EAE 5706: Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Aula 9: Jogos Dinâmicos: Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo, Crenças e Racionalidade Sequencial

Marcos Y. Nakaguma

30/08/2017

Revisão

- Na aula passada, vimos que o princípio da racionalidade sequencial impõe que as estratégias dos jogadores devem especificar ações ótimas em todos os conjuntos de informação do jogo.

- Um refinamento do conceito de equilíbrio de Nash que incorpora o princípio da racionalidade sequencial é o equilíbrio de Nash perfeito de subjogo.

- Vimos que o procedimento de backward induction pode ser utilizado para identificar todos os SPNEs de um jogo.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- Vamos agora definir, formalmente, o conceito de equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo. Para tanto, precisamos definir, primeiro, o conceito de subjogo.

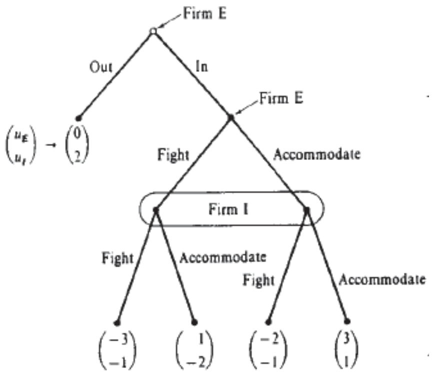
- Definição: Um subjogo de um jogo na forma extensiva Γ_E é um subconjunto deste que possui as seguintes propriedades:

  i. Ele começa em um conjunto de informação que contém um único nodo de decisão e contém todos os nodos de decisão que o sucedem;

  ii. Se um nodo de decisão x pertence ao subjogo, então todo nodo de decisão x' contido no mesmo conjunto de informação que x também deve pertencer ao subjogo. Isto é, os conjuntos de informação não podem ser "quebrados".

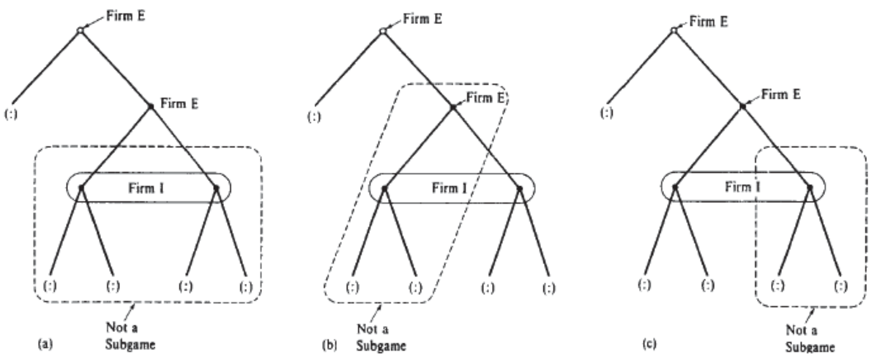
Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- Exemplo: Subjogos
  - O jogo abaixo possui dois subjogos:



Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - A seguir, alguns exemplos de partes do jogo que não são subjogos:



- Uma característica importante de um subjogo é a de que ele constitui um jogo em si mesmo e pode ser analizado separadamente.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- Definição: Um perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ em um jogo na forma extensiva Γ_E é um equilíbrio de Nash perfeito de subjogo se ele induz um equilíbrio de Nash em todo subjogo de Γ_E.

- Dizemos que o perfil de estratégias σ induz um equilíbrio de Nash em um subjogo qualquer se as ações especificadas por σ constituem um equilíbrio de Nash do subjogo considerado.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- Em jogos finitos na forma extensiva com informação (possivelmente) imperfeita, podemos aplicar o seguinte procedimento de backward induction generalizado:

  i. Comece identificando os equilíbrios de Nash em cada um dos subjogos finais do jogo.

  ii. Selecione um equilíbrio de Nash para cada um desses subjogos finais e derive a forma reduzida do jogo, onde os subjogos finais são substituídos pelos payoffs induzidos pelo equilíbrio selecionado.

