CAPITULO 05

CIRCUITOS RL E RC RESPOSTA NATURAL

Prof. SILVIO LOBO RODRIGUES

5.1 INTRODUÇÃO

Estudaremos neste capítulo os circuitos mais simples contendo resistores e capacitores ou resistores e indutores e que não tenham nenhuma fonte.

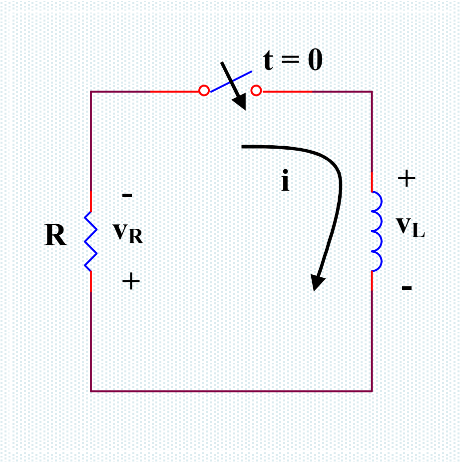
Obteremos para estes circuitos uma equação diferencial linear homogênea de 1ª ordem ou um sistema de equações de 1ª ordem para circuitos que contenham mais de um indutor ou mais de um capacitor dispostos de maneira tal que não permitam uma associação série ou paralela de modo direto.

Uma solução será obtida ao encontrarmos, para a variável dependente, uma expressão que satisfaça a equação diferencial e a distribuição de energia nos indutores e capacitores num determinado instante de tempo t = 0.

A solução da equação diferencial representa a resposta do circuito. Quando o circuito não é alimentado continuamente por uma fonte independente a resposta é chamada de resposta natural, ou transitória uma vez que ela depende apenas da natureza dos elementos do circuito e desaparece ao longo do tempo pela dissipação da energia armazenada nos capacitores ou indutores se transformando em calor nos resistores do circuito.

5.2 CIRCUITO RL MAIS SIMPLES

Consideremos o CKT da figura 5.1 no qual a corrente no indutor em t = 0 é I_0.



$i(0) = I_0$

Figura 5.1 - Circuito RL simples.

Do circuito temos:

$$v_L + v_R = L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad (5.1)$$

Esta é a equação diferencial de 1ª ordem representativa do circuito.

Devemos, pois, obter uma solução para i(t) que satisfaça esta equação e a condição inicial i(0) = I_o.

Uma solução para esta equação é obtida pelo método de separação de variáveis e integração direta.

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int_{I_o}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$\ln(i)\Big]_{I_o}^{i(t)} = -\frac{R}{L}t\Big]_0^t$$

$$\ln(i) - \ln(I_o) = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln\left(\frac{i}{I_o}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$e^{\ln\left(\frac{i}{I_o}\right)} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{i}{I_o} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

Donde finalmente chegamos à expressão que representa a resposta natural em termos da corrente i(t) em um circuito RL simples.

$$i(t) = I_o e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \textbf{(5.2)}$$

Este tipo de solução é um pouco limitado uma vez que nem sempre se podem separar as variáveis.

O método mais utilizado, entretanto consiste em se admitir uma forma de solução e testar a hipótese substituindo nas equações e testar as condições iniciais.

Voltemos ao nosso exemplo. Da equação (5.1):

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad i(0) = I_o$$

Admitimos como solução uma solução exponencial:

$$i(t) = Ae^{s_1 t} \qquad \textbf{(5.3)}$$

Levando na equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\left(Ae^{s_1t}\right)+\frac{R}{L}Ae^{s_1t}=0$$

$$As_1e^{s_1t}+\frac{R}{L}Ae^{s_1t}=0$$

$$As_1e^{s_1t}\left(\frac{R}{L}+s_1\right)=0$$

Temos três soluções possíveis:

$$A=0 \qquad s_1=-\infty \qquad \text{ou} \qquad s_1=-\frac{R}{L}$$

As duas primeiras não nos interessam, pois levam a soluções nulas ou triviais.
Logo,

$$s_1=-\frac{R}{L} \tag{5.4}$$

A nossa solução hipótese fica:

$$i(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Resta determinar a constante A que é obtida pela condição inicial i(0) = I_0.

