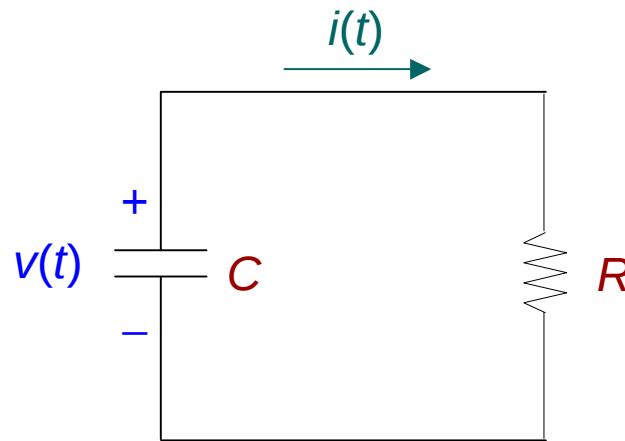


Capítulo 8

Circuitos Simplificados *RC* e *RL*

8.1 Circuitos RC sem Fontes

Associação em série de um resistor e um capacitor:



Capacitor carregado com tensão V_0 em $t = 0$.

Energia em $t = 0$: $w(0) = \frac{1}{2}CV_0^2$

Aplicando Lei de Kirchhoff de correntes quando $t \geq 0$, temos:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0$$

Solução da equação diferencial de 1ª ordem:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + K$$

Para que a solução seja válida para $t \geq 0$, a constante K deve ser escolhida tal que a condição inicial de $v(0) = V_0$ seja satisfeita, Portanto, em $t = 0$, temos:

$$\ln v(0) = \ln V_0 = K$$

Substituindo o valor de K na solução, temos:

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + K = -\frac{t}{RC} + \ln V_0$$

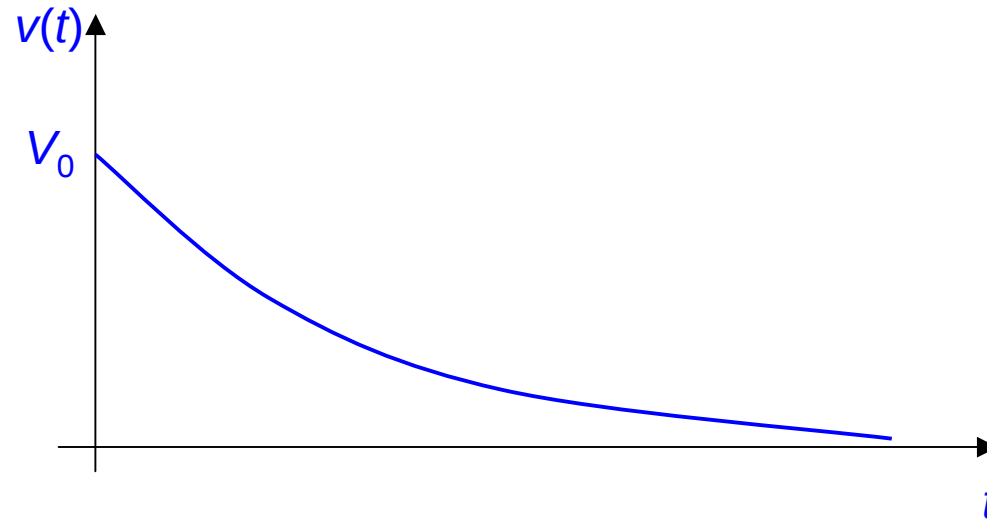
$$\ln v - \ln V_0 = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln \frac{v}{V_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Esta é a tensão sobre R , portanto, a corrente é:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$



Observe que a tensão é inicialmente V_0 e que decai exponencialmente, tendendo a 0, para t crescente.

Velocidade de decaimento da tensão é determinada pelo produto RC .

Como a resposta é caracterizada pelos elementos do circuito e não pela atuação de uma fonte externa de tensão e corrente, a resposta é denominada de **resposta natural** do circuito.

Potência instantânea absorvida pelo resistor R :

$$p_R(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{V_0^2}{R} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) \quad [\text{W}]$$

Energia absorvida pelo resistor para $t \rightarrow \infty$ é:

$$w_R(\infty) = \int_0^{\infty} p_R(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{V_0^2}{R} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2} C V_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) \Big|_0^{\infty}$$

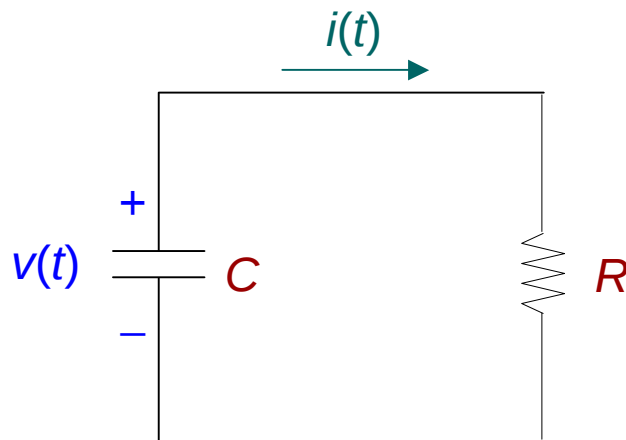
$$= \frac{1}{2} C V_0^2 \longrightarrow \text{energia armazenada no circuito}$$

Se o tempo inicial é t_0 , isto é, $v(t_0) = V_0$, então

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) \quad \text{para } t \geq t_0$$

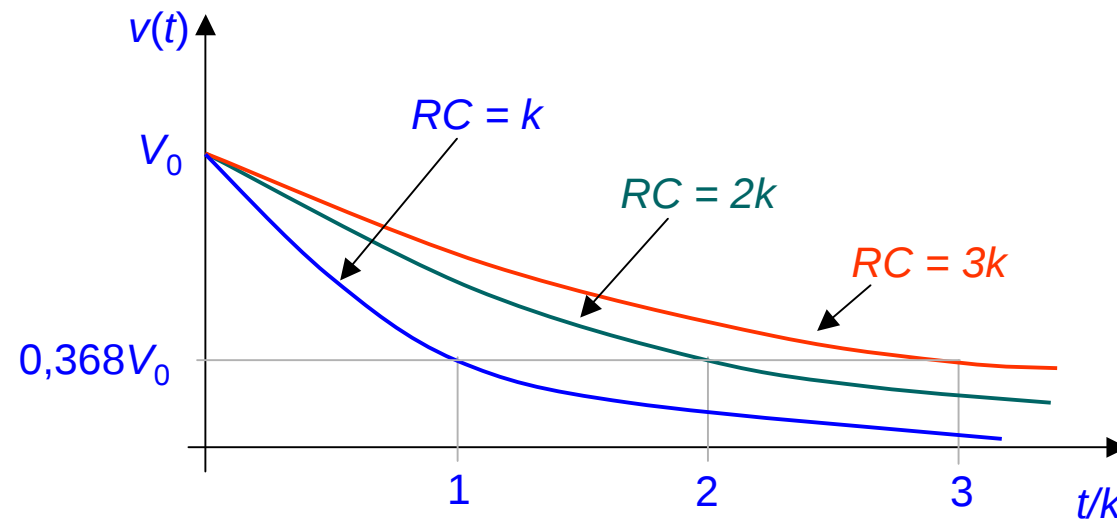
8.2 Constante de Tempo

Caracterização da velocidade de decaimento de um circuito com elementos armazenadores.



$$v = V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Gráfico $v(t) \times t$:



$$v = V_0 \exp\left(-\frac{t}{nk}\right)$$

Corrente no circuito decresce como a tensão:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

O tempo necessário para que a resposta natural decaia de um fator de $1/e$ é definido como a constante de tempo τ do circuito.

$$V_0 \exp\left(-\frac{(t+\tau)}{RC}\right) = \frac{V_0}{e} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC} - 1\right) = V_0 \exp\left(-\frac{(t+RC)}{RC}\right)$$

$$V_0 \exp\left(-\frac{(t+\tau)}{RC}\right) = V_0 \exp\left(-\frac{(t+RC)}{RC}\right)$$

Constante de tempo: $\tau = RC$

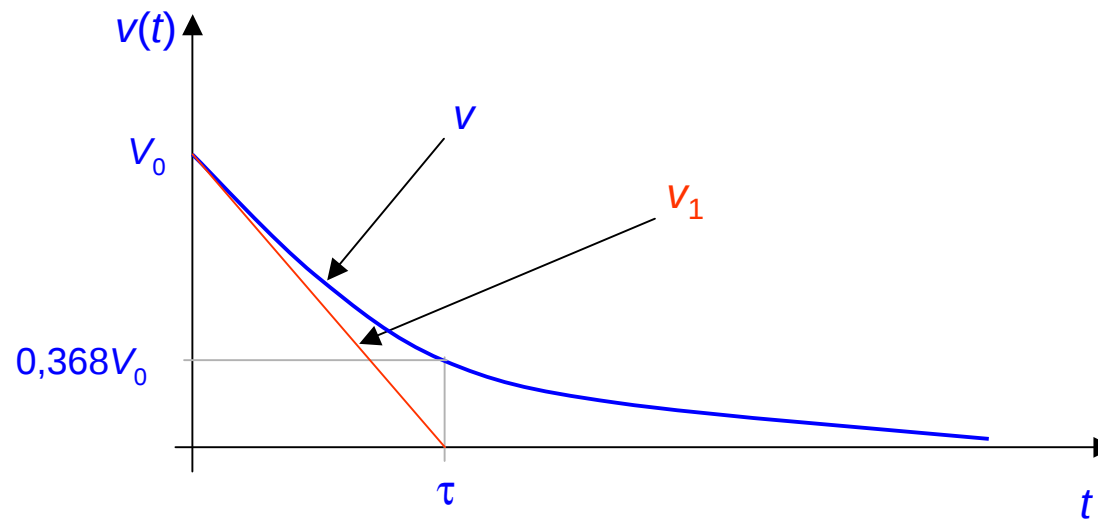
Unidade de τ : $(\Omega \cdot F) = (V/A) \cdot (C/V) = (C/A) = s$

Tensão:

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

A resposta ao final de 1 constante de tempo é reduzida para $e^{-1} = 0,368$ do valor inicial. Ao final de 2 constantes de tempo, ela é igual a $e^{-2} = 0,135$ do seu valor inicial e depois de 5 constantes, ela é igual a $e^{-5} = 0,0067$.

Propriedade das funções exponenciais:



Tangente à curva em $t = 0$ intercepta o eixo de t em $t = \tau$.

$$v_1 = mt + V_0$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] = -\frac{V_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$m = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V_0}{\tau} \longrightarrow v_1 = -\frac{V_0}{\tau} t + V_0$$

A reta intercepta o eixo do tempo em $v_1 = 0$, o que requer que $t = \tau$.

A constante de tempo é o tempo necessário para que a resposta natural se torne **zero** se ela decrescer com uma velocidade constante igual à razão inicial de decaimento.

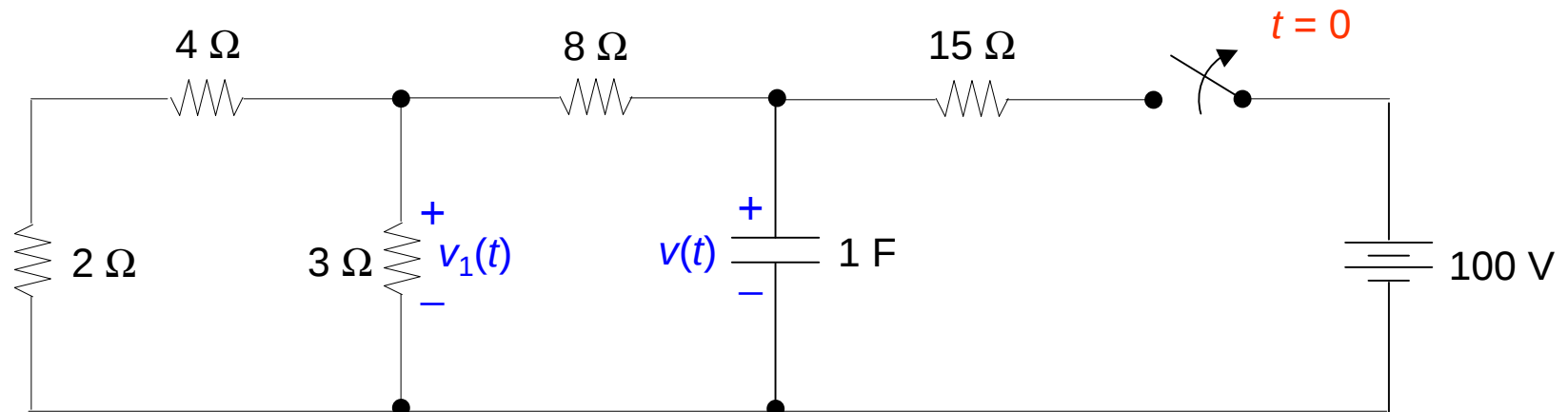
A constante de tempo permite prever a forma geral da resposta:

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

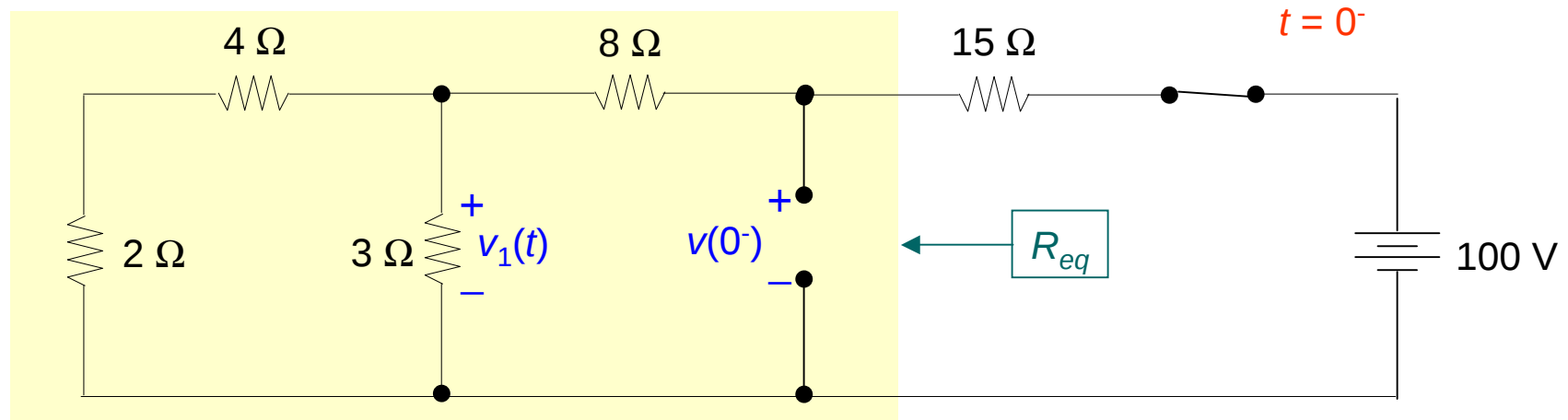
mas para a solução completa deve-se encontrar a tensão inicial $v(0^+) = V_0$.