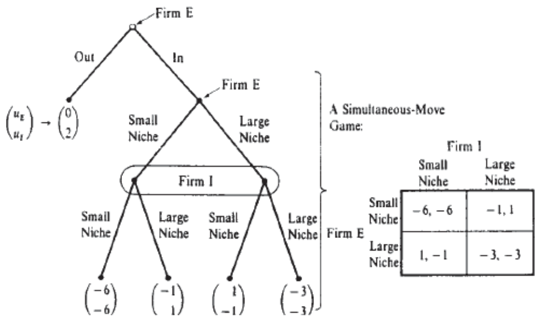
  iii. Repita os passos *i* e *ii* até que todos as ações sejam identificadas. O conjunto de ações determinado por este processo constitui um equilíbrio de Nash perfeito de subjogo.

  iv. Se houverem equilíbrios múltiplos em algum dos passos deste processo, é possível encontrar o conjunto de todos os equilíbrios perfeitos de subjogo repetindo o procedimento para cada possível combinação de equilíbrios que pode ocorrer nos subjogos deste jogo.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- É possível mostrar que o processo de backward induction generalizado resulta em um SPNE e que, inversamente, todo SPNE pode ser identificado por backward induction. (Ver Proposição 9.B.3).

- Exemplo 1: Jogo de Entrada com Escolha de Nicho de Mercado
  - Considere o seguinte jogo na forma extensiva:



Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

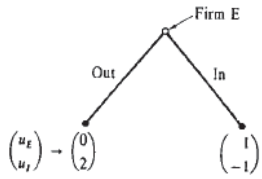
- (Cont.)
  - Procedendo por backward induction, considere primeiro o subjogo posterior à entrada da firma.
  - Note que existem dois equilíbrios de Nash em estratégias puras neste subjogo:

    i. (Large Niche, Small Niche); e

    ii. (Small Niche, Large Niche).

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

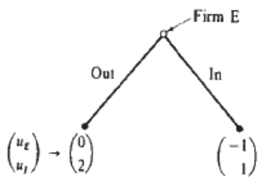
- (Cont.)
  - Considere o equilíbrio (Large Niche, Small Niche). Neste caso, o jogo reduzido é:



  - Assim, o SPNE é dado por: ((In, Large Niche), (Small Niche)).

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

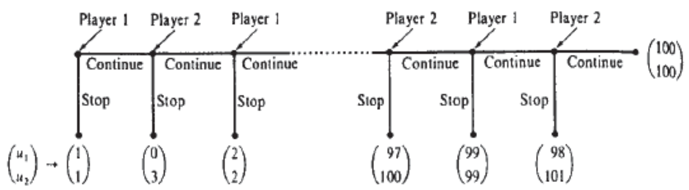
- (Cont.)
  - Considere agora o equilíbrio (Small Niche, Large Niche). Neste caso, o jogo reduzido é:



  - Assim, o SPNE é dado por: ((Out, Small Niche), (Large Niche)).

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- Exemplo 2: The Centipede Game (Rosenthal, 1981)
  - Considere o seguinte jogo:



  - Os jogadores iniciam com 1 dólar cada e se alternam decidindo "parar" ou "continuar", a começar pelo jogador 1.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Quando um jogador escolhe "continuar", 1 dólar é retirado do seu montante e 2 dólares são adicionados ao montante do seu rival.
  - O jogo termina quando um dos jogadores escolhe "parar" ou, alternativamente, quando ambos alcançam 100 dólares.
  - Vamos mostrar que o único SPNE deste jogo é tal que ambos os jogadores escolhem "parar" sempre for a sua vez de jogar, de tal forma que o payoff de equilíbrio dos dois jogadores é de apenas 1 dólar.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Observe que, no último subjogo, a decisão ótima do jogador 2 é de "parar", pois neste caso o seu payoff é de 101 ao invés de 100 caso escolhesse "continuar".
  - Procedendo por backward induction, no penúltimo nodo de decisão, o jogador 1 antecipa o comportamento do jogador 2 e escolhe "parar", pois neste caso o seu payoff é de 99 ao invés de 98 caso escolhesse "continuar".
  - Continuando desta maneira, podemos mostrar que a decisão ótima é "parar" em todos os nodos de decisão do jogo. Assim, o payoff de equilíbrio é de 1 dólar para ambos os jogadores.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- Uma questão importante relacionada ao conceito de equilíbrio perfeito de subjogo está relacionada ao tema da racionalidade limitada: você deve continuar a atuar de forma sequencialmente mesmo após ver que o seu oponente não está atuando de forma racional?
- Rosenthal (1981) propôs o jogo da centopéia como o intuito de ilustrar uma situação em que a solução por backward induction é contra-intuitiva.
- McKelvey e Palfrey (1992) estudaram o jogo da centopéia em um experimento de laboratório e monstraram que, de fato, os jogadores (alunos de Caltech) não atuam de forma sequencialmente racional.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- Em um estudo mais recente, Palacios-Huerta e Volij (2009) reproduziram o experimento com jogadores profissionais de xadrez.