$$i(0)=I_o=Ae^0$$

Logo,

$$A=I_o \qquad i(t)=I_oe^{-\frac{R}{L}t}$$

A potência dissipada no resistor é:

$$P_R(t)=Ri(t)^2=R(I_o)^2e^{-\frac{2R}{L}t}$$

A energia transformada em calor ao longo do tempo:

$$W=\int_0^\infty p(t)dt=\int_0^\infty R(I_o)^2e^{-\frac{2R}{L}t}dt$$

$$W=-R(I_o)^2\cdot\frac{L}{2R}e^{-\frac{2R}{L}t}\Big]_0^\infty$$

$$W=\frac{1}{2}L(I_o)^2 \tag{5.5}$$

O resultado concorda com a energia inicialmente armazenada no indutor.

5.3 PROPRIEDADES DA RESPOSTA EXPONENCIAL

Consideremos o gráfico da figura 5.2.

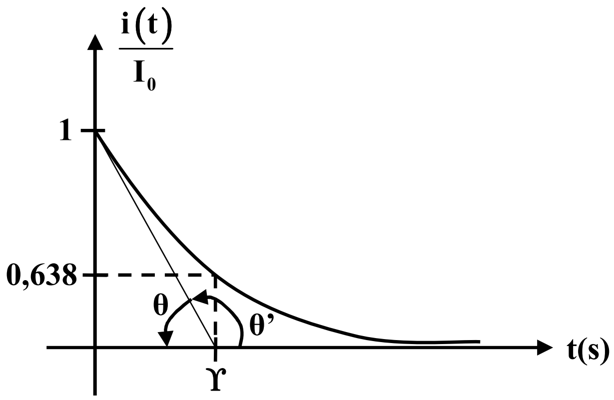


Figura 5.2 – Corrente num CKT RL (resposta natural).

Quando $\frac{R}{L}$ não se altera, a curva decresce constantemente à medida que **t** aumenta.

A razão inicial do decaimento é dada pela derivada em **t = 0**.

$$\left.\frac{d\left(i/I_o\right)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\bigg|_{t=0} = -\frac{R}{L} \qquad (5.6)$$

Da figura 5.2:

$$tg\theta' = \left.\frac{d\left(i/I_o\right)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{R}{L} \qquad tg\theta = \frac{1}{\gamma}$$

Como **θ** é o suplemento de **θ'**

$$tg\theta = -tg\theta'$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{R}{L}$$

Logo $\gamma = \frac{L}{R}(s)$ **(5.7)**

E representa o tempo necessário para que $\frac{i}{I_o}$ caia de 1 a 0.

A constante γ é chamada de **constante de tempo** do circuito.

Quando $t = \gamma$: $\frac{i(t)}{I_o} = e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-1}$

$$\frac{i(t)}{I_o} = 0,368$$

Logo **i(t) = 36,8%.I_o**

Para $t = 2\gamma$: $\frac{i(t)}{I_o} = e^{-2} = 0,135$

Para $t = 3\gamma$: $\frac{i(t)}{I_o} = e^{-3} = 0,0498$

Para $t = 4\gamma$: $\frac{i(t)}{I_o} = e^{-4} = 0,0183$

Para $t = 5\gamma$: $\frac{i(t)}{I_o} = e^{-5} = 0,0067$

Conclui-se que para **t = 5γ** a corrente no circuito é praticamente nula pois **i(t)=0,67%.I_o**.
Em termos da constante de tempo:

$$i(t) = I_o e^{-\frac{t}{\gamma}} \qquad \textbf{(5.8)}$$

5.4 ESTUDO DE UM CKT RL MAIS ELABORADO

Analisemos a figura 5.3 na qual é conhecida $i_L(0)$.

