SSC0503 - Introdução à Ciência de Computação II
Respostas da 2ª Lista
Professor: Claudio Fabiano Motta Toledo (`claudio@icmc.usp.br`)
Estagiário PAE: Jesimar da Silva Arantes (`jesimar.arantes@usp.br`)

Resposta pergunta 1.1:

P(1): $4(1) - 2 = 2(1)^2$ ou $2 = 2$ verdadeiro
Suponha $P(k) : 2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) = 2k^2$
Mostre $P(k + 1) = 2 + 6 + 10 + ... + [4(K + 1) - 2] = 2(K + 1)^2$

$2 + 6 + 10 + ... + [4(k + 1) - 2]$ lado esquerdo de $P(k + 1)$
$= 2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) + [4(k + 1) - 2]$
$= 2k^2 + 4(k + 1) - 2$ usando $P(k)$
$= 2k^2 + 4k + 2$
$= 2(k^2 + 2k + 1)$
$= 2(k + 1)^2$ lado direito de $P(k + 1)$

Resposta pergunta 1.2:

$P(1) : 1 = 1(2(1) - 1)$ verdadeiro
Suponha $P(k) : 1 + 5 + 9 + ... + (4k - 3) = k(2k - 1)$
Mostre $P(k + 1) : 1 + 5 + 9 + ... + [4(k + 1) - 3] = (k + 1)[2(k + 1) - 1]$

$1 + 5 + 9 + ... + [4(k + 1) - 3]$ lado esquerdo de P(k + 1)
$= 1 + 5 + 9 + ... + (4k - 3) + [4(k + 1) - 3]$
$= k(2k - 1) + 4(k + 1) - 3$ usando $P(k)$
$= 2k^2 - k + 4k + 1$
$= 2k^2 + 3k + 1$
$= (k + 1)(2k + 1)$
$= (k + 1)[2(k + 1) - 1]$ lado direito de $P(k + 1)$

Resposta pergunta 1.3:

$P(1) : 6 - 2 = 1[3(1) + 1]$ verdadeiro
Suponha $P(k) : 4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) = k(3k + 1)$
Mostre $P(k + 1) = 4 + 10 + 16 + ... + [6(k + 1) - 2] = (k + 1)[3(k + 1) + 1]$

$4 + 10 + 16 + ... + [6(k + 1) - 2]$ lado esquerdo de $P(k + 1)$
$= 4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) + [6(k + 1) - 2]$
$= k(3k + 1) + 6(k + 1) - 2$ usando $P(k)$
$= 3k^2 + k + 6k + 4$
$= 3k^2 + 7k + 4$
$= (k + 1)(3k + 4)$
$= (k + 1)[3(k + 1) + 1]$ lado direito de $P(k + 1)$

Resposta pergunta 1.4:

$P(1) : 1^2 = 1(2-1)(2+1)/3$ verdadeiro
Suponha $P(k) : 1^2 + 3^2 + ... + (2k-1)^2 = k(2k-1)(2k+1)/3$
Mostre $P(k+1) : 1^2 + 3^2 + ... + [2(k+1)-1]^2 = (k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)/3$

$1^2 + 3^2 + ... + [2(k+1)-1]^2$ lado esquerdo de $P(k+1)$
$= 1^2 + 3^2 + ... + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2$
$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + [2(k+1)-1]^2$ usando $P(k)$
$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$
$= (2k+1)[\frac{k(2k-1)}{3} + 2k + 1]$ fatorando
$= (2k+1)[\frac{2k^2-k+6k+3}{3}]$
$= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}$
$= (2k+1)(k+1)(2k+3)/3$
$= (k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)/3$ lado direito de $P(k+1)$

Resposta pergunta 1.6:
$P(1) : \frac{1}{1*2} = \frac{1}{1+1}$
Suponha $P(k) : \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$
Mostre $P(k+1) : \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + ... + \frac{1}{(k+1)*(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + ... + \frac{1}{(k+1)*(k+2)}$ lado esquerdo de $P(k+1)$
$= \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + ... + \frac{1}{k(k+1) + \frac{1}{(k+1)*(k+2)}}$
$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)*(k+2)}$ usando $P(k)$
$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)*(k+2)}$
$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)*(k+2)}$
$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)*(k+2)}$
$= \frac{k+1}{k+2}$ lado direito de $P(k+1)$