Para um capacitor: $v(0^-) = v(0^+) = V_0$.

Exemplo: Tensão no capacitor $v(t)$. Circuito em regime permanente cc imediatamente antes da abertura da chave.



Em $t = 0^-$, chave fechada $\Rightarrow$ capacitor é um circuito aberto.

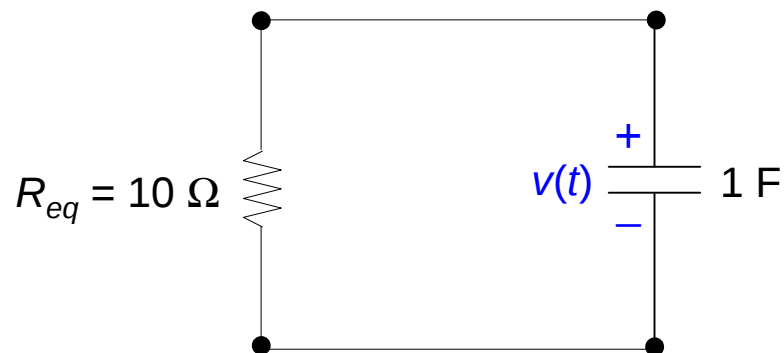


$$R_{eq} = 8 + \frac{3(2+4)}{3+(2+4)} = 10 \text{ } [\Omega]$$

$$v(0^-) = \frac{10}{10+15} \times 100 = 40 \text{ [V]}$$

Portanto, $v(0^-) = v(0^+) = V_0 = 40 \text{ [V]}$.

Para $t > 0$, temos:



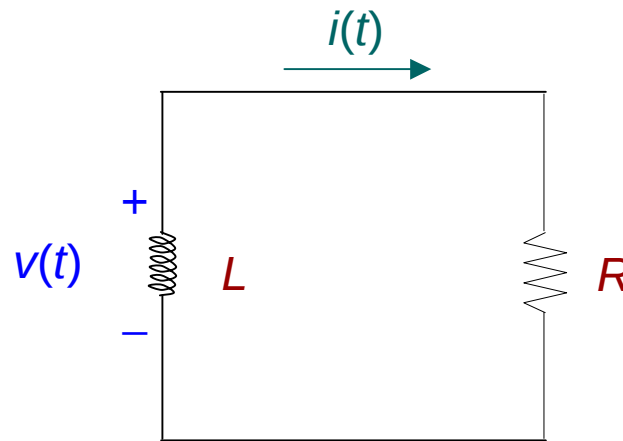
Constante de tempo: $\tau = R_{eq}C = 10 \text{ [s]}$

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 40 \exp\left(-\frac{t}{10}\right) \text{ [V]}$$

$$v_1(t) = \frac{2}{2+8} v(t) = 8 \exp\left(-\frac{t}{10}\right) \text{ [V]}$$

8.3 Circuitos *RL* sem Fontes

Associação em série de um resistor e um indutor:



Indutor está conduzindo uma corrente I_0 em $t = 0$.

Energia em $t = 0$: $w(0) = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2$

Aplicando Lei de Kirchhoff de tensões quando $t \geq 0$, temos:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

Solução 1: Solução da equação diferencial de 1ª ordem por separação de variáveis:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt$$

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K$$

Para que a solução seja válida para $t \geq 0$, a constante K deve ser escolhida tal que a condição inicial de $i(0) = I_0$ seja satisfeita, Portanto, em $t = 0$, temos:

$$\ln i(0) = \ln I_0 = K$$

Substituindo o valor de K na solução, temos:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln \frac{i}{I_0} = -\frac{R}{L}t$$

$$i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

Esta é a corrente sobre R , portanto, a tensão é:

$$v(t) = Ri(t) = RI_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

Solução 2: Assumir uma forma geral de solução baseada na inspeção da equação a ser resolvida:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

Vamos incluir várias constantes desconhecidas e determinar seus valores tal que a solução assumida satisfaça a equação diferencial e as condições iniciais do circuito.

A corrente i não muda a sua forma sendo derivada, isto é, di/dt é um múltiplo de i , assim, a única função que satisfaz esta condição é uma exponencial em t :

$$i(t) = A \exp(st)$$

$$\frac{d}{dt}[A \exp(st)] + \frac{R}{L}[A \exp(st)] = 0$$

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)A\exp(st) = 0$$

Assim, a solução $i(t) = A\exp(st)$ só é válida se $A\exp(st) = 0$ ou se $s + \frac{R}{L} = 0$

1º caso: faz $i(t) = 0$ para todo t , entretanto, $i(0) = I_0$.

2º caso: $s = -\frac{R}{L}$, logo

$$i(t) = A\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

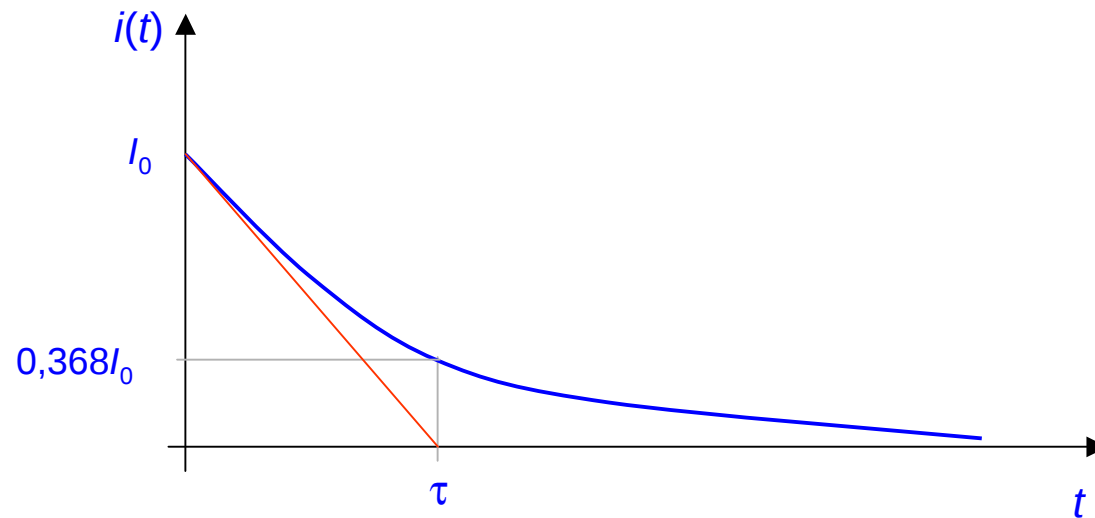
Fazendo $i(0) = I_0$, pode-se obter A : $i(0) = I_0 = A$

A solução então fica:

$$i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

A constante de tempo é então:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad [\text{H}/\Omega] = [(V \cdot s/A)/(V/A)] = [s]$$



Aumentando L aumenta-se τ , entretanto aumentando R diminui-se τ .

Potência instantânea entregue ao resistor:

$$p(t) = Ri^2(t) = RI_0^2 \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)$$

Energia absorvida pelo resistor para $t \rightarrow \infty$ é:

$$\begin{aligned} w(\infty) &= \int_0^\infty p(t)dt \\ &= \int_0^\infty RI_0^2 \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)dt \\ &= -\frac{1}{2}LI_0^2 \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}LI_0^2 \longrightarrow \text{energia armazenada no circuito} \end{aligned}$$

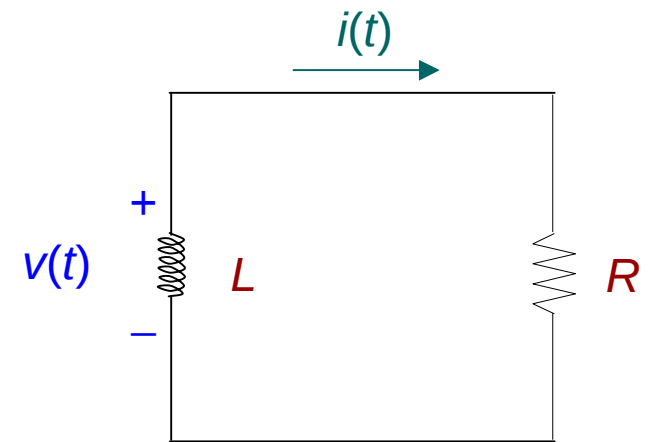
Cálculo da tensão v no indutor, aplicando-se a lei de Kirchhoff de correntes, obtemos:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + i(0) = 0$$

Derivando em t :

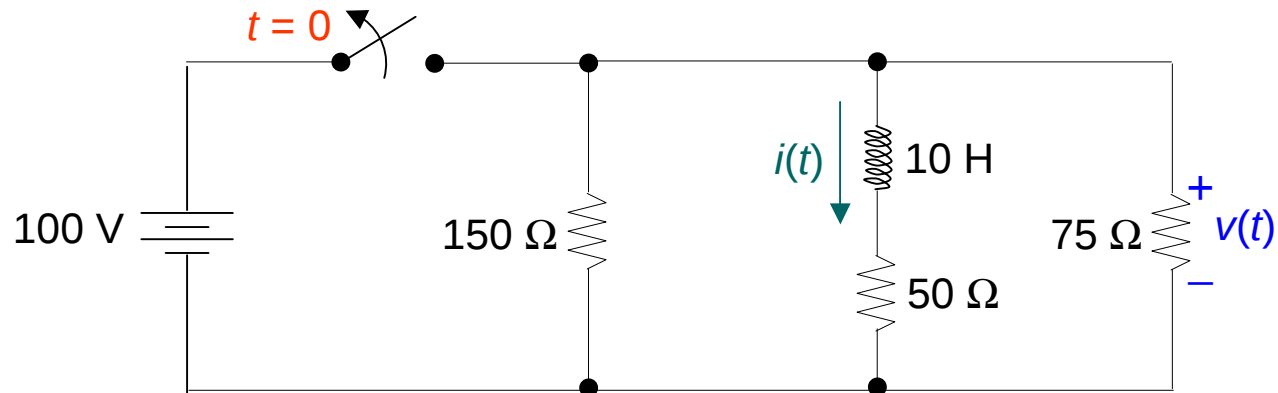
$$\frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L} v = 0$$

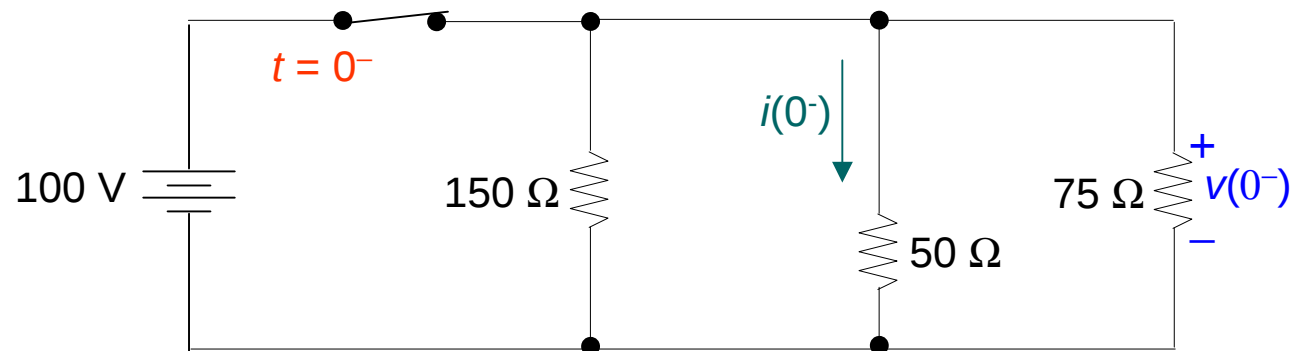


Pode ser resolvida usando um dos métodos anteriores.

Exemplo: Corrente $i(t)$ e tensão $v(t)$ no circuito RL . Circuito em regime permanente cc imediatamente antes da abertura da chave.

