)$ . Seja  $(a,b) \in S_1(0,0)$ . Se tomarmos um caminho contido em  $\mathbb{R}^2 \setminus S_1(0,0)$ , o  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} = 0$  e é igual a 1 se tomarmos um caminho contido em  $D_1(0,0)$ .

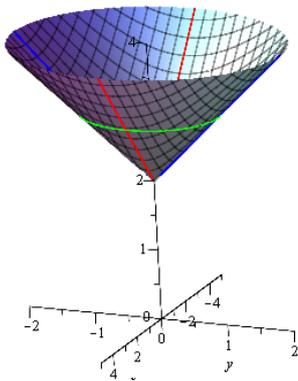


Figura A.37: 5.13.2c - cone

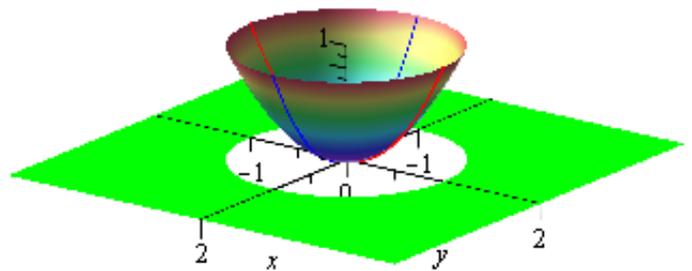
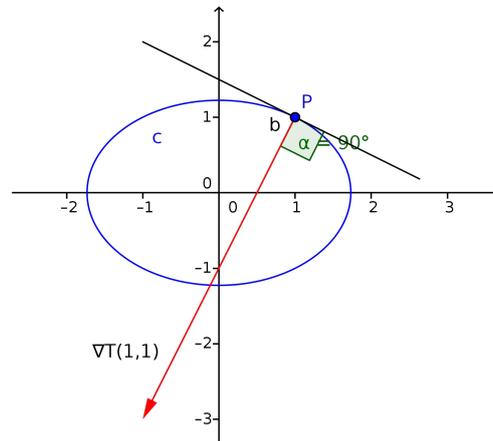


Figura A.38: 5.13.3d

4. (a)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{img}(f) = (-\infty, 4]$ .
5. -  $z = x^2 - y^2 \longleftrightarrow \text{fig. 5.62} \longleftrightarrow \text{fig. 5.63}$   
 -  $z = -x^3 + xy^2 \longleftrightarrow \text{fig. 5.60} \longleftrightarrow \text{fig. 5.64}$   
 -  $z = 2(-x^3y + xy^3) \longleftrightarrow \text{fig. 5.61} \longleftrightarrow \text{fig. 5.65}$
6. (a)  $\longleftrightarrow \text{fig. 5.68} \longleftrightarrow \text{fig. 5.70}$ . (b)  $\longleftrightarrow \text{fig. 5.67} \longleftrightarrow \text{fig. 5.69}$ . (c)  $\longleftrightarrow \text{fig. 5.66} \longleftrightarrow \text{fig. 5.71}$ .
7. (a) 0. (b)  $f$  não é contínua em  $(0,0)$ , pois  $f$  não tem limite em  $(0,0)$  (calcule o limite sobre a parábola  $x = y^2$ ).
8. (c)  $x = \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . (d)  $z = 4x + 2\sqrt{3}y - 3$  (e)  $x = \frac{1}{2} - 4t$ ,  $y = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}t$ ,  $z = 5 + t$
9. (b)  $\nabla f(3,2) = (-24, -20)$ .  $D_{\nabla f}(3,2) = 4\sqrt{61}$ . (c) Desce, taxa =  $-\frac{64}{\sqrt{5}}$ . (d)  $(20, -24)$ . (e)  $5x^2 + y^2 = 56$
10. (b) Direção do  $\nabla f(2,1) = (-8, -8)$ . Taxa de variação de altura igual  $8\sqrt{2}$ . (c) Desce, taxa =  $-8/3$ . (d) Direção do vetor perpendicular ao gradiente,  $(8, -8)$ .
11. (a) Direção e sentido contrário ao gradiente,  $(16, 54)$ . (b)  $-52, 8$ . (c)  $2x^2 + 3y^2 = 275$ .
12. (a)  $y^2 + x = 11$ ,  $y^2 + x = 6$ ,  $y^2 + x = 2$ ,  $y^2 + x = 0$ . (b) Direção e sentido contrário do gradiente,  $\nabla f(0,0) = (-1,0)$ . (c)  $-7/\sqrt{2}$ .
13. (a)  $F(x,y) = y - x^2$ . (b)  $F(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ .
14. (a)  $x^2 + y^2 - z^2 = 6$ . planos:  $(x-1) + 3(y-3) - 2(z-2) = 0$  e  $(x+1) + 3(y+3) - 2(z+2) = 0$ . (b) reta normal:  $x = 3 + 6t$ ,  $y = 1 + 2t$ ,  $z = 2 - 4t$ , ponto de interseção com plano  $y = 0$ :  $(0,0,4)$ .
15. (a)  $6x + 2y - z - 6 = 0$ . (b)  $2\sqrt{41}$ .
16. (a)  $x^2 + 2y^2 = 3$ . (b) Deve andar na direção e sentido de  $-\nabla T(1,1) = (2,4)$ , taxa =  $-||\nabla T(1,1)|| = -2\sqrt{5}$ . (c) Esfriando, taxa =  $-2$ . (d)  $\frac{dT}{dt}(x(3), y(3)) = 0,085$ .



