ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecatrônica
Sistemas Dinâmicos II para Mecatrônica
Profa. Larissa Driemeier

Lista IV de Exercícios

Teorema da amostragem e aliasing

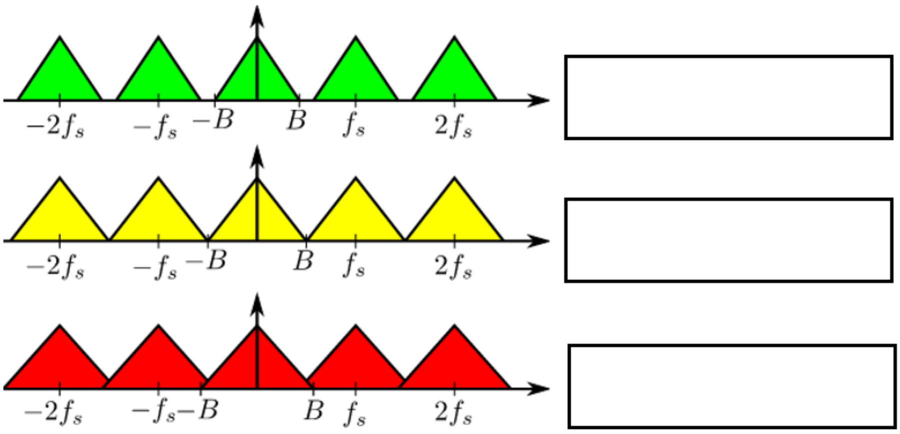
Teoria

1. Qual a diferença entre sinal discreto e sinal digital?

2. Quais as consequências de utilizar um sinal discreto na Transformada de Fourier?

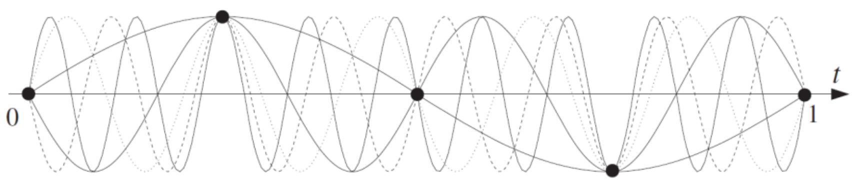
3. Qual a relação entre a frequência fundamental f_0 de um sinal e a frequência de amostragem f_s? Como se define f_s?

4. Qual o teorema da amostragem?
5. Defina, no espaço ao lado dos três gráficos, em qual deles, o espectro é resultado de subamostragem, superamostragem e amostragem à frequência de Nyquist.

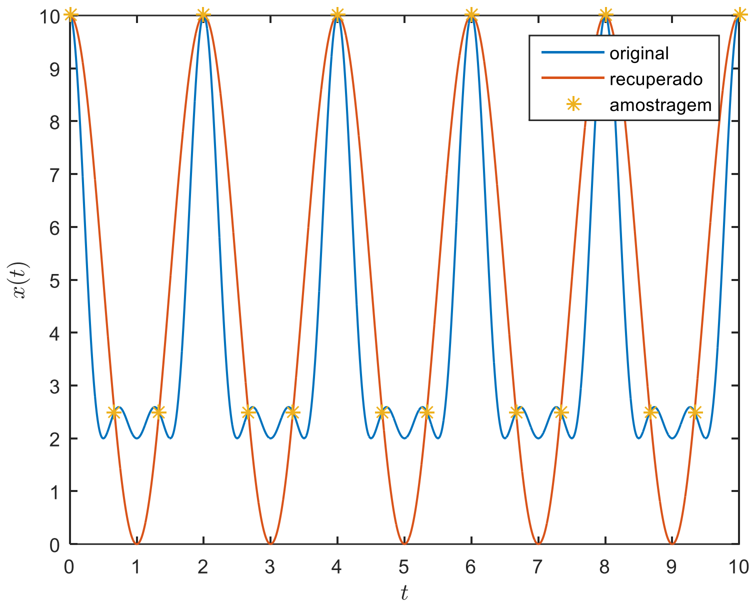


6. O que é aliasing (termo correto em português para aliasing é *freqüências réplicas* ou *disfarce*)? Para que serve o filtro anti-aliasing?
7. Os sinais abaixo são amostrados a uma frequência de 4 Hz. Mostre que eles representam todos o mesmo sinal amostrado, conforme ilustra a figura.

$$-\sin 14\pi t \qquad -\sin 6\pi t \qquad \sin 2\pi t \qquad \sin 10\pi t \qquad \sin 18\pi t$$



8. Considere $x(t)$ como a soma de sinais senoidais,
$$x(t) = 4 + 3\cos \pi t + 2\cos 2\pi t + \cos 3\pi t$$
onde t está em milisegundos. Determine a frequência mínima de amostragem para que não ocorra aliasing, i. é, a frequência de Nyquist (f_N). Para observação dos efeitos do aliasing, suponha que o sinal é amostrado à $f_N/2$. Determine o sinal recuperado $x_a(t)$. Você deverá obter a resposta abaixo (veja que para amostragem a 1,5 kHz não é possível distinguir o sinal original do recuperado).