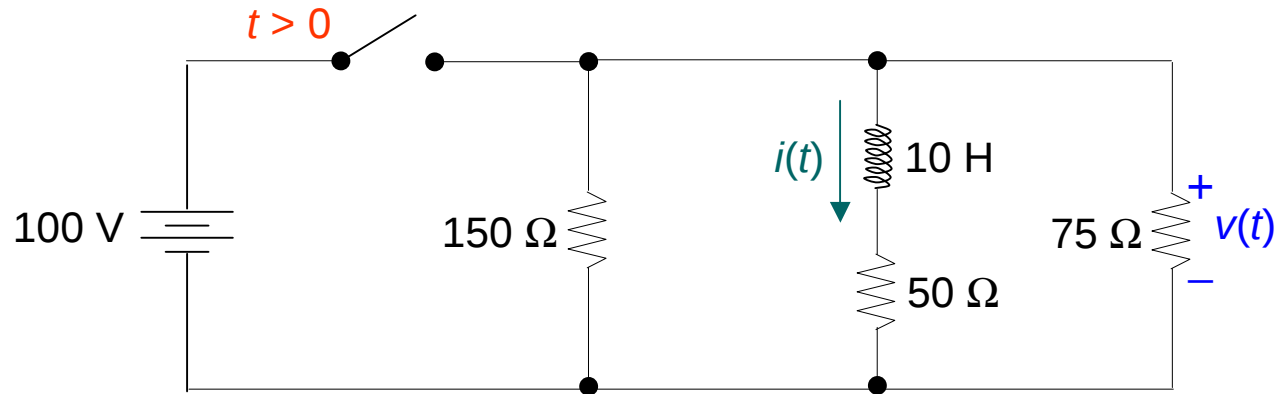


Em $t = 0^-$, chave fechada $\Rightarrow$ indutor é um curto-circuito.

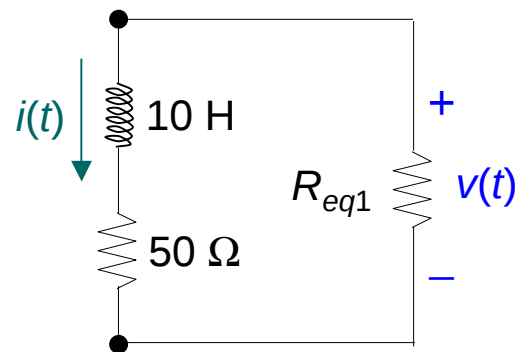


$$i(0^-) = \frac{100}{50} = 2 \text{ [A]}$$

Para $t > 0$, temos:



$$i(0^+) = i(0^-) = 2 \text{ [A]}$$



$$R_{eq1} = \frac{75 \cdot 150}{75 + 150} = 50 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{eq} = 50 + 50 = 100 \text{ } [\Omega]$$

Constante de tempo:

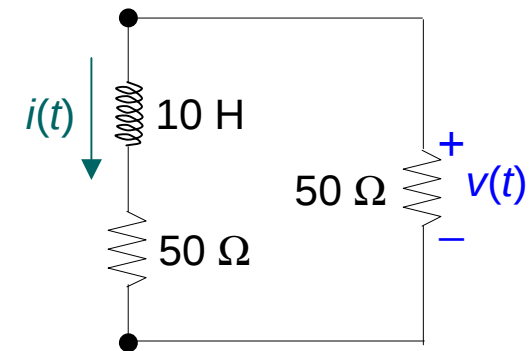
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ [s]}$$

Como $i_0 = i(0^+) = 2 \text{ A}$, temos

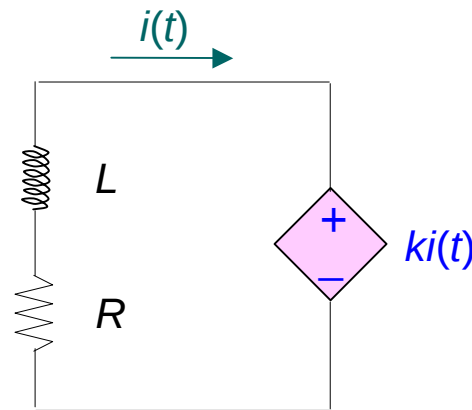
$$i(t) = 2 \exp(-10t) \text{ [A]}$$

A tensão $v(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} v(t) &= 10 \frac{di(t)}{dt} + 50i \\ &= -100 \exp(-10t) \text{ [V]} \end{aligned}$$



Exemplo: Circuito com fonte de tensão dependente.



$$L \frac{di}{dt} + Ri + ki = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{di}{dt} + \left(\frac{R+k}{L} \right) i = 0$$

Resolvendo, obtemos:

$$i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R+k}{L}t\right)$$

Constante de tempo:

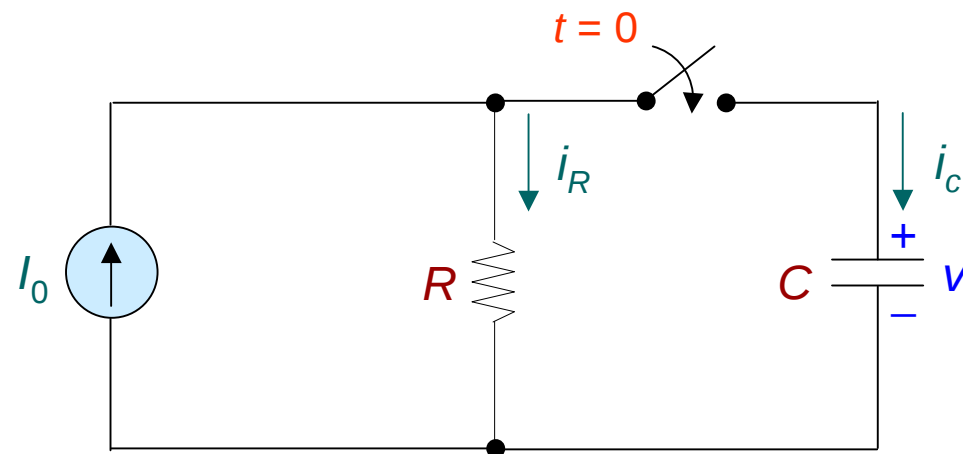
$$\tau = \frac{L}{R+k}$$

A fonte dependente se comporta como um resistor de $k \, \Omega$.

8.4 Resposta a uma Função Excitação Constante

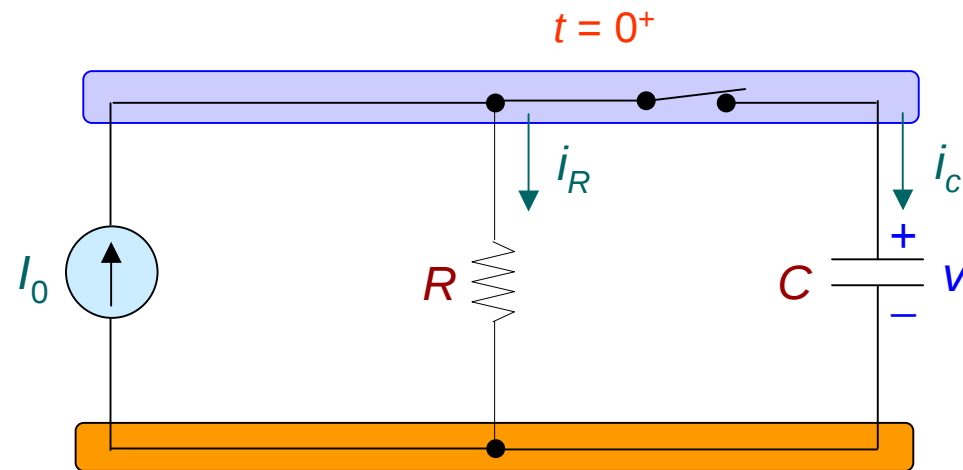
Circuitos que além de uma energia inicial armazenada, são excitados por fontes independentes e constantes de tensão ou de corrente (funções de excitação).

Resposta deste circuitos consiste de duas partes, onde uma delas é sempre uma constante.



Capacitor: $v(0^-) = V_0$

Para $t > 0$, a chave é fechada:



Capacitor: $v(0^+) = v(0^-) = V_0$

E a equação nodal no nó superior fica:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = I_0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{I_0}{C}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{I_0}{C}$$

Resolvendo pelo método de separação de variáveis:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v - RI_0}{RC} \quad \left(\times \frac{dt}{v - RI_0} \right)$$

$$\frac{1}{v - RI_0} dv = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int \frac{1}{v - RI_0} dv = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\ln(v - RI_0) = -\frac{t}{RC} + K$$

$$v - RI_0 = \exp\left(-\frac{t}{RC} + K\right)$$

$$v = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + RI_0$$

Determinada pelas
condições iniciais do
circuito



$$A = \exp(K)$$

A solução geral

$$v = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + RI_0$$

possui duas partes:

- uma função exponencial idêntica a da resposta natural de circuitos RC sem fontes (resposta natural v_n).
- uma função constante, dada por RI_0 , devida integralmente à função de excitação (resposta forçada v_f).

Com o passar do tempo a resposta natural desaparece e a solução fica simplesmente RI_0 .

resposta natural $v_n \Rightarrow$ resposta homogênea v_h

resposta forçada $v_f \Rightarrow$ resposta particular v_p

Constante A :

Valor de A deve ser escolhido de forma a satisfazer a condição de tensão inicial.

Em $t = 0^+$: $v(0^+) = v(0^-) = V_0$

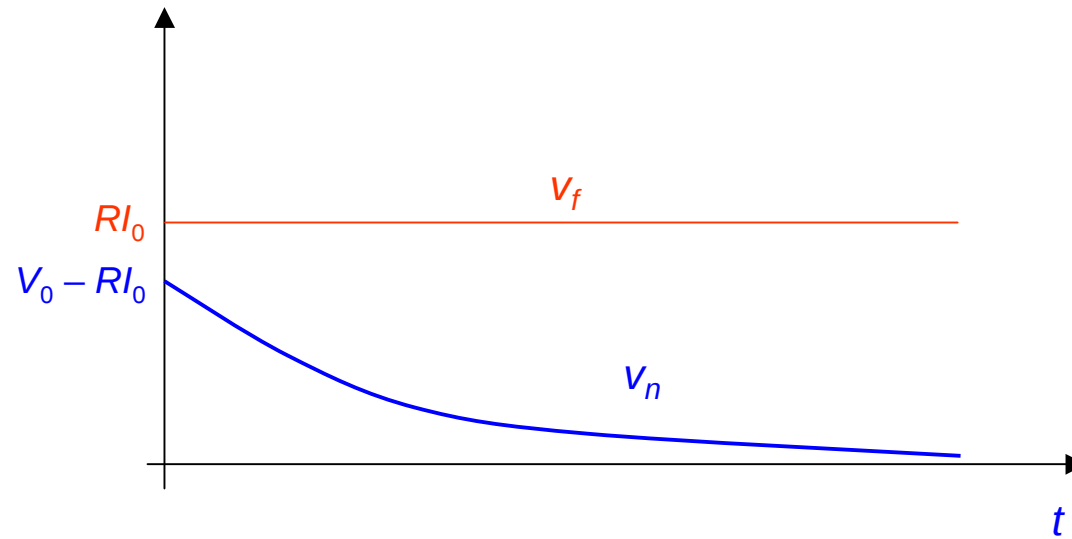
Portanto, em $t = 0^+$, $v = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + RI_0$ requer que

$$V_0 = A + RI_0 \longrightarrow A = V_0 - RI_0$$

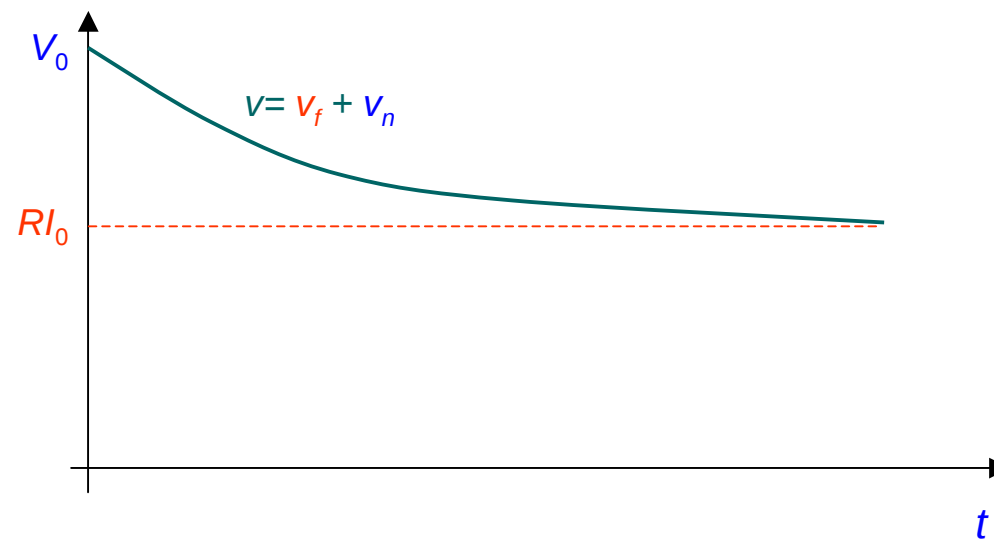
substituindo na solução temos

$$v = (V_0 - RI_0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + RI_0$$

Resposta natural v_n para $V_0 - RI_0 > 0$ e a resposta forçada v_f :



Resposta completa v :

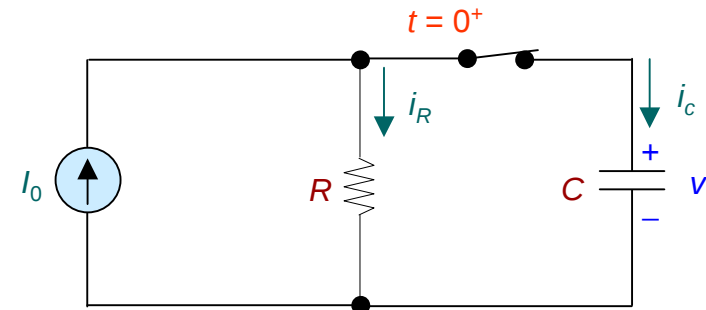


Corrente no capacitor para $t > 0$:

$$i_c = C \frac{dv}{dt} = -\frac{V_0 - RI_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Corrente no resistor para $t > 0$:

$$i_R = I_0 - i_c = I_0 + \frac{V_0 - RI_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$



Tensão no resistor muda abruptamente de RI_0 em $t = 0^-$ para V_0 em $t = 0^+$.