17. Planos:  $(x - \frac{1}{\sqrt{15}}) - 2(y + \frac{1}{\sqrt{15}}) + 6(z - \frac{2}{\sqrt{15}}) = 0$  e  $(x + \frac{1}{\sqrt{15}}) - 2(y - \frac{1}{\sqrt{15}}) + 6(z + \frac{2}{\sqrt{15}}) = 0$

18. 10.1

19. (a)  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$  pois  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ . (b)  $\frac{6}{25}$ .

22.  $E(x(5), y(5)) = 5$ .  $\frac{dE}{dt} = 1$ .

### Seção 6.3

1. (a)  $(1, 2)$ : mínimo local;  $(-1, 2)$ : sela. (b)  $(-1, 0)$ : mínimo local;  $(1, 0)$ : máximo local;  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ : sela. (c)  $(1, 1)$  e  $(0, 0)$ : mín. local;  $(-1, -1)$ : sela. (d)  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ : mín. loc.;  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ : máx. loc.;  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(-1, -1)$ : sela. (e)  $(-1, -1)$  e  $(1, -1)$ : máx. loc.;  $(0, 0)$  sela.

2.  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 2/3$ , volume máx. =  $4/3$ .

3.  $x = 3$ ,  $y = 2$  e  $z = 4$ .

4. Quadrado de lado  $\sqrt{2}R$ .

5. Volume:  $\frac{16}{\sqrt{3}}$ .

6.  $(3, 2, 1)$ .

7. Temperatura máxima: 4; temperatura mínima: 2.

8. Ponto mais quente:  $(2, 0)$ ,  $T(2, 0) = 8$ ; ponto mais frio:  $(0, 0.5)$ ,  $T(0, 0.5) = -0, 25$ .

9. (a)  $P_1 = (2, 0)$ , máximo local;  $P_2 = (-2, 0)$ , sela; (b)  $P_3 = (-4, 0)$ ,  $f(P_3) = \frac{11}{6}$ , máximo abs.;  $P_4 = (-2, 2)$  e  $P_5 = (-2, -2)$ , mínimo abs.,  $f(P_4) = f(P_5) = -\frac{11}{6}$ .

10. (a)  $(1, 2)$ : mín. loc. ;  $(-6, 2)$ : sela. (b)  $(1 + \sqrt{3}, 2)$ : máx. loc.;  $(1, 2 \pm \sqrt{3})$ : mín.loc. (c)  $(1, 2)$ : mín. abs.;  $(1 + \sqrt{3}, 2)$ : máx. abs.

11. Volume máximo:  $64\sqrt{3}$ .

12.  $(2, 4)$ , distância:  $\sqrt{20}$ .

13.  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{1}{6}$  e  $c = \frac{1}{9}$ ;  $V = 27$ .

14.  $T(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}) = 296$ : mínimo;  $T(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 678, 27$ : máximo.

15. Máximo:  $f(0, 1) = f(0, -1) = 4e^{-1}$ ; Mínimo:  $f(x, 0) = 0$ .