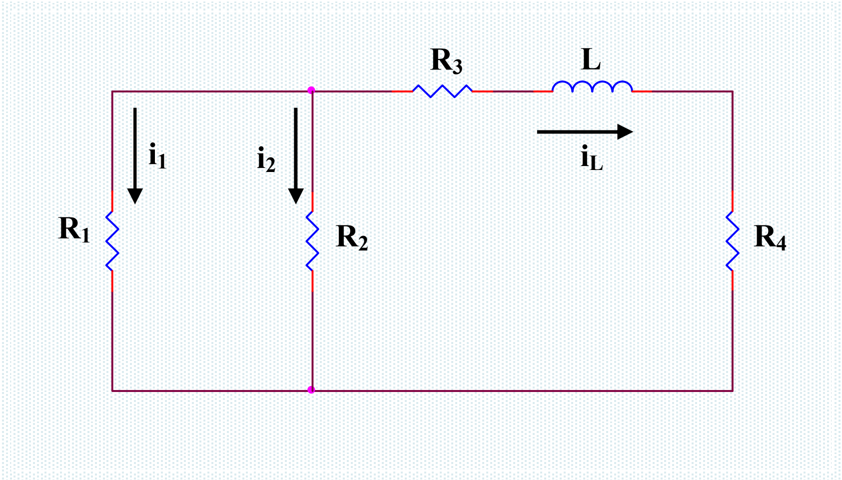


Figura 5.3 – Circuito RL mais geral.

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

A constante de tempo do circuito:

$$\gamma = \frac{L}{R_{eq}}$$

A corrente $i_L(t)$ pode ser escrita:

$$i_L(t) = i_L(0)e^{-\frac{R_{eq}}{L}t} = i_L(0)e^{-\frac{t}{\gamma}} \quad (5.9)$$

Se quisermos $\mathbf{i_2}$, por exemplo, fazemos o divisor de corrente.

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i_L$$

Então:

$$i_2(t) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i_L(0)e^{-\frac{t}{\gamma}} \quad (5.10)$$

Se não for conhecido $i_L(0)$ e for conhecido $i_1(0^+)$, por exemplo, teremos:

$$R_1 i_1\left(0^+\right)=R_2 i_2\left(0^+\right)$$

$$i_2\left(0^+\right)=\frac{R_1}{R_2}i_1\left(0^+\right)$$

$$i_L\left(0^+\right)=-\left[i_1\left(0^+\right)+i_2\left(0^+\right)\right]$$

$$i_L\left(0^+\right)=-\left[i_1\left(0^+\right)+\frac{R_1}{R_2}i_1\left(0^+\right)\right]$$

$$i_L\left(0^+\right)=-\left[\frac{R_2+R_1}{R_2}\right]\cdot i_1\left(0^+\right) \qquad (5.11)$$

A equação (5.10) para $i_2(t)$ fica então:

$$i_2\left(t\right)=\frac{R_1}{R_2}\cdot i_1\left(0^+\right)e^{-\frac{t}{\gamma}} \qquad (5.12)$$

5.5 CIRCUITO RC MAIS SIMPLES

Consideremos a figura 5.4 na qual $v(0) = V_0$.

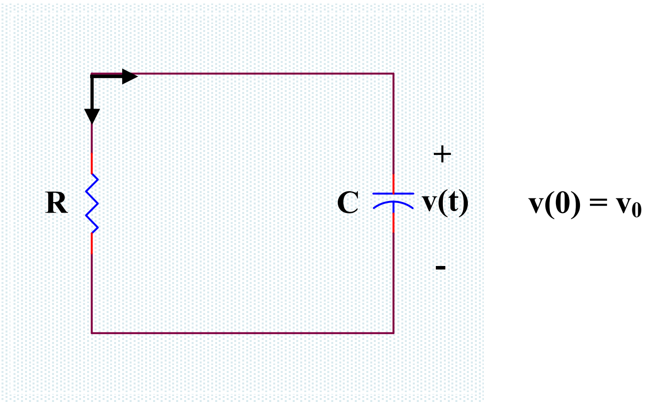


Figura 5.4 – Circuito RC simples.

A corrente total deixa o nó superior em t = 0.

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=0$$

Comparando com $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$, verificamos que se trata da equação dual pela substituição de i por v e $\frac{R}{L}$ por $\frac{1}{RC}$.