Tensão no capacitor é contínua.

Resposta transitória:

porção da resposta completa que tende a zero com o aumento do tempo.

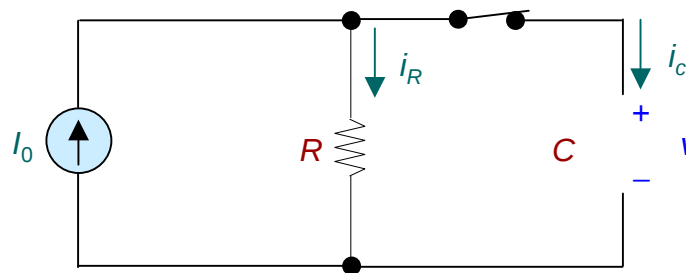
Resposta em regime permanente: porção da resposta completa que permanece após a resposta transitória ter se anulado.

No exemplo: resposta transitória = resposta natural

resposta em regime permanente = resposta forçada

Valores cc que constituem a condição e o estado permanente cc: $v = RI_0$, $i_c = 0$

e $i_R = I_0$



Não se deve concluir, entretanto, que as respostas natural e forçada serão sempre iguais às respostas transitória e em regime permanente, respectivamente.

8.5 Caso Geral

Expressão geral:

$$\frac{dy}{dt} + Py = Q$$

y = variável e P e Q = constantes

Solução pelo **método do fator de integração**, que consiste em multiplicar a equação por um fator que torna seu lado esquerdo uma derivada perfeita e então integrar ambos os lados.

Derivada de um produto: $\frac{d}{dt}(ye^{Pt}) = \frac{dy}{dt}e^{Pt} + Pye^{Pt}$

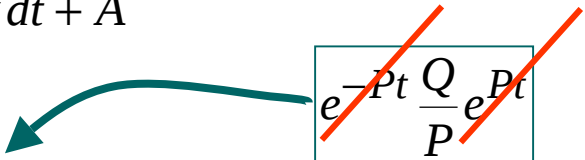
$$= \left(\frac{dy}{dt} + Py \right) e^{Pt}$$

fazendo $\frac{dy}{dt} + Py = Q \quad (\times e^{Pt}) \longrightarrow \left(\frac{dy}{dt} + Py \right) e^{Pt} = Qe^{Pt} \longrightarrow \frac{d}{dt}(ye^{Pt}) = Qe^{Pt}$

integrar ambos os lados

$$\int \frac{d}{dt} (ye^{Pt}) dt = \int Qe^{Pt} dt$$

$$ye^{Pt} = \int Qe^{Pt} dt + A$$

$$y = e^{-Pt} \int Qe^{Pt} dt + Ae^{-Pt}$$


No caso de cc onde Q é uma constante, temos:

$$y = Ae^{-Pt} + \frac{Q}{P}$$

onde

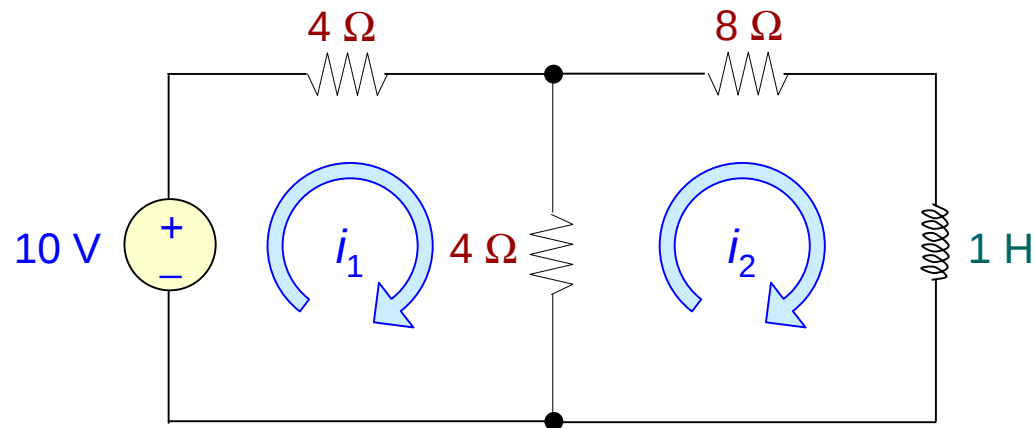
$$y_n = Ae^{-Pt}$$

$$y_f = \frac{Q}{P}$$

$$y = y_n + y_f$$

Note que $1/P$ é a constante de tempo da resposta natural

Exemplo: Calcular i_2 para $t > 0$, dado que $i_2(0) = 1$ A:



$$8i_1 - 4i_2 = 10 \quad -4i_1 + 12i_2 + 1 \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$\frac{di_2}{dt} + 10i_2 = 5$$

$$\frac{dy}{dt} + Py = Q$$

$$y = Ae^{-Pt} + \frac{Q}{P}$$

$P = 10$, $Q = 5$, logo $i_2 = Ae^{-10t} + \frac{1}{2}$ para $i_2(0) = 1$, temos $1 = Ae^{-10 \cdot 0} + \frac{1}{2}$

portanto, $A = 1/2$. Assim, a solução é dada por: $i_2 = \frac{1}{2}e^{-10t} + \frac{1}{2}$

Também pode-se obter $y = Ae^{-Pt} + \frac{Q}{P} = y_n + y_f$ para o caso de $Q = \text{constante}$, através da observação de

$$\frac{dy}{dt} + Py = Q$$

$$y = e^{-Pt} \int Qe^{Pt} dt + Ae^{-Pt}$$

A resposta natural satisfaz

$$\frac{dy}{dt} + Py = 0 \longrightarrow y_n = Ae^{st}$$

que resulta em $s + P = 0 \longrightarrow s = -P$

$$y_n = Ae^{-Pt}$$

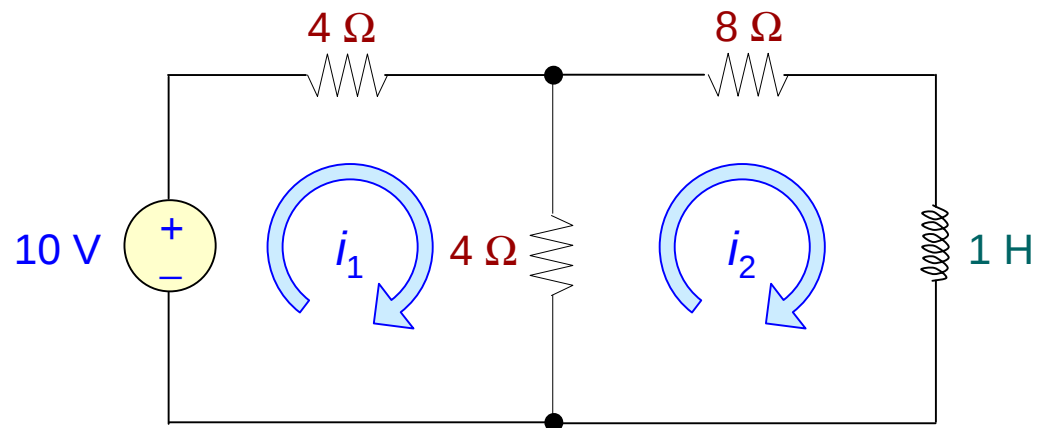
Resposta forçada: $y_f = K$

que substituindo em $\frac{dy}{dt} + Py = Q$ resulta em $0 + PK = Q$ ou $y_f = K = \frac{Q}{P}$

8.6 Procedimento Simplificado

Obtenção dos valores de correntes e tensões de circuitos, sem fontes dependentes, pela formulação da solução através de inspeção do circuito.

Exemplo: $i_2(0) = 1 \text{ [A]}$



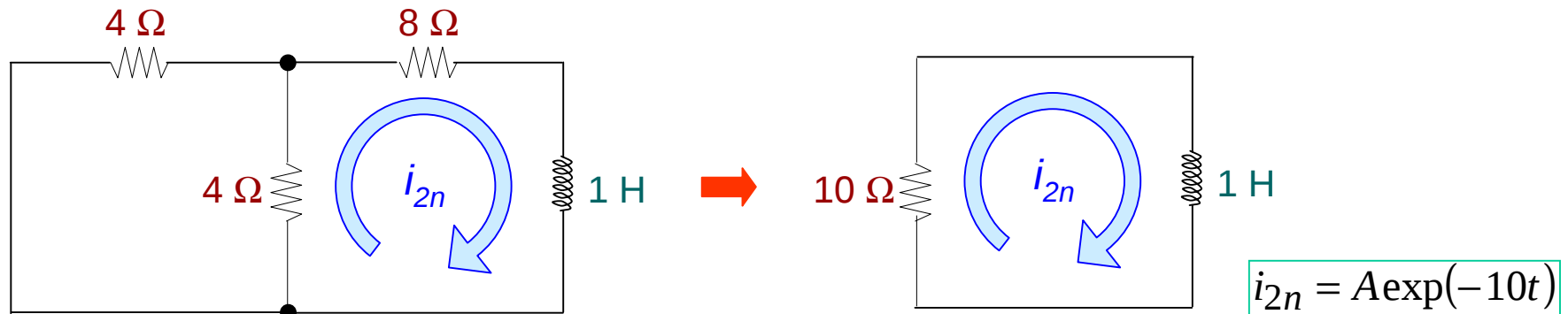
sabemos que: $i_2 = i_{2n} + i_{2f}$

i_{2n} = resposta natural = mesma forma que a resposta sem fontes.

i_{2f} = resposta forçada = constante.

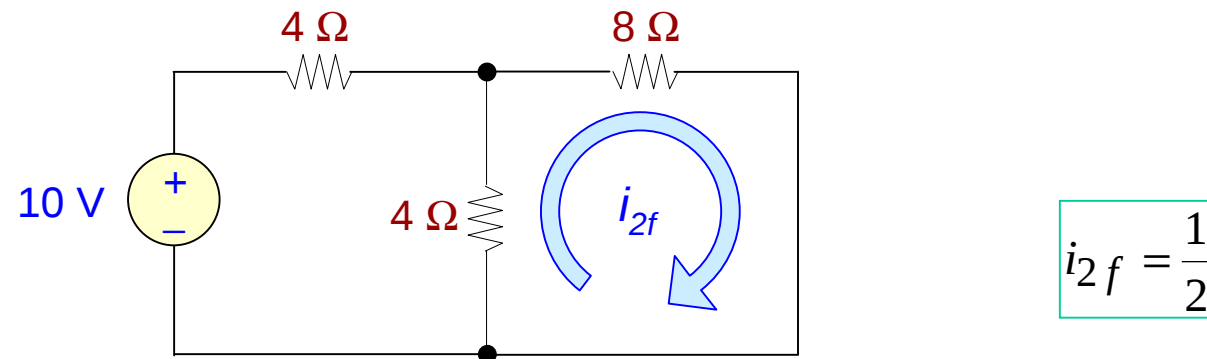
Resposta natural: i_{2n}

Pode-se ver a rede sem função excitação (fonte de 10 V é curto-circuitada):



Resposta forçada: i_{2f}

Olhando o circuito quando $i_{2n} = 0$, nesta hora o indutor é um curto, onde



Portanto,

$$i_2 = i_{2n} + i_{2f} = A \exp(-10t) + \frac{1}{2}$$

A constante A é determinada a partir da condição inicial $i_2(0) = 1$:

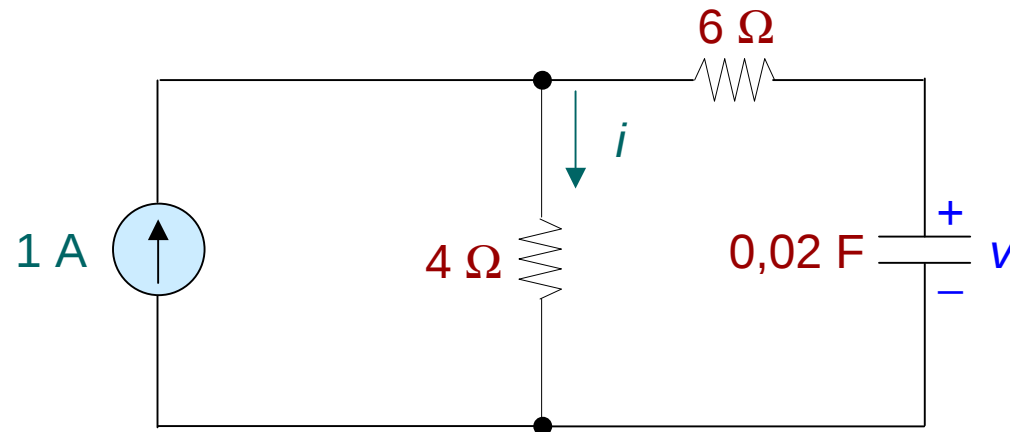
$$1 = Ae^{-10 \cdot 0} + \frac{1}{2}$$

portanto, $A = 1/2$. Assim, a solução é dada por:

$$i_2 = \frac{1}{2} \exp(-10t) + \frac{1}{2}$$

Obs.: O cálculo de A deve ser feito **sempre** aplicando a condição inicial à resposta completa.

Exemplo: Cálculo de i para $t > 0$, dado que $v(0) = 24 \text{ V}$



$$i = i_n + i_f$$

i_n possui a mesma forma de v_n , a resposta natural da tensão sobre o capacitor.

A resposta natural de cada corrente ou tensão no circuito tem a mesma forma de v_n , uma vez que nenhuma operação (adição, subtração, diferenciação ou integração) altera a natureza da exponencial $\exp(-t/\tau)$.