- Contrariamente à evidência anterior, 69% dos participantes escolheram terminar o jogo imediatamente.

- Além disso, quando um grande-mestre estave entre os participantes, <u>todos</u> decidiram terminar o jogo imediatamente!

- Este resultado evidencia a importância da hipótese de conhecimento comum da racionalidade.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- Exemplo 3: Barganha Bilateral Finita (Stahl, 1972)
  - Dois jogadores barganham sobre como dividir v dólares em um jogo sequencial de T (ímpar) períodos.
  - No primeiro período, o jogador 1 oferece ao jogador 2 a quantia de $b_1 \in [0, v]$; o jogador 2 pode aceitar ou rejeitar esta oferta.
  - Se ele aceitá-la, o jogo termina e a oferta é implementada; se ele rejeitá-la, o jogo prossegue para o segundo período.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Graficamente, temos a seguinte interação dinâmica:

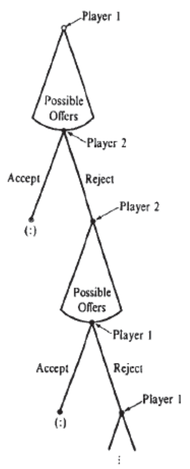


Figure 9.AA.1
The alternating-offer bilateral bargaining game.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - No segundo período, o jogador 2 oferece ao jogador 1 a quantia de $b_2 \in [0, v]$; o jogador 1 pode aceitar ou rejeitar esta oferta. E assim por diante...
  - O jogo prossegue até o período T, onde o jogador 1 faz a última oferta. Neste caso, ambos os jogadores recebem payoff zero caso não alcancem um acordo.
  - Os jogadores descontam os períodos pelo fator $\delta \in (0, 1)$, de forma que um dólar recebido em t gera payoff de δ^{t-1}.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Vamos mostrar que existe um único equilíbrio perfeito de subjogo.
  - Procedendo por backward induction, note que no período T o jogador 2 prefere (fracamente) aceitar qualquer oferta tal que $b_T \geq 0$.
  - Assim, a única resposta ótima do jogador 1 neste subjogo é propor $b_T = 0$.
  - Observe que os payoffs descontados induzidos por essas estratégias são $(\delta^{T-1}v, 0)$.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Considere agora o período $T - 1$, onde o jogador 2 é o proponente.
  - Note que neste caso o jogador 1 possui incentivo para aceitar qualquer proposta b_{T-1} tal que:

$$\delta^{T-2} b_{T-1} \geq \delta^{T-1} v \;\Rightarrow\; b_{T-1} \geq \delta v$$