A solução deve ser portanto o dual da solução para CKT RL.
Logo:

$$v(t)=V_0e^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.13}$$

Vamos supor que selecionamos i(t) e não v(t) como variável para o CKT RC.

$$v(t_0)+\frac{1}{C}\int idt+Ri=0$$

Derivando:

$$\frac{i(t)}{C}+R\frac{di}{dt}=0$$

Como $i=\frac{v}{R} \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=0$

Teremos novamente:

$$v(t)=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

5.6 PROPRIEDADES DA RESPOSTA EXPONENCIAL (CKT RC)

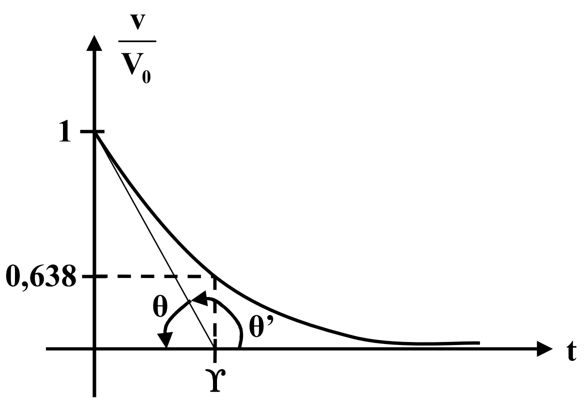


Figura 5.5 – Tensão num circuito RC (resposta natural).

Quando $\frac{1}{RC}$ não se altera, a curva decresce constantemente à medida que t aumenta. A razão inicial do decaimento é dada pela derivada em t = 0.

$$\left.\frac{d\left(v/V_o\right)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\Big|_{t=0} = -\frac{1}{RC}$$

$$tg\theta' = -tg\theta = -\frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{RC}$$

Logo $\gamma = RC$ **(s)** **(5.14)**

E representa o tempo necessário para que $\frac{v}{V_o}$ caia de 1 a 0.

Quando $t = \gamma$: $\frac{v(t)}{V_o} = e^{-1} = 0,368$

Para $t = 2\gamma$: $\frac{v(t)}{V_o} = e^{-2} = 0,135$

Para $t = 3\gamma$: $\frac{v(t)}{V_o} = e^{-3} = 0,0498$

Para $t = 4\gamma$: $\frac{v(t)}{V_o} = e^{-4} = 0,0183$

Para $t = 5\gamma$: $\frac{v(t)}{V_o} = e^{-5} = 0,0067$

Conclui-se que a tensão no circuito, para $t = 5\gamma$, é praticamente cula pois **v(t)=0,67%.V$_o$**.
Em termos da constante de tempo:

$$v(t) = V_o e^{-\frac{t}{\gamma}} \tag{5.15}$$

5.7 ESTUDO DE UM CKT RC MAIS ELABORADO

Consideremos o CKT da figura 5.6 em que v(0) = V_o.

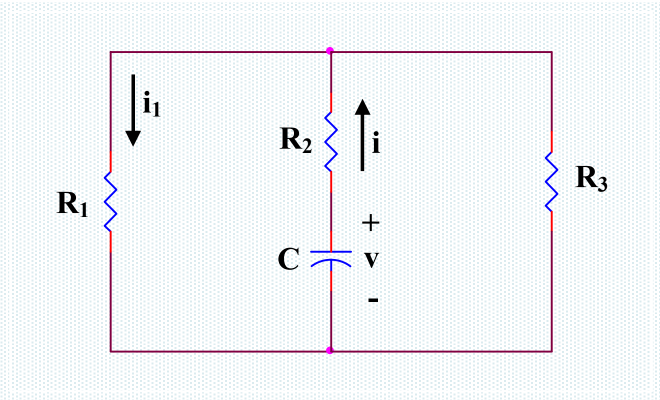


Figura 5.6 – CKT RC mais geral.

$$R_{eq} = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{R_{eq} C}}$$

$$\gamma = R_{eq} C$$

Qualquer voltagem ou corrente na parte resistiva da rede será da forma $A \cdot e^{-t/\gamma}$

Por exemplo:

$$i_1(t) = i_1(0^+) e^{-t/\gamma}$$

E **i(0$^+$)** deve ser obtido da condição inicial dada.