Resposta pergunta 1.7:
$P(1) : a = \frac{a-ar}{1-r} = \frac{a(1-r)}{1-r}$ verdadeiro
Suponha $P(k) : a + ar + ... + ar^{k-1} = \frac{a-ar^k}{1-r}$
Mostre $P(k+1) : a + ar + ... + ar^k = \frac{a-ar^{k+1}}{1-r}$

$a + ar + ... + ar^k$ lado esquerdo de $P(k+1)$
$= a + ar + ... + ar^{k-1} + ar^k$
$= \frac{a-ar^k}{1-r} + ar^k$ usando $P(k)$
$= \frac{a-ar^k+ar^k(1-r)}{1-r}$
$= \frac{a-ar^{k+1}}{1-r}$ lado direito de $P(k+1)$

Resposta pergunta 1.9:
$P(2) : 2^2 > 2+1$ verdadeiro
Suponha $P(k) : k^2 > k+1$

Mostre $P(k+1) : (k+1)^2 > k+2$

$(k+1)^2$
$= k^2 + 2k + 1$
$> (k+1) + 2k + 1$ usando $P(k)$
$= 3k + 2$
$> k + 2$

Resposta pergunta 1.11:
$P(4) : 2^4 < 4! ou 16 < 24$ verdadeiro
Suponha $P(k) : 2^k < k!$
Mostre $P(k+1) : 2^{k+1} < (k+1)!$

2^{k+1}
$= 2 * 2^k$
$< 2 * k!$ usando $P(k)$
$< (k+1)k!$ pois $k \geq 4$
$= (k+1)!$

Resposta pergunta 1.14:
$P(1) : 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ e $7|7$ verdadeiro
Suponha $P(k) : 7|2^{3k} - 1$ logo $2^{3k} - 1 = 7m$ ou $2^{3k} = 7m + 1$ para algum inteiro m
Mostre $P(k+1) : 7|2^{3(k+1)} - 1$

$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k+3} - 1 = 2^{3k} * 2^3 - 1$
$= (7m+1)2^3 - 1$ usando $P(k)$
$= 7(2^3 m) + 8 - 1$
$= 7(2^3 m + 1)$ onde $2^3 m + 1$ é um inteiro, logo $7|2^{3(k+1)} - 1$

Resposta pergunta 1.16:
$P(1) : 2 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$ e $3|3$
verdadeiro Suponha $P(k) : 3|2^k + (-1)^{k+1}$ logo $2^k + (-1)^{k+1} = 3m$ ou $2^k = 3m - (-1)^{k+1}$ para algum inteiro m
Mostre $P(k+1) : 3|2^{k+1} + (-1)^{k+2}$

$2^{k+1} + (-1)^{k+2} = 2 * 2^k + (-1)^{k+2}$
$= 2(3m - (-1)^{k+1}) + (-1)^{k+2}$ usando $P(k)$
$= 3(2m) - 2(-1)^{k+1} + (-1)^{k+2}$
$= 3(2m) + (-1)^{k+1}(-2 + (-1))$
$= 3(2m) + (-1)^{k+1}(-3)$
$= 3(2m - (-1)^{k+1})$ onde $2m - (-1)^{k+1}$ é um inteiro, logo $3|2^{k+1} + (-1)^{k+2}$