  - Assim, a única resposta ótima do jogador 2 neste subjogo é propor $b_{T-1} = \delta v$.
  - Observe que os payoffs descontados induzidos por essas estratégias são $(\delta^{T-1}v, \delta^{T-2}(v - \delta v))$.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Considere agora o período $T-2$, onde o jogador 1 é o proponente.
  - Note que neste caso o jogador 2 possui incentivo para aceitar qualquer proposta b_{T-2} tal que:
  $$\delta^{T-3} b_{T-2} \geq \delta^{T-2} (v - \delta v) \;\; \Rightarrow \;\; b_{T-2} \geq \delta (v - \delta v)$$
  - Assim, a única resposta ótima do jogador 1 neste subjogo é propor $b_{T-2} = \delta v - \delta^2 v$.
  - Observe que os payoffs descontados induzidos por essas estratégias são $(\delta^{T-3}(v - (\delta v - \delta^2 v)), \delta^{T-3}(\delta v - \delta^2 v))$.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Considere agora o período $T-3$, onde o jogador 2 é o proponente.
  - Note que neste caso o jogador 1 possui incentivo para aceitar qualquer proposta b_{T-3} tal que:
  $$\delta^{T-4} b_{T-3} \geq \delta^{T-3}(v - (\delta v - \delta^2 v)) \;\; \Rightarrow \;\; b_{T-3} \geq \delta(v - (\delta v - \delta^2 v))$$
  - Assim, a única resposta ótima do jogador 1 neste subjogo é propor $b_{T-3} = \delta v - \delta^2 v + \delta^3 v$.
  - Observe que os payoffs descontados induzidos por essas estratégias são $(\delta^{T-4}(v - (\delta v - \delta^2 v + \delta^3 v)), \delta^{T-4}(\delta v - \delta^2 v + \delta^3 v))$.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Continuando desta maneira, obtemos que:
  $$\begin{aligned} b_{T-3} &= \delta v - \delta^2 v + \delta^3 v \\ b_{T-4} &= \delta v - \delta^2 v + \delta^3 v - \delta^4 v \\ &\vdots \\ b_1 &= \delta v - \delta^2 v + \delta^3 v - \delta^4 v + \delta^5 v - ... + \delta^{T-1} v \end{aligned}$$
  - Assim, temos que o único equilíbrio perfeito de subjogo envolve a seguinte sequência de ofertas:
  $$b_T = 0$$
  e
  $$b_{T-t} = -v \sum_{\tau=1}^{t} (-\delta)^{\tau} = \frac{\delta(1 - (-\delta)^t)}{1 + \delta} v, \quad \text{para } t = 1, ..., T-1$$
  Note que essas ofertas são aceitas em todos os subjogos.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo

- (Cont.)
  - Assim, o payoff de equilíbrio do jogador 1 é dado por:

$$\pi_1^* = v - b_1 = v\frac{1+\delta^T}{1+\delta},$$

    enquanto que o payoff de equilíbrio do jogador 2 é:

$$\pi_2^* = b_1 = \delta v\frac{1-\delta^{T-1}}{1+\delta}$$

  - Note que quando $T \to \infty$, temos:

$$\pi_1^* = \frac{v}{1+\delta}$$

    e

$$\pi_2^* = \frac{\delta v}{1+\delta}$$

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- Exemplo 4: Torneios (Lazear e Rosen, 1981) (Ver Gibbons, 2.2.D)
  - Considere uma relação entre dois empregados e um empregador.
  - A produção gerada por cada trabalhado é determinada pela seguinte função:

$$y_i = e_i + \varepsilon_i,$$

    onde e_i é o nível de esforço exercido pelo trabalhador e ε_i é um termo aleatório com média zero e distribuição $f(\varepsilon)$.
  - Assume-se que embora a produção seja observável, o nível de esforço exercido por cada trabalhador é não observável.
  - Assim, o empregador pode condicionar o salário do trabalhador à produção observada, mas não ao nível de esforço exercido por ele.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- (Cont.)
  - Lazear e Rosen (1981) propuseram um modelo em que o empregador induz os trabalhadores a exercerem esforço fazendo-os competir em um torneio.
  - Ao final do período, o trabalhador com a maior produção recebe um salário igual a w_H, enquanto o trabalhador com a menor produção recebe w_L.
  - A função de utilidade dos empregados é dada por:

$$u(w,e) = w - g(e),$$

    onde a função $g(\cdot)$ representa o custo do esfoço, com $g'(\cdot) > 0$ e $g''(\cdot) > 0$. A função lucro do empregador é:

$$\pi(y_1, y_2, w_H, w_L) = y_1 + y_2 - w_H - w_L$$

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- (Cont.)
  - A sequência de eventos é a seguinte:
    1. O empregador estabelece os salários w_L e w_H.
    2. Os trabalhadores observam os salários escolhidos, w_L e w_H, e decidem simultaneamente quanto esforço exercer, e_1 e e_2.
    3. Os choques aleatórios, ε_1 e ε_2, são realizados e salários são pagos aos trabalhadores.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- (Cont.)
  - Vamos caracterizar o equilíbrio perfeito de subjogo deste jogo.
  - Procedendo por backward induction, temos que, dados os níveis de esforço dos trabalhadores, os salários são determinados da seguinte maneira:
    - *i.* Se $y_i(e_i) \geq y_j(e_j)$, então $w_i = w_H$;
    - *ii.* Se $y_i(e_i) < y_j(e_j)$, então $w_i = w_L$.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- (Cont.)
  - Note que a probabilidade do trabalhador i vencer o torneio é dada por:

$$\begin{aligned}\Pr\left\{y_i(e_i) \geq y_j(e_j)\right\} &= \Pr\left\{\varepsilon_i \geq e_j + \varepsilon_j - e_i\right\} \\ &= \int_{\varepsilon_j} \Pr\left\{\varepsilon_i \geq e_j + \varepsilon_j - e_i | \varepsilon_j\right\} f\left(\varepsilon_j\right) d\varepsilon_j \\ &= \int_{\varepsilon_j} [1 - F(e_j + \varepsilon_j - e_i)] f\left(\varepsilon_j\right) d\varepsilon_j\end{aligned}$$

  - Assim, dado uma combinação de esforços (e_1, e_2), a utilidade esperada do trabalhador i é dada por:

$$\begin{aligned}& w_H \int_{\varepsilon_j} [1 - F(e_j + \varepsilon_j - e_i)] f\left(\varepsilon_j\right) d\varepsilon_j \\ & \quad + w_L \left(1 - \int_{\varepsilon_j} [1 - F(e_j + \varepsilon_j - e_i)] f\left(\varepsilon_j\right) d\varepsilon_j\right) - g\left(e_i\right) \\ &= (w_H - w_L) \left(1 - \int_{\varepsilon_j} [1 - F(e_j + \varepsilon_j - e_i)] f\left(\varepsilon_j\right) d\varepsilon_j\right) + w_L - g\left(e_i\right)\end{aligned}$$

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- (Cont.)
  - Os trabalhadores escolhem simultaneamente os seus níveis de esforço (e_1, e_2). Um par de estratégias (e_1^*, e_2^*) constitui um equilíbrio de Nash do jogo simultâneo se, e somente se, para todo i, e_i^* resolve:

$$\max_{e_i} \ (w_H - w_L)\left(1 - \int_{\varepsilon_j} [1 - F(e_j^* + \varepsilon_j - e_i)] f(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j\right) + w_L - g(e_i)$$

  - A condição de primeira ordem associada a esse problema é dada por:

$$(w_H - w_L)\int_{\varepsilon_j} f(e_j^* + \varepsilon_j - e_i) f(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j = g'(e_i),$$

i.e. a utilidade marginal do esforço deve ser igual ao seu custo marginal.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- (Cont.)
  - Assim, em um equilíbrio simétrico, i.e. $e_1^* = e_2^* = e^*$, temos:

$$(w_H - w_L)\int_{\varepsilon} f(\varepsilon)^2\, d\varepsilon = g'(e_i)$$

  - Além disso, assumindo que $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, segue que:

$$(w_H - w_L)\int_{\varepsilon} \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} d\varepsilon = g'(e^*) \qquad (*)$$

Portanto, quanto maior o prêmio para o vencedor, $(w_H - w_L)$, maior o esforço exercido pelos trabalhadores e, por outro lado, quanto maior a variância dos choques de produtividade, menor o esforço exercido.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- (Cont.)
  - Procedendo por backward induction, o empregador antecipa que as decisões de esforço dos agentes serão tomadas de acordo com $(*)$.
  - Além disso, ele escolhe w_L e w_H de forma a maximizar a sua utilidade esperada sujeito à condição de participação dos trabalhadores:

$$\max_{w_L, w_H} \ \mathbb{E}(y_1 + y_2 - w_L - w_H) = 2e^* - w_L - w_H$$

sujeito a

$$\frac{1}{2} w_H + \frac{1}{2} w_L - g(e^*) \geq \overline{u},$$

onde $\overline{u}$ representa o valor da "outside option" dos trabalhadores.

Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogo (Extra)

- (Cont.)
    - No ponto de ótimo, a condição de participação deve ser satisfeita com igualdade, de forma que podemos re-expressar o problema acima como:

    $$\max_{e^*} 2e^* - 2g\left(e^*\right) - 2\overline{u}$$

    Logo o nível de esforço ótimo que o empregador gostaria de induzir os trabalhadores a exercer deve satisfaz a seguinte condição:

    $$g^{'}\left(e^*\right) = 1$$

    - Note que os salários que implementam o esforço ótimo e, ao mesmo tempo, satisfazem a condição de participação dos agentes são tais que:

    $$\left(w_H^* - w_L^*\right) \int_{\varepsilon} \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} d\varepsilon = 1$$

    e

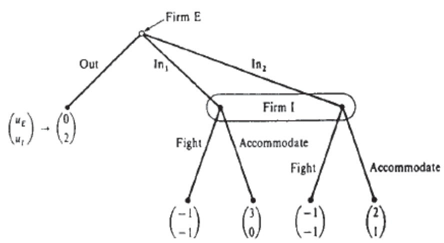
    $$\frac{1}{2} w_H^* + \frac{1}{2} w_L^* - g\left(e^*\right) = \overline{u}$$

Crenças e Racionalidade Sequencial

Crenças e Racionalidade Sequencial

- Existem alguns casos em que o conceito de equilíbrio perfeito de subjogo não será suficiente para capturar o princípio de racionalidade sequencial. Este é o caso dos jogos não possuem subjogo próprio.

- Exemplo 1: Jogo com Duas Formas de Entrada
    - Considere o seguinte jogo na forma extensiva:



    Observe que a firma incumbente não é capaz de observar a estratégia utilizada pela firma entrante caso ela decida entrar no mercado.

Crenças e Racionalidade Sequencial

- (Cont.)
  - Note que existem dois equilíbrios de Nash em estratégias puras neste jogo, (out, fight) e (in_1, accommodate).
  - Porém, como discutimos anteriormente, o equilíbrio (out, fight) não é razoável, pois o incumbente sempre prefere acomodar caso a entrada ocorra.
  - Observe que o critério de perfeição de subjogo não é útil neste caso, pois o único subjogo é o próprio jogo e, portanto, o conjunto de equilíbrios de Nash é igual ao conjunto de equilíbrios perfeitos de subjogo.
  - Como poderíamos eliminar este equilíbrio pouco razoável neste caso?

Crenças e Racionalidade Sequencial

- Nesta seção, introduzimos o conceito de weak perfect Bayesian equilibrium que estende o princípio da racionalidade sequencial adicionando formalmente a ideia de crenças.
- Definição: Um sistema de crenças μ em um jogo extensivo Γ_E consiste em um conjunto de probabilidades $\mu(x) \in [0,1]$ para cada nodo de decisão x em Γ_E tal que:

$$\sum_{x \in H} \mu(x) = 1$$

  para todo conjunto de informação H.
- Intuitivamente, um sistema de crenças especifica a probabilidade que um jogador atribui ao evento de encontrar-se em um certo nodo de decisão, x, dentre todos aqueles pertencentes a um mesmo conjunto de informação, H.

Crenças e Racionalidade Sequencial

- Note que $\mu(x) = 1$ para todo x tal que $H(x) = \{x\}$, i.e. as crenças são degeneradas em conjuntos de informação que contém um único elemento.
- Seja $\mathbb{E}[u_i|H, \mu, \sigma_i, \sigma_{-i}]$ a utilidade esperada do jogador i a partir do conjunto de informação H, dado um sistema de crenças μ e o perfil de estratégias σ_i e σ_{-i}.
- Definição: Um perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ é sequencialmente racional em um conjunto de informação H dado um sistema de crenças μ se:

$$\mathbb{E}[u_i|H, \mu, \sigma_{\iota(H)}, \sigma_{-\iota(H)}] \geq \mathbb{E}[u_i|H, \mu, \widetilde{\sigma}_{\iota(H)}, \sigma_{-\iota(H)}]$$

  para todo $\widetilde{\sigma}_{\iota(H)} \in \Delta(S_{\iota(H)})$, onde $\iota(H)$ denota o jogador que atua no conjunto de informação H.