Para o divisor de corrente:

$$i_1(0^+) = i(0^+) \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

Mas. $i(0^+) = \dfrac{v(0^+)}{R_{eq}} = \dfrac{V_0}{\left(R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\right)} = \dfrac{V_0 (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$

Então, $$i_1(0^+) = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \cdot v(0^+) \tag{5.16}$$

5.8 CKT RL E RC GERAIS

Um circuito com vários indutores ou capacitores geralmente não permite a simplificação para 1 indutor ou 1 capacitor associado a uma resistência equivalente. Temos sempre nestes casos mais de uma exponencial negativa associada ao circuito. Tais problemas envolvem a solução de um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem e o circuito terá mais de uma constante de tempo, associada a descarga da energia armazenada nos capacitores ou indutores.

Exemplo: seja o circuito da figura 5.7 para o qual conhecemos $i_1(0)$ e $i_2(0)$.

Seja $\mathbf{i_1(0) = 11A}$ e $\mathbf{i_2(0) = 11A}$.

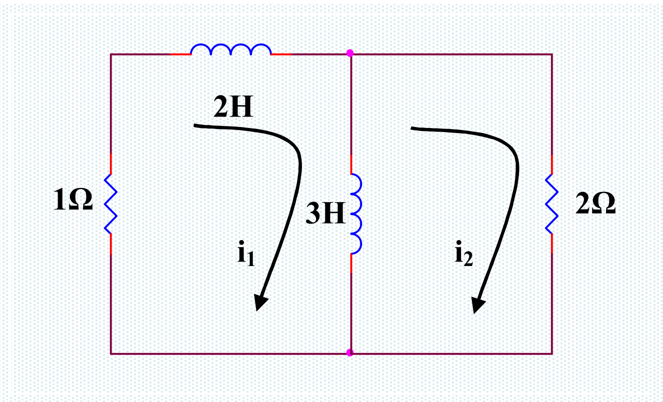


Figura 5.7 – Circuito a dois indutores – Exemplo de aplicação.

Temos duas correntes de laço e cada uma delas será representada pela soma de duas exponenciais e cada exponencial tem como incógnita uma amplitude e uma constante de tempo. Teremos 6 incógnitas a determinar:

Escrevendo as equações de laço:

$$i_1 + 5\frac{di_1}{dt} - 3\frac{di_2}{dt} = 0 \qquad (1)$$

$$-3\frac{di_1}{dt} + 3\frac{di_2}{dt} + 2i_2 = 0 \qquad (2)$$

A nossa hipótese de solução é:

$$i_1 = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \qquad (3)$$

$$i_2 = Ce^{s_1 t} + De^{s_2 t} \qquad (4)$$

Substituindo $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_2}$ nas equações diferenciais:

$$Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}+5As_1e^{s_1t}-3Cs_1e^{s_1t}+5Bs_2e^{s_2t}-3Ds_2e^{s_2t}=0$$

$$-3As_1e^{s_1t}-3Bs_2e^{s_2t}+3Cs_1e^{s_1t}+3Ds_2e^{s_2t}+2Ce^{s1t}+2De^{s_2t}=0$$

$$\left(A+5As_1-3Cs_1\right)e^{s_1t}+\left(B+5Bs_2-3Ds_2\right)e^{s2_1t}=0$$

$$\left(-3As_1+3Cs_1+2C\right)e^{s_1t}+\left(-3Bs_2+3Ds_2+2D\right)e^{s2_1t}=0$$

A solução para este sistema obriga que todos os termos entre parêntesis sejam nulos.

$$A\left(1+5s_1\right)-3Cs_1=0 \quad (5)$$

$$B\left(1+5s_2\right)-3Ds_2=0 \quad (6)$$

$$C\left(2+3s_1\right)-3As_1=0 \quad (7)$$

$$D\left(2+3s_2\right)-3Bs_2=0 \quad (8)$$

Da equação (5):

$$A=3C\frac{s_1}{1+5s_1}$$

Levando na equação (7):

$$6s_1^{\,2}+13s_1+2=0$$

Donde $s_1=-1/6\ ,\ \ s_2=-2$

Da equação (6):

$$B=3D\frac{s_2}{1+5s_2}$$

Levando na equação (8):

$$6s_2^{\,2}+13s_2+2=0$$

Donde $s_1=-1/6\ ,\ \ s_2=-2$

Escolhemos para solução:

$$s_1=-1/6\ \text{ e }\ s_2=-2$$

$$i_1=Ae^{-t/6}+Be^{-2t}$$

$$i_2=Ce^{-t/6}+De^{-2t}$$

Aplicando as condições iniciais:

$$i_1(0) = A + B = 11 \quad (9)$$

$$i_2(0) = C + D = 11 \quad (10)$$

Estas duas equações não são suficientes para determinar A, B, C e D. Utilizamos então duas equações diferenciais.