9. Deduza a formulação da Transformada de Fourier em tempo discreto. As equações são dadas abaixo e foram apresentadas em sala.

$$\bar{x}(t) = x(kT) = x(t)\delta_T(t) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT)}$$

$$\boxed{\bar{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(t)e^{-j\omega t}dt \quad + \quad \Omega = \omega T = \omega\frac{2\pi}{\omega_s}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}} \Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega}$$

10. Um sinal periódico amostrado é sempre um sinal periódico? Use como exemplo os seguintes sinais,
    a. $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)$
    b. $x[n] = \sin\left(\frac{1}{2}n + \pi\right)$

DTFT

11. Considere o sinal analógico

$$x(t) = 3\cos 100\pi t$$

   a. Determine a taxa de amostragem mínima para evitar aliasing.
   b. Suponha que o sinal seja amostrado a uma taxa de $f_s = 200\ Hz$, qual o sinal discreto obtido depois da amostragem?
   c. Suponha que o sinal seja amostrado a uma taxa de $f_s = 75\ Hz$, qual o sinal discreto obtido depois da amostragem?
   d. Qual a frequência da senoide que resulta em uma amostragem idêntica àquela obtida no item anterior.

12. Considere o sinal analógico

$$x(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi$$

   a. Determine a taxa de amostragem mínima para evitar aliasing.
   b. Suponha que o sinal seja amostrado à taxa de Nyquist, o que acontece com o termo $10\sin 300\pi t$?
   c. O que foi percebido no item anterior ocorre para qualquer senoide $A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, amostrada a uma taxa f_0?

13. Determine as taxas de Nyquist para os sinais a seguir

   a. $x(t) = 1 + \cos 2000\pi t + \sin 4000\pi t$
   b. $x(t) = \text{sinc } 50\pi t$
   c. $x(t) = \text{sinc}^2\ 100\pi t$
   d. $x(t) = \text{sinc } 100\pi t + 3\ \text{sinc}^2\ 60\pi t$
   e. $x(t) = \text{sinc } 50\pi t\ \text{sinc } 100\pi t$

14. Considere os sinais

$$x_1(t) = \cos 20\pi t$$

$$x_2(t) = \cos 100\pi t$$

   Ambos os sinais são amostrados a uma frequência $f_s = 40\ Hz$.

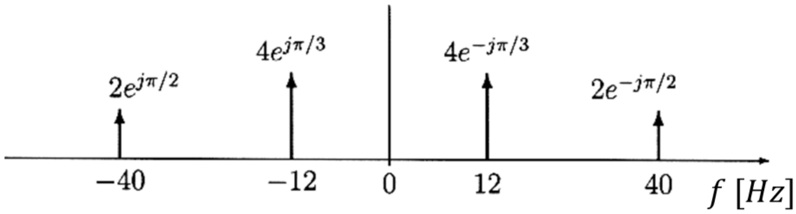
   a. Obtenha o sinal discreto de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e compare-os.
   b. Quais as frequências dos outros sinais que, quando amostrados a $40\ Hz$ se confundirão com o sinal amostrado de $x_1(t)$?

15.

16. Determine a Transformada de Fourier em Tempo Discreto (TFTD) para os sinais a seguir, desenhe o gráfico no domínio do tempo e o gráfico do espectro de frequências.

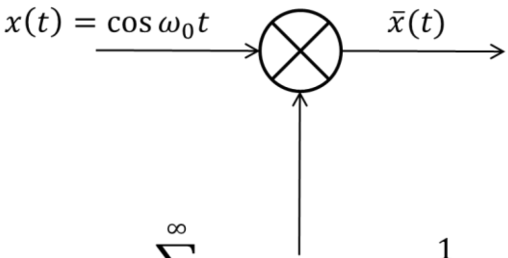
   a. $x[n] = \delta(n - n_0)$
   b. $x[n] = \alpha^n u[n]$ para $|\alpha| < 1$
   c. $x[n] = \text{rect}\ [n/M]$

17. Para o sinal cujo espectro está mostrado na Figura,



a. Escreva $x(t)$.
b. O sinal $x(t)$ é periódico? Se sim, qual seu período?
c. Determine a amostragem mínima que deve ser usada para amostrar $x(t)$ sem *aliasing*.

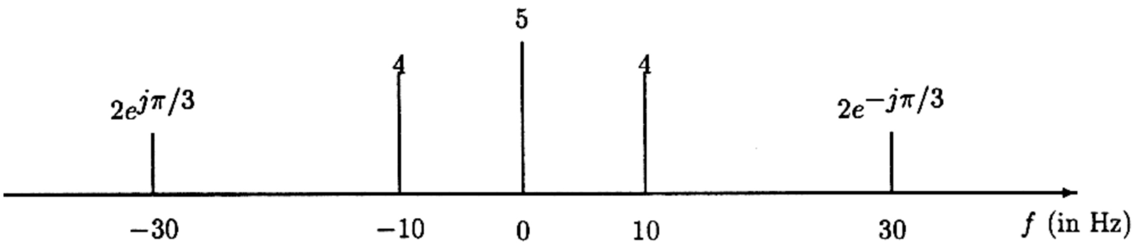
18. Considere o sistema da figura abaixo.



$$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), T = \frac{1}{3}$$

d. Desenhe o gráfico de $\bar{X}(\omega)$ para $-9\pi \leq \omega \leq 9\pi$ para os seguintes valores de ω_0: $\pi, 2\pi, 3\pi, 5\pi$.
e. Quais valores de ω_0 geram espectros idênticos?

19. O sinal analógico $x(t)$ apresenta o espectro mostrado na figura abaixo.



a. Escreva $x(t)$.
b. O sinal $x(t)$ é periódico? Se sim, qual seu período? E sua frequência fundamental? E se o sinal fosse $x(t) = \cos^2(60\pi t)$, qual seria a frequência gundamental?
c. O sinal sinal $x(t)$ é amostrado a uma frequência $f_s = 1/T_s = 50$ amostras por segundo, de modo a se obter $x[n] = x(nT_s)$. Escreva a equação de $x[n]$