Crenças e Racionalidade Sequencial

- Um perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ que satisfaz a condição acima para todo conjunto de informação H é denominado *sequencialmente racional dado um sistema de crenças μ*.

- Intuitivamente, um perfil de estratégias σ é sequencialmente racional se nenhum jogador possuir incentivo para alterar a sua estratégia σ_i em qualquer um de seus conjuntos de informação, dado o seu sistema de crenças μ e as estratégias dos demais jogadores σ_{-i}.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Com base nos conceitos apresentados acima, podemos definir um weak perfect Bayesian equilibrium.

- Este conceito de solução requere que, em equilíbrio:

  i. As estratégias sejam sequencialmente racionais dadas as crenças dos jogadores; e

  ii. As crenças sejam consistentes com as estratégias dos jogadores, i.e. sempre que possível, as crenças devem ser derivadas a partir das estratégias por meio da regra de Bayes. Assim, dado $x \in H$, devemos ter que:

$$\mu(x) = \Pr(x|H, \sigma) = \frac{\Pr(x|\sigma)}{\sum_{x' \in H} \Pr(x'|\sigma)},$$

  onde $\sum_{x' \in H} \Pr(x^{'}|\sigma) > 0$.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Definição: Um perfil de estratégias e um sistema de crenças (σ,μ) é um weak perfect Bayesian equilibrium (weak PBE) se (σ, μ) satisfaz as seguintes propriedades:

  i. O perfil de estratégias σ é sequencialmente racional dado o sistema de crenças μ.

  ii. O sistema de crenças μ é derivado, sempre que possível, a partir do perfil de estratégias σ através da regra de Bayes, i.e. para qualquer conjunto de informação H com $Pr(H|\sigma) > 0$, temos que:

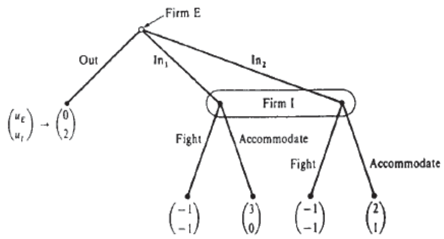
$$\mu(x) = \frac{\Pr(x|\sigma)}{\Pr(H|\sigma)} \quad \text{para todo } x \in H$$

- Observe que a caracterização de um weak PBE requer a especificação tanto de um perfil de estratégias, σ, quanto de um sistema de crenças, μ.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- O termo "weak" se deve ao fato de a definição não impõe nenhuma restrição sobre as crenças em conjuntos de informação que ocorrem com probabilidade zero, i.e. fora do equilibrium path.

- Exemplo 1: Jogo com Duas Formas de Entrada (Cont.)
  - Considere novamente o seguinte jogo sequencial:



  - Lembre-se que este jogo possui dois SPNE, (out, fight) e (in_1, accommodate).

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)
  - Vamos mostrar que o perfil de estratégias (out, fight) não faz parte de nenhum weak PBE.
  - Note que um sistema de crenças neste jogo pode ser descrito por um único valor $\lambda \in [0,1]$ que dá a probabilidade da firma incumbente encontrar-se no nodo de decisão que segue de "in_1".
  - Observe que a estratégia ótima da firma incumbente é "accommodate", visto que:

$$\lambda.0 + (1-\lambda).1 \geq \lambda.(-1) + (1-\lambda)(-1)$$
$$\Rightarrow \quad (1-\lambda) \geq -1,$$

para qualquer $\lambda \in [0,1]$.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)
  - Portanto, temos que somente "accommodate" é sequencialmente racional para *qualquer* sistema de crenças.
  - Consequentemente, somente o perfil de estratégias (in_1, accommodate) pode fazer parte de um weak PBE.
  - Além disso, dado esse perfil de estratégias, temos que, em equilíbrio, que o sistema de crenças deve ser tal que $\lambda = 1$.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- A proposição a seguir provê a relação entre os conceitos de equilíbrio de Nash e weak PBE.