Por exemplo as equações (5) e (6):

$$A(1+5s_1) - 3Cs_1 = 0$$

$$B(1+5s_2) - 3Ds_2 = 0$$

Como $s_1 = -1/6$, $s_2 = -2$

$$A + 3C = 0 \qquad (11)$$

$$-9B + 6D = 0 \qquad (12)$$

A solução das equações (9) a (12) fornece:

$$A = 3 \quad B = 8 \quad C = -1 \quad e \quad D = 12$$

A solução final fornece:

$$i_1 = 3e^{-t/6} + 8e^{-2t}$$

$$i_2 = -e^{-t/6} + 12e^{-2t}$$

As constantes de tempo do circuito são:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{s_1} \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{s_2}$$

$$\gamma_1 = 6s \qquad \gamma_2 = \frac{1}{2}s$$

A representação gráfica das correntes sobre os indutores é dada na figura 5.8.

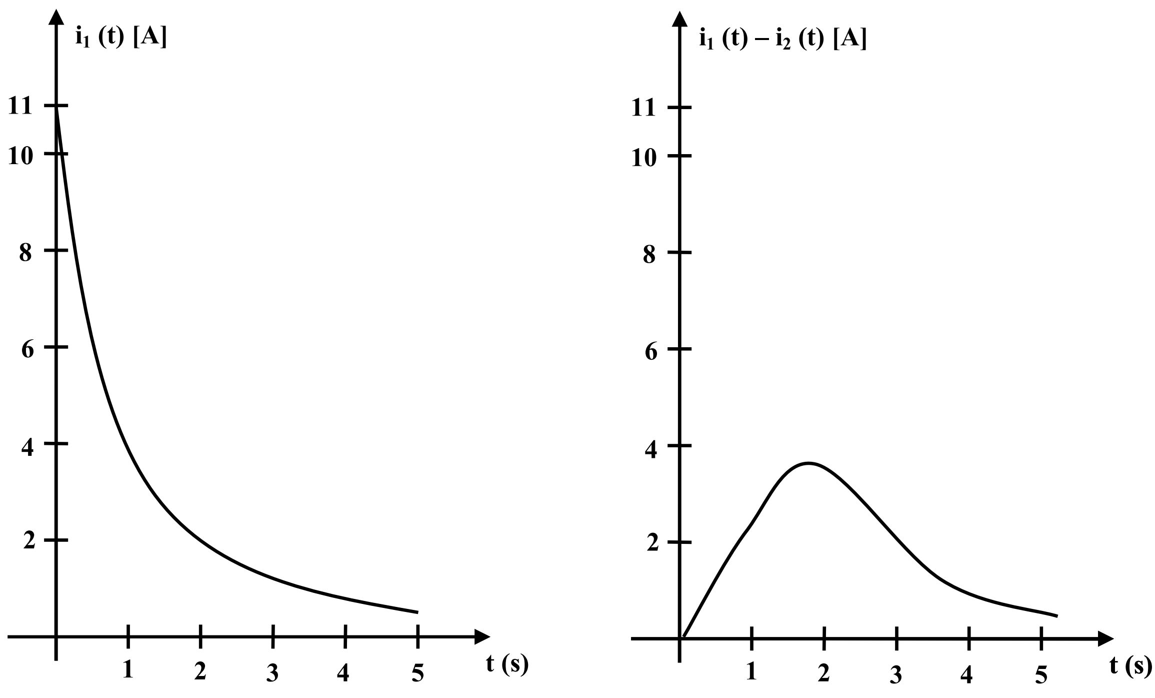
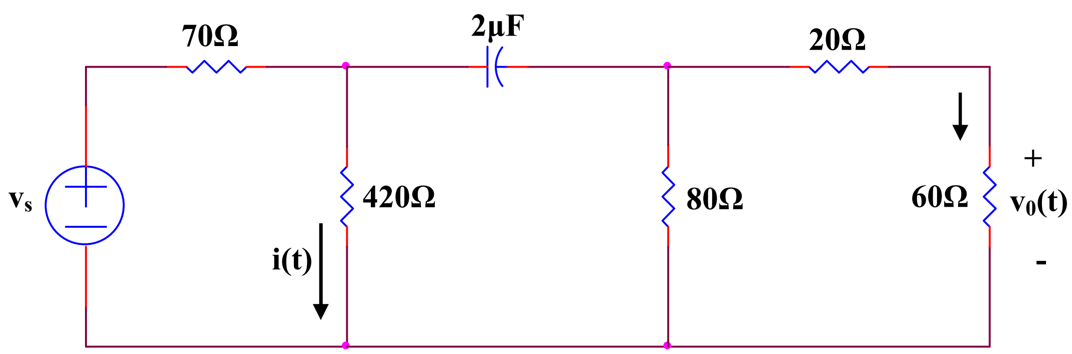