Resposta pergunta 1.18:
$P(1) : 10 + 3 * 4^3 + 5 = 10 + 192 + 5 = 207 = 9 * 23$ verdadeiro
Suponha $P(k) : 9|10^k + 3 * 4^{k+2} + 5$ logo $10^k + 3 * 4^{k+2} + 5 = 9m$ ou $10^k = 9m - 3 * 4^{k+2} - 5$

para algum inteiro m
Mostre $P(k+1) : 9|10^{k+1} + 3 * 4^{k+3} + 5$

$10^{k+1} + 3 * 4^{k+3} + 5 = 10 * 10^k + 3 * 4^{k+3} + 5$
$= 10(9m - 3 * 4^{k+2} - 5) + 3 * 4^{k+3} + 5$ usando $P(k)$
$= 9(10m) - 30 * 4^{k+2} - 50 + 3 * 4^{k+2} * 4 + 5$
$= 9(10m) - 45 - 3 * 4^{k+2}(10 - 4) = 9(10m - 5) - 18 * 4^{k+2}$
$= 9(10m - 5 - 2 * 4^{k+2})$ onde $10m - 5 - 2 * 4^{k+2}$ é um inteiro, logo $9|10^{k+1} + 3 * 4^{k+3} + 5$

Resposta pergunta 1.20:
A proposição a ser demonstrada é que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 3 para $n \geq 1$
$P(1) : 1(1+1)(1+2) = 6$ é divisível por 3 verdadeiro
Suponha $P(k) : k(k+1)(k+2) = 3m$ para algum inteiro m
Mostre $P(k+1) : (k+1)(k+2)(k+3)$ é divisível por 3

$(k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)k + (k+1)(k+2)3$
$= 3m + (k+1)(k+2)3$ usando $P(k)$
$= 3[m + (k+1)(k+2)]$

Resposta pergunta 1.22:
Para o passo básico da demonstração por indução, a fbf mais simples desse tipo consiste em uma única letra de proposição, que tem 1 símbolo; 1 é ímpar. Suponha que, para qualquer fbf desse tipo com r símbolos, $1 \leq r \leq k$, r é ímpar. Considere uma fbf com $k+1$ símbolos. Ela tem que ter uma das formas $(P) \vee (Q)$, $(P) \wedge (Q)$, $(P) \rightarrow (Q)$, onde P tem r_1 símbolos, $1 \leq r_1 < k$, e Q tem r_2 símbolos, $1 \leq r_2 < k$. Pela hipótese de indução, r_1 e r_2 são ambos ímpares. O número de símbolos de fbf é, então, $r_1 + r_2 + 5$ (quatro parênteses mais um conectivo), que é ímpar.

Resposta pergunta 1.23:
$P(2)$ e $P(3)$ são verdadeiros devido às equações $2 = 2$ e $3 = 3$. Suponha que $P(r)$ é verdadeiro para qualquer r com $2 \leq r \leq k$ e considere $P(k+1)$. Podemos supor que $k+1 \geq 4$, de modo que $(k+1) - 2 \geq 2$ e, pela hipótese de indução, pode ser escrito como uma soma de algarismos iguais a 2 ou 3. Somando um 2 adicional, obtemos $k+1$ como uma soma de algarismos iguais a 2 ou 3.

Resposta pergunta 2.2:
$Q(0) : j_0 = (i_0 - 1)!$ verdadeiro, pois $j = 1$, $i = 2$ antes de se entrar no laço e $1! = 1$.
Suponha $Q(k) : j_k = (i_k - 1)!$
Mostre $Q(k+1) : j_{k+1} = (i_{k+1} - 1)!$

$j_{k+1} = j_k * i_k = (i_k - 1)! i_k = (i_k)! = (i_{k+1} - 1)!$

Ao fim do laço, $j = (i-1)!$ e $i = x + 1$, logo $j = x!$

Resposta pergunta 2.6:

$Q : j = x * y^n$
$Q(0) : j_0 = x * y^{i_0}$ verdadeiro, pois $j = x$, $i = 0$ antes de entrar no laço.
Suponha $Q(k) : j_k = x * y^{i_k}$
Mostre $Q(k+1) : j_{k+1} = x * y^{i_{k+1}}$

$j_{k+1} = j_k * y = x * y^{i_k} * y = x * y^{i_{k+1}}$

Ao final do laço, $j = x * y_i$ e $i = n$, logo $j = x * y^n$.