- Proposição: Um perfil de estratégias σ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, existe um sistema de crenças tal que:

    i. O perfil de estratégias σ é sequencialmente racional dado o sistema de crenças μ em todo conjunto de informação H tal que $\Pr(H|\sigma) > 0$.

    ii. O sistema de crenças μ é derivado, sempre que possível, a partir do perfil de estratégias σ através da regra de Bayes.

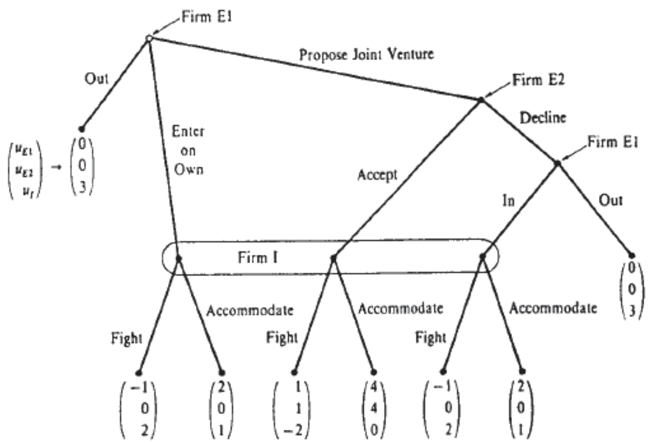
Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Observe que a única diferença entre as definições de equilíbrio de Nash e weak PBE é a de que, para o equilíbrio de Nash, a racionalidade sequencial é requerida apenas no equilibrium path.

- Corolário: Todo weak PBE é um equilíbrio de Nash, mas nem todos equilíbrio de Nash é um weak PBE.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- Exemplo 2: Jogo de Entrada com "Joint Venture"
    - Considere o seguinte jogo na forma extensiva:



Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)
  - A firma incumbente é capaz de observar apenas se a firma $E1$ decidiu entrar no mercado, porém não sabe se ela conta ou não com a assistência da firma $E2$.
  - A melhor resposta da firma incumbente é "fight" somente se a firma $E1$ está sozinha.
  - Por outro lado, a firma $E1$, quando sozinha, prefere entrar somente se ela espera que a firma incumbente escolha "accommodate", enquanto que, quando assistida por $E2$, ela sempre prefere entrar.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)
  - Para encontrar o único weak PBE deste jogo, observe que, em qualquer equilíbrio, a firma $E2$ deve sempre aceitar a proposta de joint venture, pois isso lhe garante um payoff estritamente positivo.
  - Mas, neste caso, a firma $E1$ deve sempre fazer a proposta de joint venture para $E2$.
  - Logo, concluímos que o conjunto de informação da firma I é alcançado, em equilíbrio, com probabilidade 1.
  - Além disso, o sistema de crenças deve atribuir probabilidade 1 ao nodo de decisão que segue o aceite da firma $E2$.

Weak Perfect Bayesian Equilibrium

- (Cont.)
  - Dadas essas estratégias, a firma incumbente deve escolher acomodar a entrada da firma $E1$.
  - Finalmente, dado que a firma incumbente escolhe acomodar, a firma $E1$ deve entrar mesmo que a firma $E2$ rejeite a proposta de joint venture (ação fora do caminho de equilíbrio).
  - Assim, concluímos que o único weak PBE deste jogo é constituído pelo seguinte perfil de estratégias:

$$\sigma_{E1} = (\text{"}propose\ joint\ venture\text{"}, \text{"}in\text{"})$$
$$\sigma_{E2} = (\text{"}accept\text{"})$$
$$\sigma_{I} = (\text{"}accommodate\text{"})$$

e pelo seguinte sistema de crenças:

$$\mu(\text{"}middle\ node\text{"}) = 1$$