Figura 5.8 – Resposta em corrente para o CKT RL a dois indutores.

5.9 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. A fonte independente no circuito da figura abaixo é **140V** para **t < 0** e **0V** para **t > 0**. Determine i(t) e $v_o(t)$.



Solução:

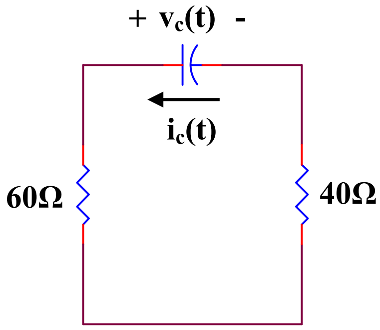
Para **t < 0:** $i(t) = \frac{140}{490}A \qquad v_o(t) = 0$

Para **t > 0:** $R_{eq} = (70 // 420) + (80 // 80) = 60 + 40 = 100\Omega$

$$\gamma = R_{eq}C = 100 \times 2 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-4} s$$

$$v_c(0^+) = 420 \times i(0^-) = 420 \times \frac{140}{490} = 120V$$

$$v_c(t) = v_c(0^+)e^{-t/(2 \cdot 10^{-4})} = 120e^{-5000t} \quad t > 0$$



$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = -2 \times 10^{-6} \times 120 \times 5000e^{-5000t}$$

$$i_c(t) = -1,2 \times e^{-5000t} A \qquad t > 0$$

$$i(t) = \frac{i_c(t) \times 70}{490} = \frac{1,2 \times 70}{490}e^{-5000t}$$

$$i(t) = -0,171e^{-5000t} \qquad t > 0$$

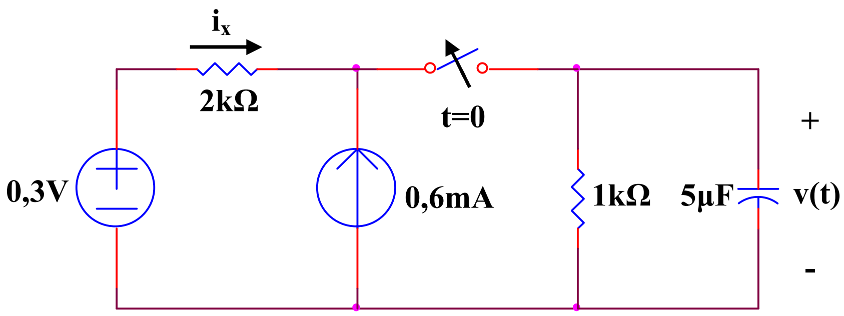
$$v_o(t) = 60 \times i_{R60}$$

$$i_{R60} = -\frac{i_c(t) \times 80}{160} = 0,6 \times e^{-5000t} A$$

$$v_o(t) = 60 \times 0,6 \times e^{-5000t} V$$

$$\boxed{v_o(t) = 36e^{-5000t} V \rightarrow t > 0}$$

2. Após estar fechada por um longo tempo, a chave no circuito da figura que segue é aberta em **t = 0**. Determine v(t) para **t > 0**.