Constante de tempo no capacitor: $\tau = 0,2 \text{ s}$, portanto $i_n = A \exp(-5t)$

Regime permanente $\Rightarrow$ capacitor = circuito aberto

resposta forçada, por inspeção:

$$i_f = 1 \text{ [A]}$$

Portanto,

$$i(t) = A \exp(-5t) + 1$$

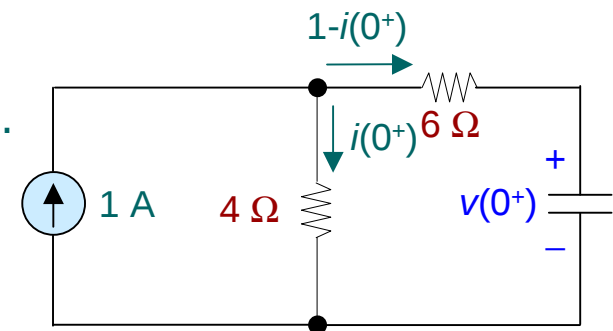
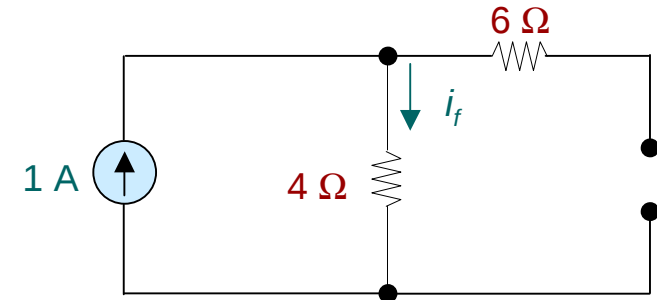
Para avaliar o valor de A , precisamos encontrar $i(0^+)$.

Para $t = 0^+$, temos $v(0) = v(0^+) = 24 \text{ V}$

Somando as tensões ao redor da malha direita, temos:

$$-4i(0^+) + 6[1 - i(0^+)] + 24 = 0$$

$$i(0^+) = 3$$



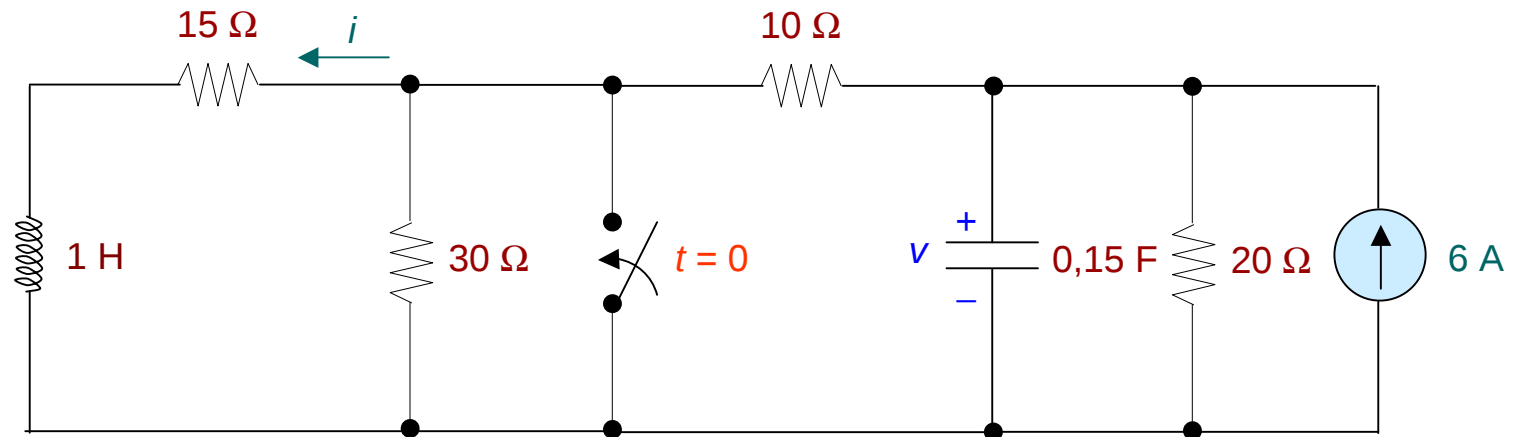
Substituindo esta corrente inicial na solução $i(t) = A\exp(-5t) + 1$, temos:

$$3 = A + 1$$

Portanto, $A = 2$ e

$$i = 1 + 2\exp(-5t) \quad [\text{A}]$$

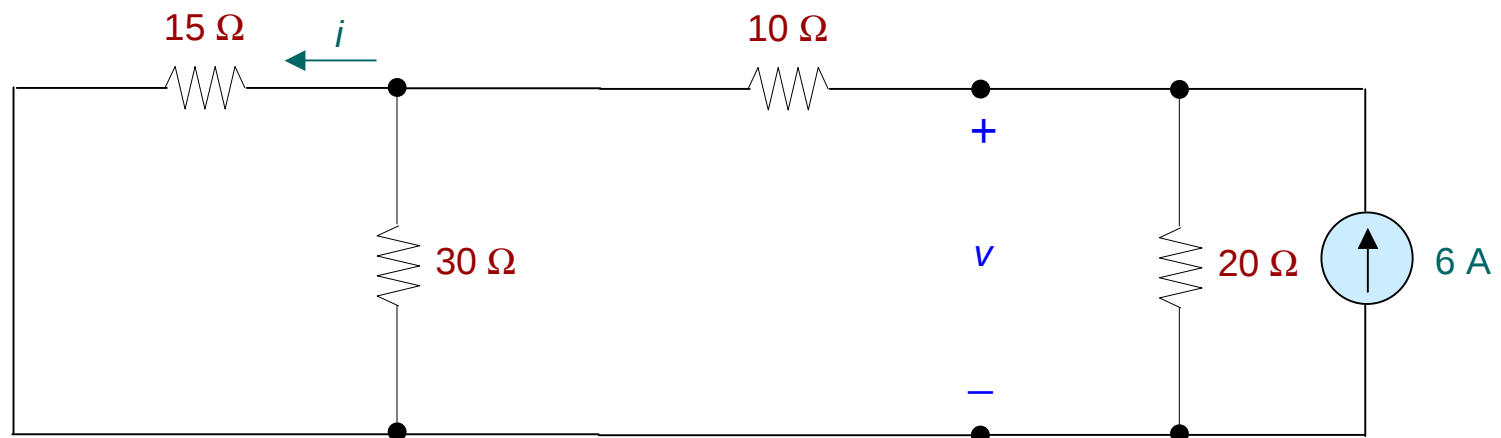
Exemplo: Determinar i e v .



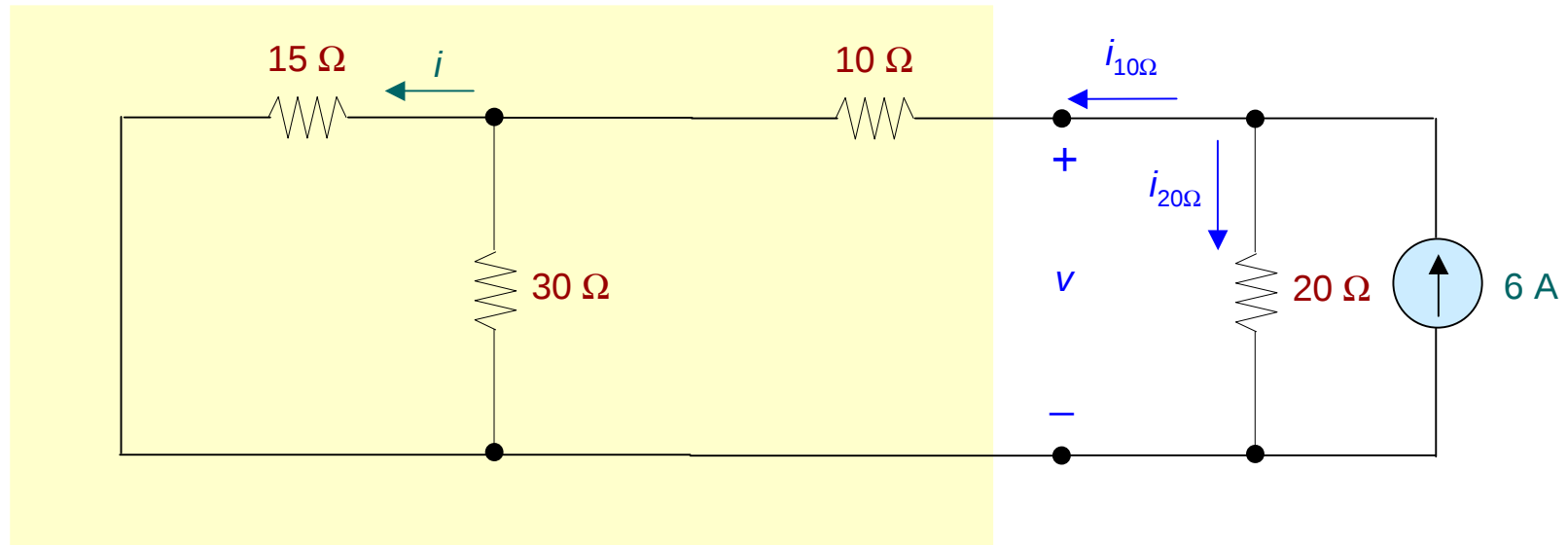
Circuito em regime permanente cc em $t = 0^-$ com a chave aberta.

Indutor = curto $\Rightarrow i_{\text{indutor}} = i_{15\Omega} = i$

Capacitor = aberto $\Rightarrow v = v_{20\Omega}$



Por divisão de corrente,



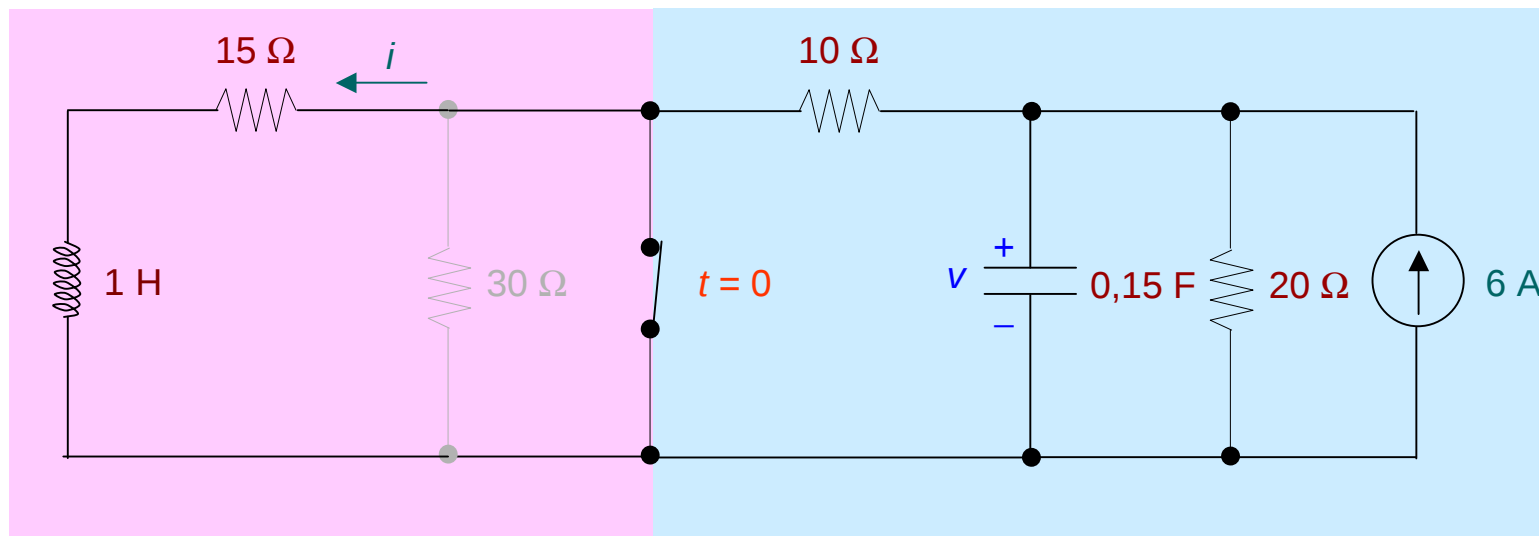
$$R_{eq} = 10 + \frac{15 \cdot 30}{15 + 30} = 20 \Omega$$

$$i_{10\Omega} = 6 \cdot \frac{20}{20 + 20} = 3 \text{ [A]} \quad \longrightarrow \quad i = 3 \cdot \frac{30}{15 + 30} = 2 \text{ [A]}$$

$$\text{Portanto, } i = 2 \text{ A e } i_{20\Omega} = 3 \text{ A} \quad \longrightarrow \quad v = 20 \times 3 = 60 \text{ V}$$

Então, $i(0^-) = 2 \text{ A}$ e $v(0^-) = 60 \text{ V}$

Quando a chave é fechada em $t = 0$, temos:



Rede RL sem fontes:

$$i(0^+) = i(0^-) = 2 \text{ A.}$$

$$i = 2 \exp(-15t) \text{ [A]}$$

Rede RC excitada com:

$$v(0^+) = v(0^-) = 60 \text{ V}$$

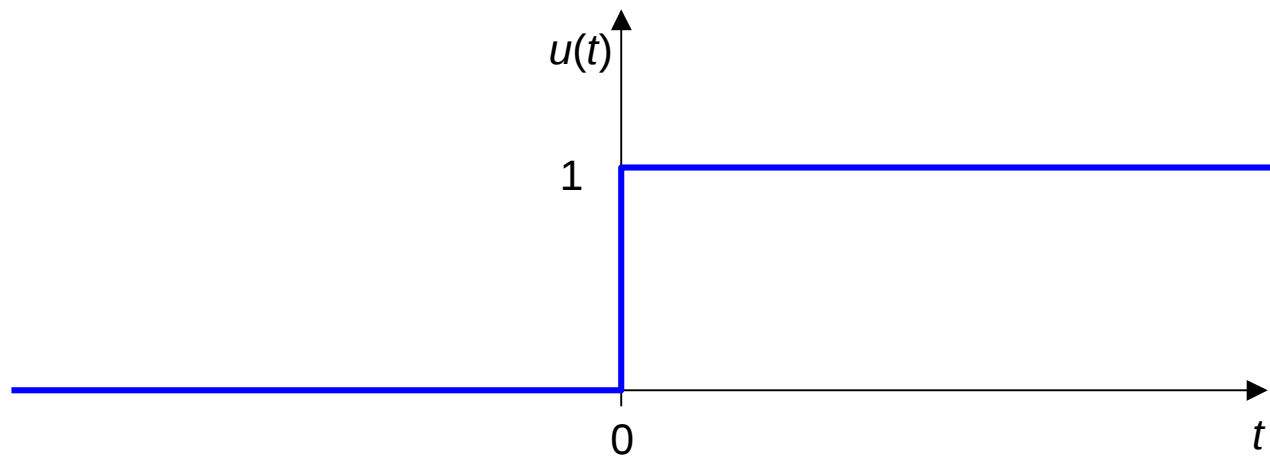
$$v = 40 + 20 \exp(-t) \text{ [V]}$$

8.7 Função Degrau Unitário

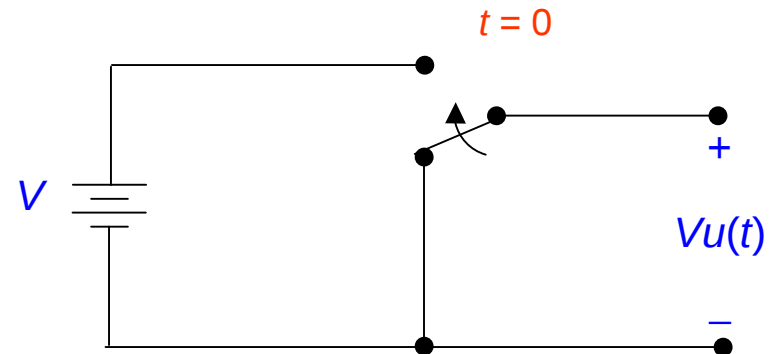
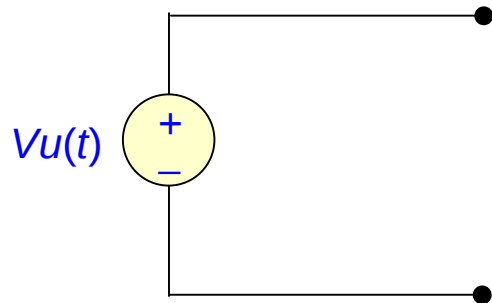
Funções singulares: funções de excitação que mudam seus valores abruptamente.

Função degrau unitário:

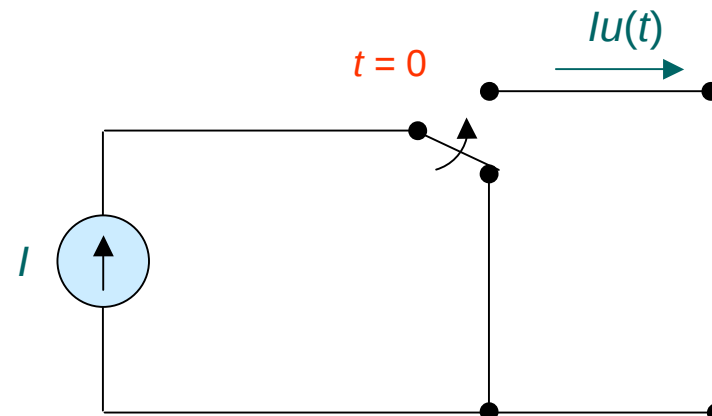
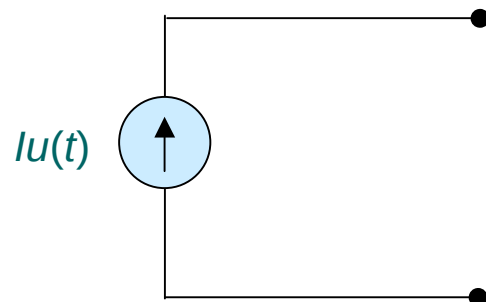
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Fonte de degrau de tensão de V volts:

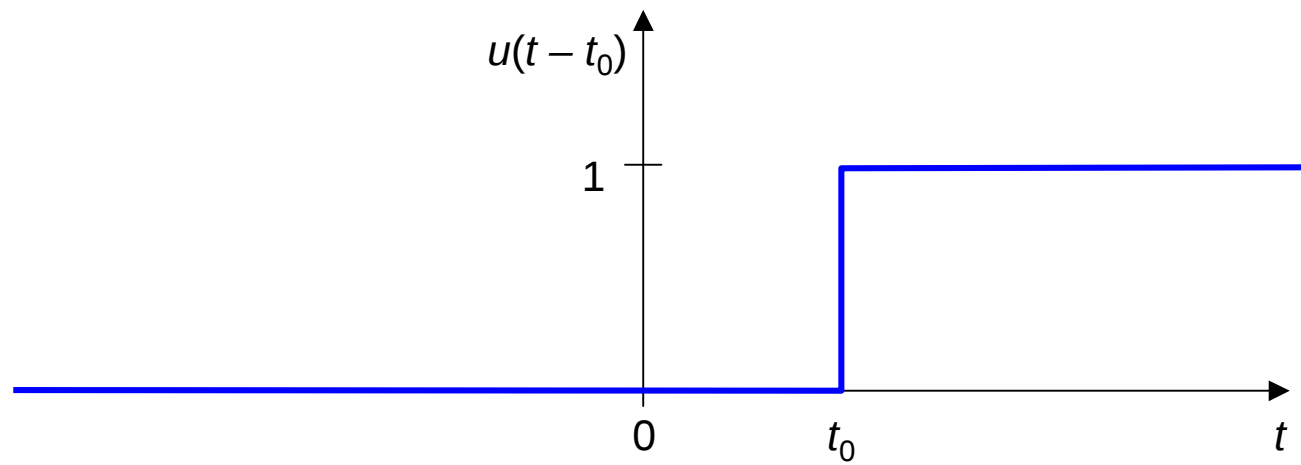


Fonte degrau de corrente de I ampères:

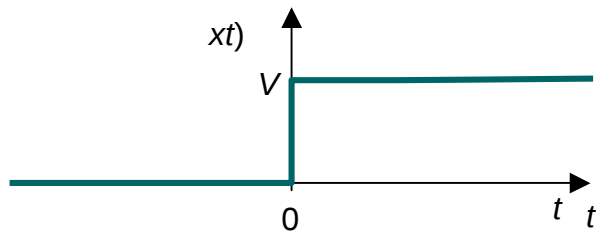
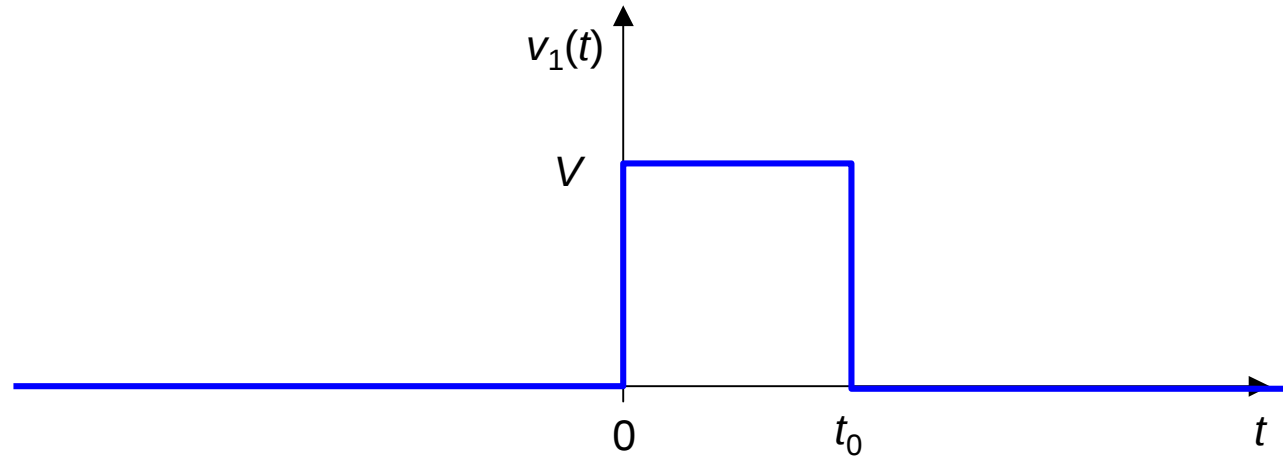


Generalização da função degrau unitário para $t = t_0$:

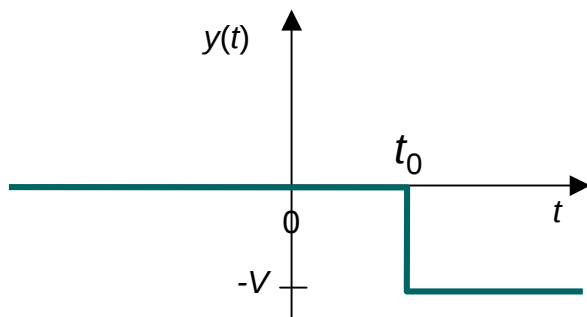
$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



Exemplo: Pulso retangular

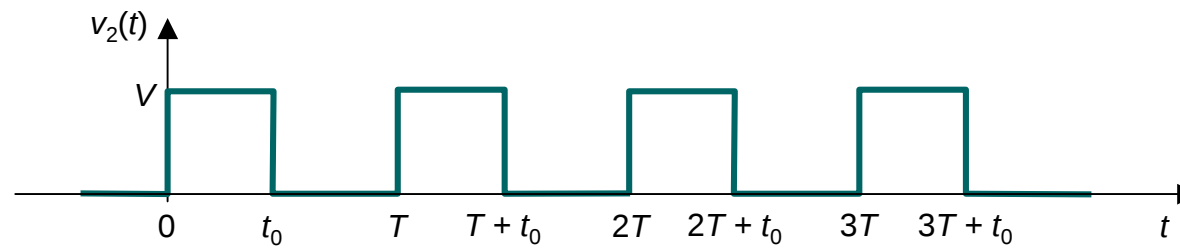


$$v_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 < t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$



$$v_1(t) = V[u(t) - u(t - t_0)]$$

Exemplo: Trem de pulsos retangulares



$$v_2(t) = V \sum_{n=0}^{\infty} [u(t - nT) - u(t - nT - t_0)]$$

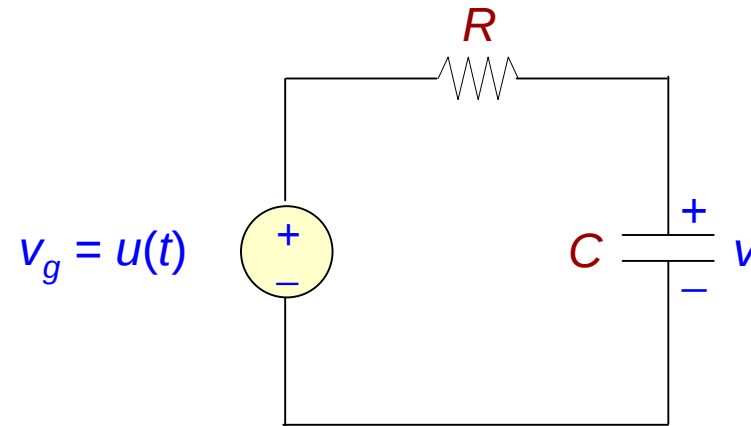
8.8 Resposta ao Degrau

É a resposta de um circuito tendo somente uma entrada, que é a função degrau unitário (tensão ou corrente).

Não existem energias iniciais presentes nos elementos do circuito.

Todas as tensões ou correntes no circuito são zero em $t = 0^-$.

Exemplo: Resposta v ao degrau no circuito RC .



Aplicando Lei de Kirchhoff de correntes:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - v_g}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v - u(t)}{RC} = 0$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{1}{RC} u(t)}$$

Para $t < 0$, temos $u(t) = 0$, logo

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad \longrightarrow \quad v = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Aplicando a condição inicial $v(0^-) = 0$, obtemos $A = 0$ e portanto $v(t) = 0$

Para $t > 0$, temos $u(t) = 1$, logo

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{1}{RC} u(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{1}{RC}$$

$$v = v_n + v_f$$

$$v_n = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad v_f = 1$$

$$v = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + 1$$

Aplicando a condição inicial $v(0^+) = v(0^-) = 0$, obtemos $A = -1$ e portanto para $t > 0$, temos:

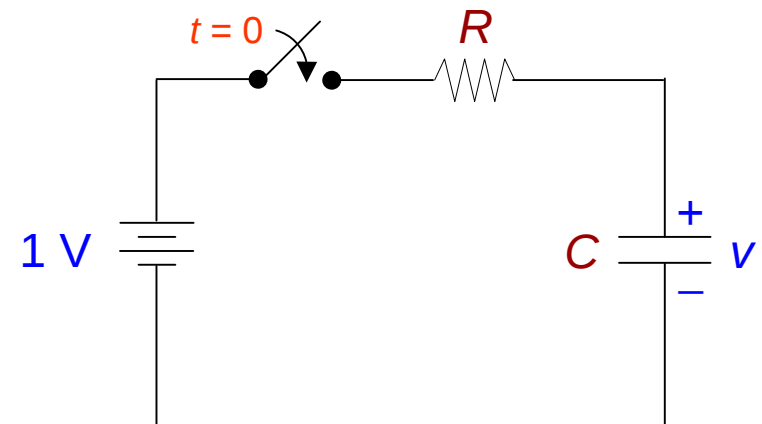
$$v(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Para todo t , temos:

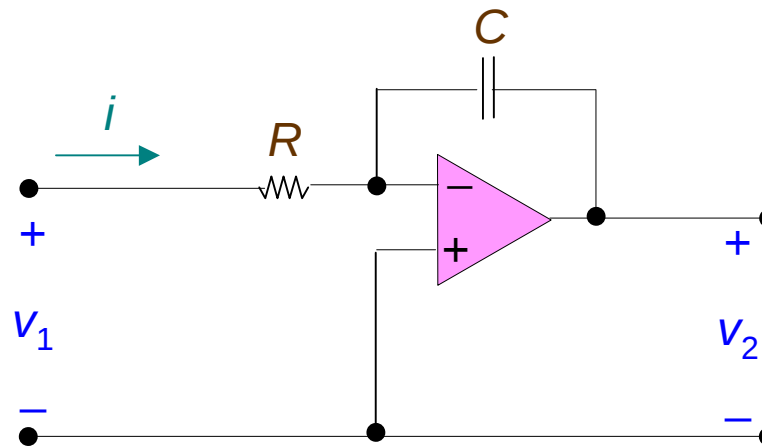
$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) & t > 0 \end{cases}$$

$$v(t) = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] u(t)$$

Circuito equivalente, com $v(0^-) = 0$ para $t < 0$:



Exemplo: Resposta v_2 ao degrau no circuito RC + op-amp.



Equação nodal: $\frac{v_1}{R} + C \frac{dv_2}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC} v_1 \longrightarrow v_2 = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_1 dt + v_2(0^+)$

$v_2(t)$ é proporcional à integral de $v_1(t)$ se $v_2(0^+) = 0$: $v_2 = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_1 dt$

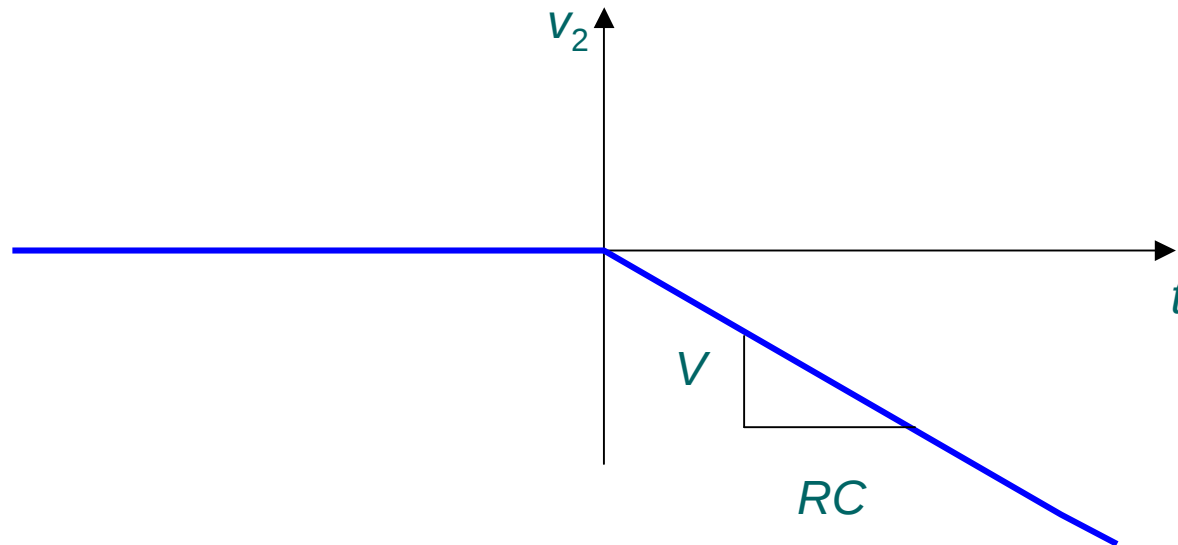
Circuito integrador.

Seja $v_1 = Vu(t)$, então $v_2(0^+) = v_2(0^-) = 0$, Portanto,

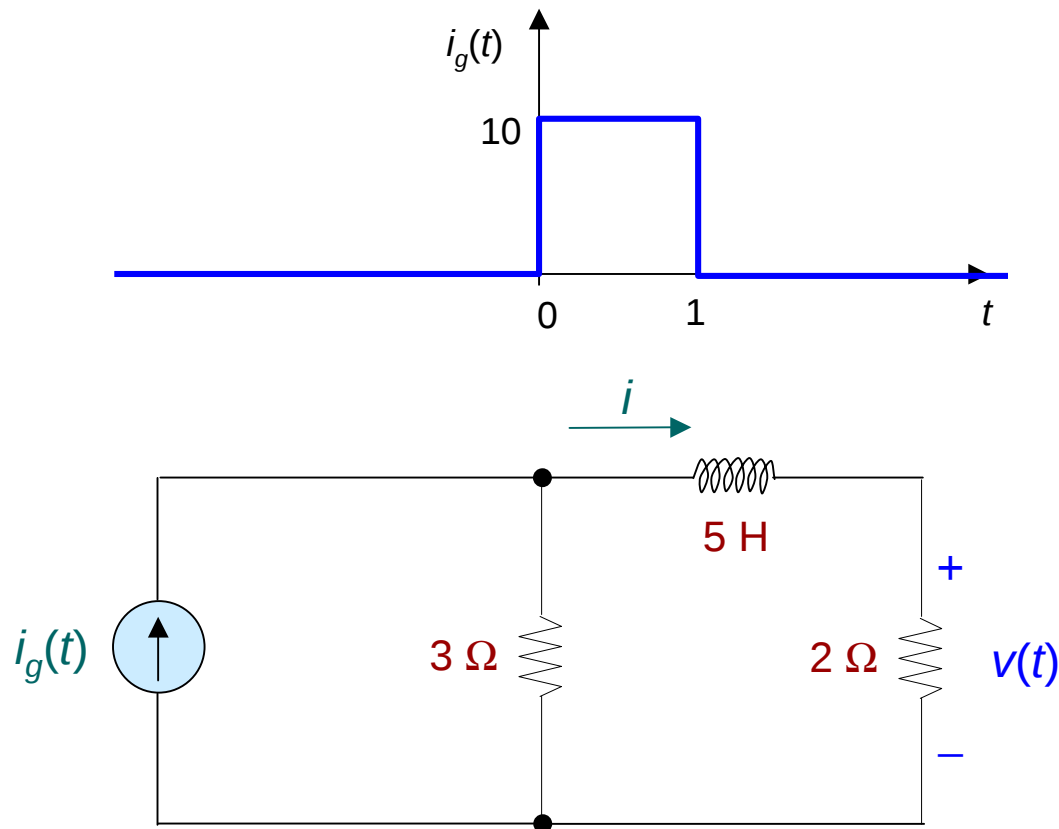
$$v_2(t) = -\frac{V}{RC} \int_{0^+}^t u(t) dt$$

Se $t < 0$, então $u(t) = 0$ e $v_2(t) = 0$.

Para $t > 0$, então $u(t) = 1$ e $v_2(t) = -\frac{V}{RC} t u(t)$ ← função rampa



Exemplo: Cálculo da tensão $v(t)$, dado que $i(0^-) = 0$ e que a função de excitação é $i_g(t) = 10[u(t) - u(t-1)]$ [A]



No instante $t = 1$ s, $i_g(t)$ torna-se zero e a resposta é simplesmente a resposta sem fontes.

Solução do problema envolve o cálculo da resposta do circuito ao degrau para $t < 1$ [s] para, em seguida, calcular a resposta sem fontes para $t > 1$ [s].

Resposta ao degrau é da forma: $v = v_n + v_f$

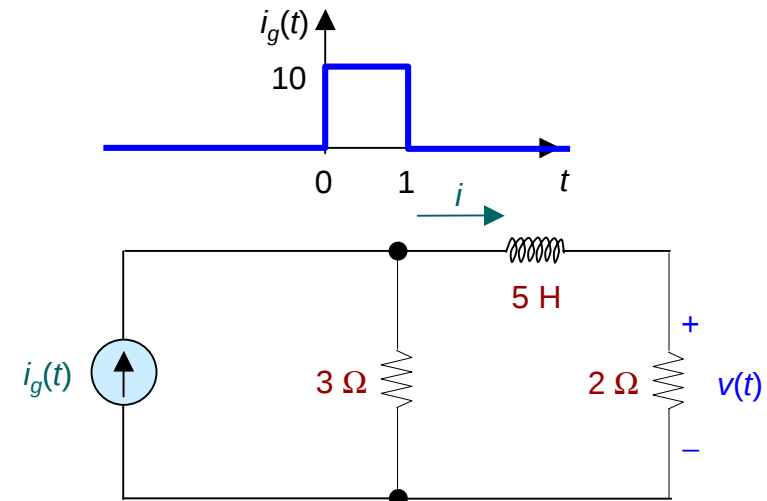
$$v_n = A \exp\left(-\frac{R_{eq}}{L}t\right) = A \exp\left(-\frac{5}{5}t\right) = A \exp(-t)$$

$$v_f = 2 \left[\frac{3 \cdot 10}{2 + 3} \right] = 12 \quad (\text{por divisão de corrente e lei de Ohm})$$

$$v = A \exp(-t) + 12$$

Como $i(0^+) = i(0^-) = 0$, então $v(0^+) = v(0^-) = 0 \rightarrow A = -12$

$$v = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 12[1 - \exp(-t)] & 0 < t < 1 \end{cases}$$



Para $t > 1$, temos:

$$v = B \exp(-t)$$

Em $t = 1^-$, temos:

$$v(1^-) = 12[1 - \exp(-1)]$$

como a corrente no indutor é contínua, $v(1^-) = v(1^+)$.

$$v(1^+) = B \exp(-1) = 12[1 - \exp(-1)]$$

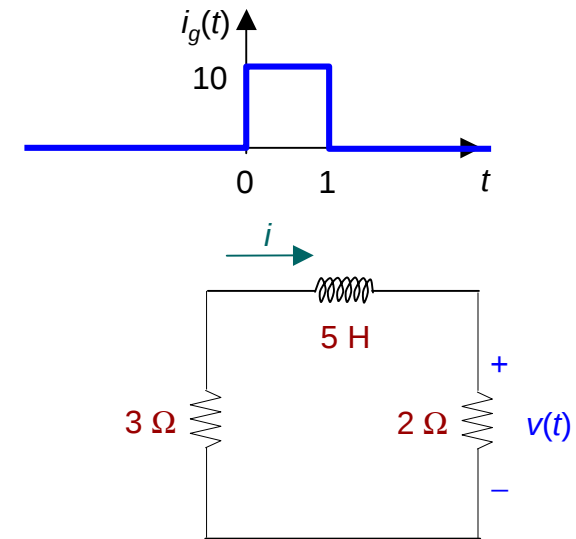
$$B = \frac{12[1 - \exp(-1)]}{\exp(-1)} = 12[1 - \exp(-1)]\exp(1)$$

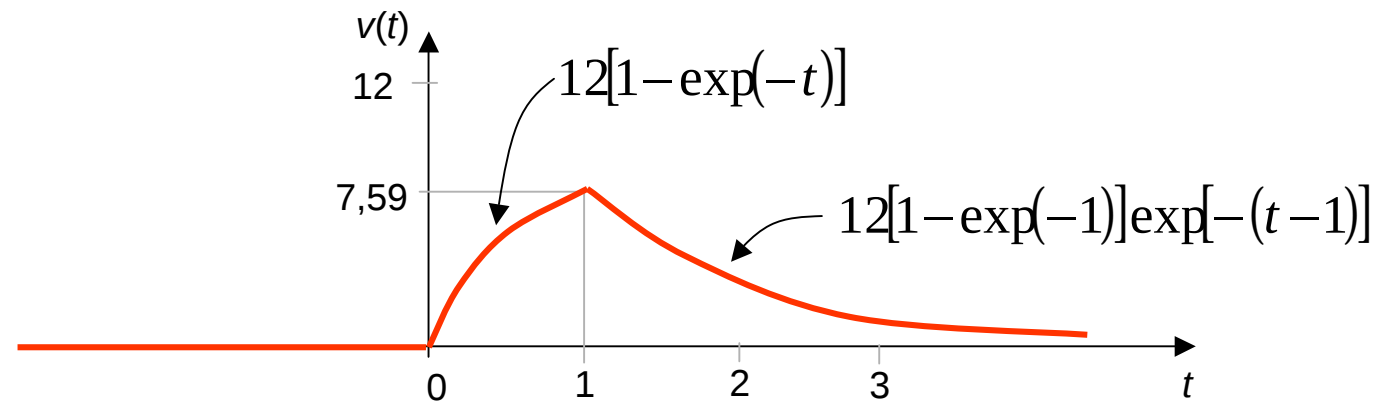
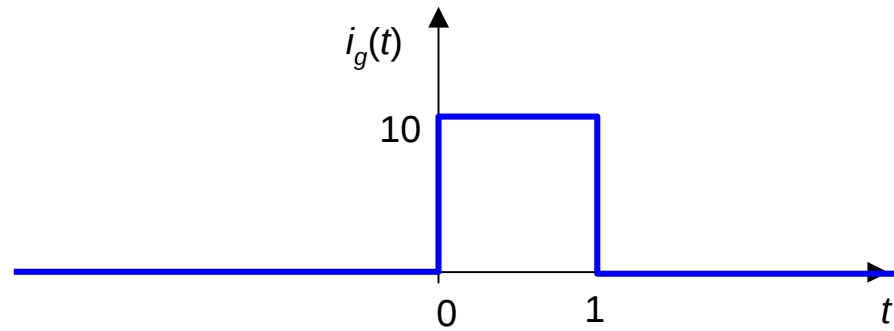
Solução para $t > 1$:

$$v = 12[1 - \exp(-1)]\exp[-(t-1)] \quad t > 1$$

Solução para todo t :

$$v = 12[1 - \exp(-t)][u(t) - u(t-1)] + 12[1 - \exp(-1)]\exp[-(t-1)]u(t-1)$$

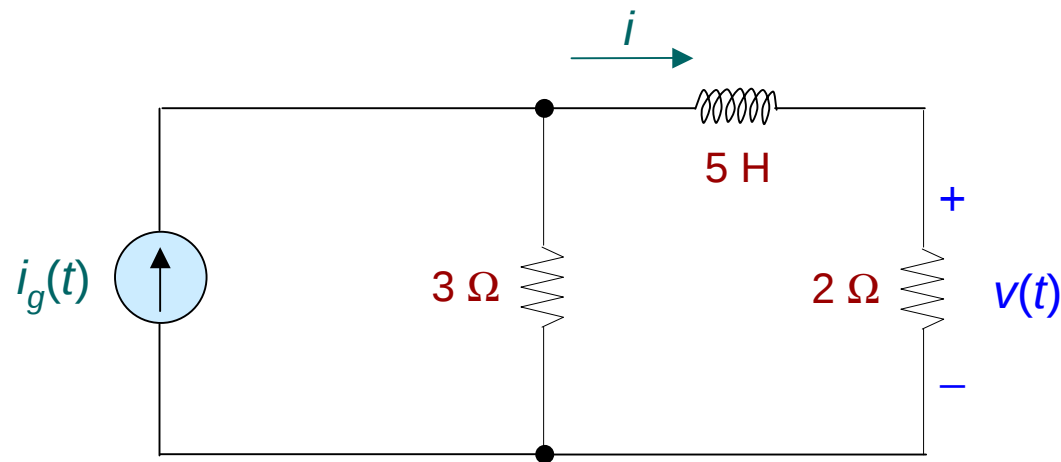




8.9 Aplicação da Superposição

Aplicação da superposição para a obtenção de soluções de circuitos RC e RL .

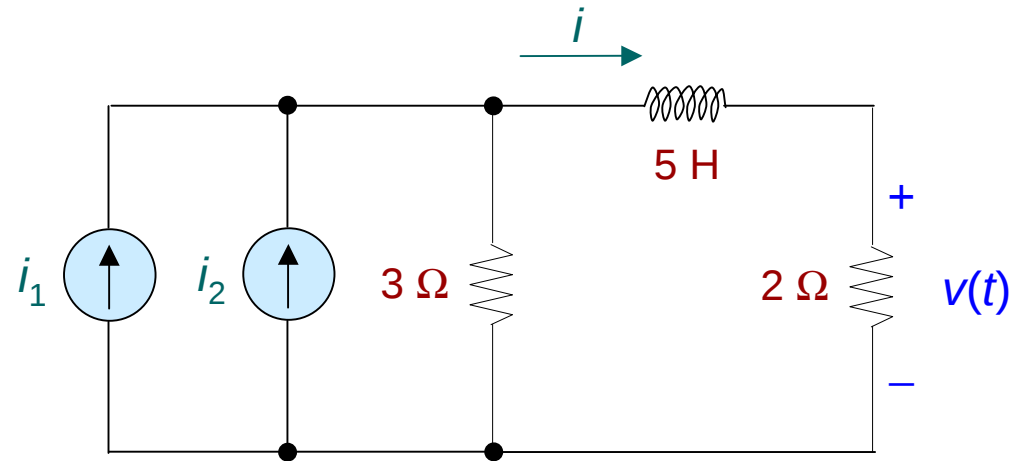
Exemplo:



$$i_g = 10u(t) - 10u(t-1) \longleftrightarrow i_g = i_1 + i_2$$

$$i_1 = 10u(t)$$

$$i_2 = -10u(t-1)$$



Pelo princípio de superposição, temos como saída: $v = v_1 + v_2$

Resposta devida ao degrau de corrente i_1 : $v_1 = 12[1 - \exp(-t)]u(t)$

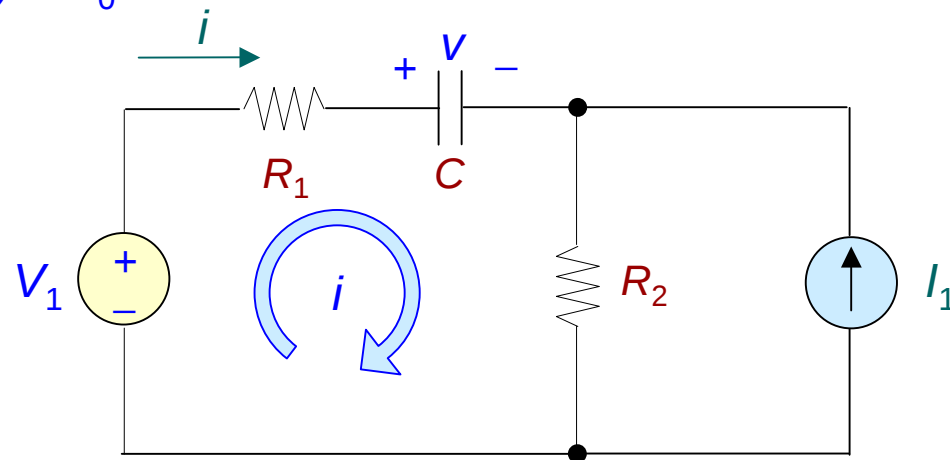
Resposta devida ao degrau de corrente i_2 : i_2 é o negativo de i_1 atrasado de 1 s , isto é,

$$v_2 = -12[1 - \exp[-(t-1)]]u(t-1)$$

Solução geral:

$$v = 12[1 - \exp(-t)]u(t) - 12[1 - \exp[-(t-1)]]u(t-1)$$

Exemplo: Circuito com duas fontes independentes, tensão inicial sobre o capacitor $v(0) = V_0$.



Aplicando Lei de Kirchhoff de tensões na malha esquerda:

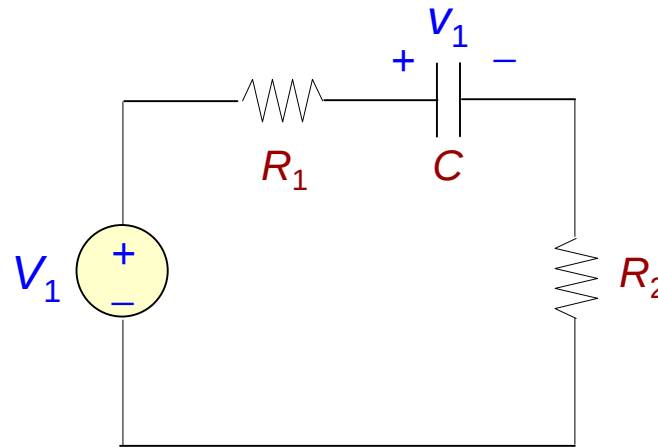
$$(R_1 + R_2)i + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + V_0 = V_1 - R_2 I_1 \quad (\times K)$$

$$(R_1 + R_2)(Ki) + \frac{1}{C} \int_0^t (Ki) dt + KV_0 = KV_1 - R_2(KI_1)$$

Note que a resposta de corrente torna-se Ki quando as fontes e a tensão inicial do capacitor são multiplicadas por K (propriedade da proporcionalidade)

Empregando o princípio da sobreposição para a determinação de v :

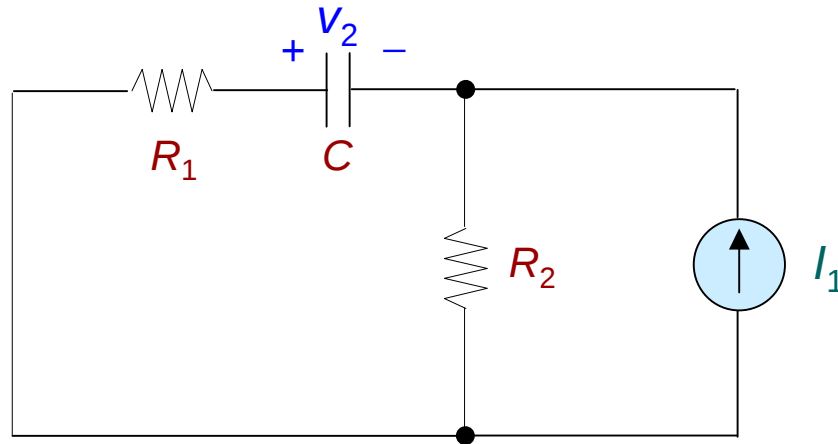
Tensão sobre o capacitor devida somente à fonte de tensão:



Tensão inicial sobre o capacitor $v_1(0) = 0$, então

$$v_1 = V_1 \left[1 - \exp \left(- \frac{t}{(R_1 + R_2)C} \right) \right]$$

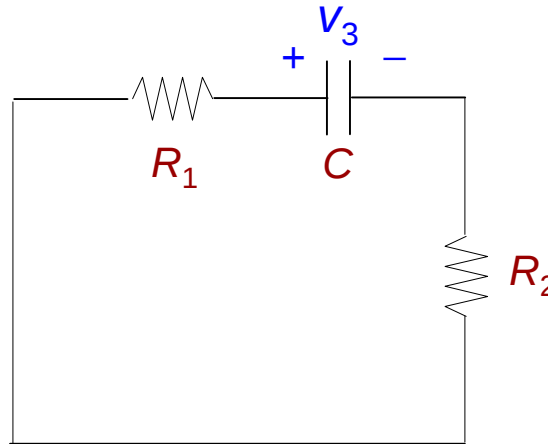
Tensão sobre o capacitor devida somente à fonte de corrente:



Tensão inicial sobre o capacitor $v_2(0) = 0$, então

$$v_2 = -R_2 I_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C} \right) \right]$$

Tensão sobre o capacitor sem a presença das fontes:



Tensão inicial sobre o capacitor $v_3(0) = V_0$, então

$$v_3 = V_0 \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}\right)$$

Resposta completa: $v = v_1 + v_2 + v_3$

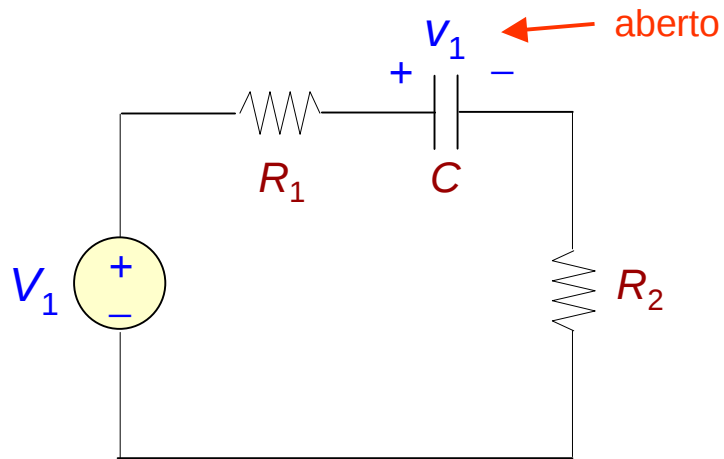
$$v = V_1 \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C} \right) \right] - R_2 I_1 \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C} \right) \right] + V_0 \exp \left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C} \right)$$

$$v = V_1 - R_2 I_1 - (V_1 - R_2 I_1 - V_0) \exp \left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C} \right)$$

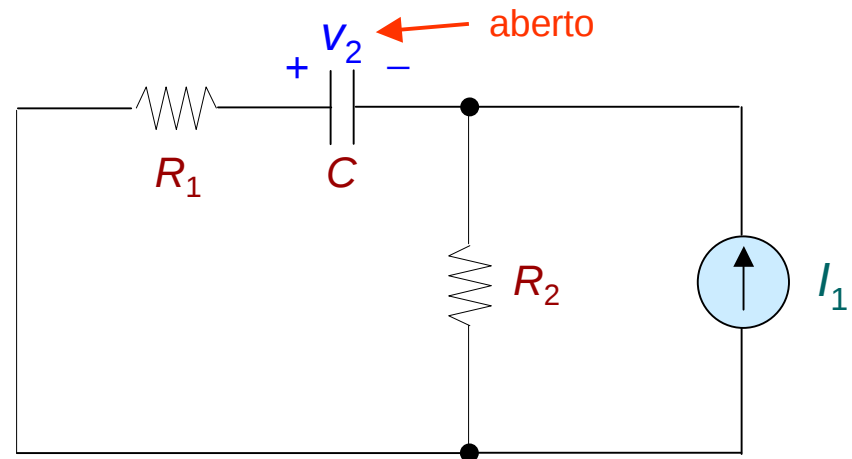
Outra solução:

Por inspeção verifica-se que a solução consiste de uma resposta forçada v_f e uma resposta natural v_n :

Superposição para encontrar v_f : $v_f = v_{f1} + v_{f2}$



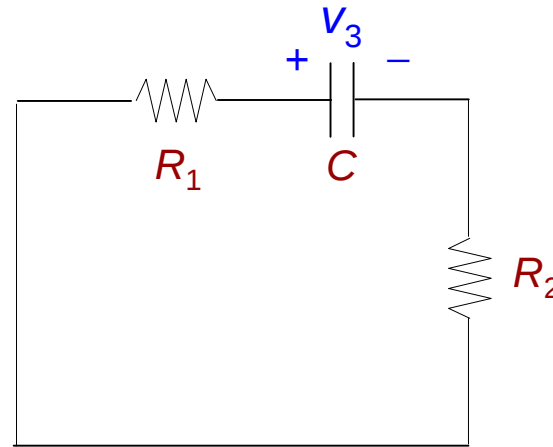
$$v_{f1} = V_1$$



$$v_{f2} = -R_2 I_1$$

$$v_f = V_1 - R_2 I_1$$

Resposta natural v_n :



$$v_n = A \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}\right)$$

Resposta total: $v = V_1 - R_2 I_1 + A \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}\right)$

Como $v(0) = V_0$, temos

$$V_0 = V_1 - R_2 I_1 + A \quad \Rightarrow \quad A = R_2 I_1 - V_1 + V_0$$

Então,

$$v = V_1 - R_2 I_1 + (R_2 I_1 - V_1 + V_0) \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}\right)$$