Solução:

Chamando i_x a corrente no resistor de 2KΩ para t < 0 temos:

$$0,3 = 2000 i_x + 1000\left(i_x + 0,6\times10^{-3}\right)$$

$$i_x = \frac{0,3-0,6}{3000} = \frac{-0,3}{3000} = -0,1\text{mA}$$

Logo:

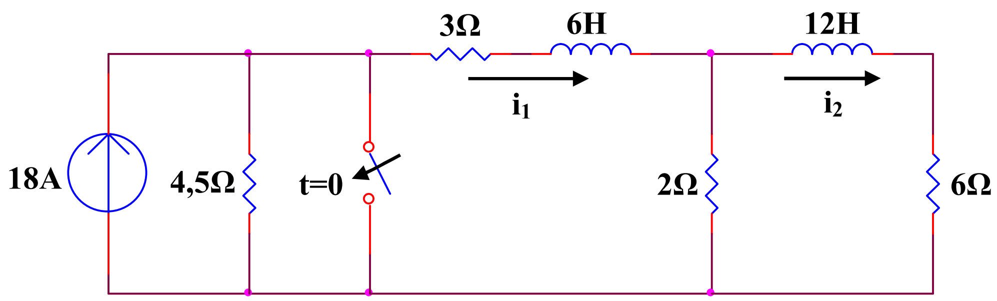
$$v\left(0^-\right) = 1000\left(0,6-0,1\right)\times10^{-3} = 0,5\text{V}$$

$$v\left(0^-\right) = v\left(0^+\right) = 0,5\text{V}$$

Para t > 0: $v(t) = v\left(0^+\right)e^{-t/\left(1000\times5\times10^{-6}\right)}$

$$\boxed{v(t) = 0,5e^{-200t}\text{V}}$$

3. A chave do circuito da figura que segue fecha-se em **t = 0**. Determine $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para **t > 0**.

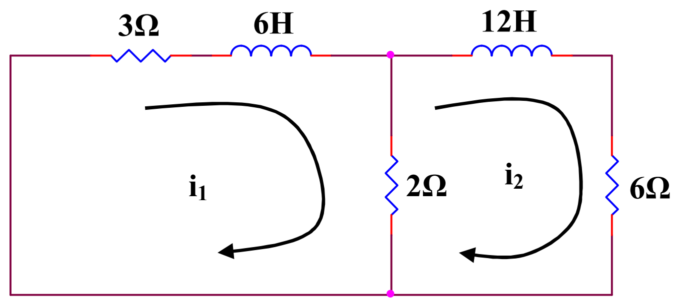


Para t < 0:

$$i_1(t) = \frac{18 \times 4,5}{4,5 + 3 + 1,5} = 9A$$

$$i_2(t) = \frac{9 \times 2}{6 + 2} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

Para t > 0:



$$3i_1 + 6\frac{di_1}{dt} + 2(i_1 - i_2) = 0$$

$$12\frac{di_2}{dt} + 6i_2 + 2(i_2 - i_1) = 0$$

$$5i_1 + 6\frac{di_1}{dt} - 2i_2 = 0$$

$$-2i_1 + 8i_2 + 12\frac{di_2}{dt} = 0$$

A nossa solução hipótese é:

$$i_1 = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$
$$i_2 = Ce^{s_1 t} + De^{s_2 t}$$
$$5Ae^{s_1 t} + 5Be^{s_2 t} + 6As_1 e^{s_1 t} + 6Bs_2 e^{s_2 t} - 2Ce^{s_1 t} - 2De^{s_2 t} = 0$$
$$-2Ae^{s_1 t} - 2Be^{s_2 t} + 12Cs_1 e^{s_1 t} + 12Ds_2 e^{s_2 t} + 8Ce^{s_1 t} + 8De^{s_2 t} = 0$$
$$e^{s_1 t}\left(5A + 6As_1 - 2C\right) + e^{s_2 t}\left(5B + 6Bs_2 - 2D\right) = 0$$
$$e^{s_1 t}\left(-2A + 12Cs_1 + 8C\right) + e^{s_2 t}\left(-2B + 12Ds_2 + 8D\right) = 0$$

$$\left(5 + 6s_1\right)A - 2C = 0 \qquad (1)$$
$$\left(5 + 6s_2\right)B - 2D = 0 \qquad (2)$$
$$\left(8 + 12s_1\right)C - 2A = 0 \qquad (3)$$
$$\left(8 + 12s_2\right)D - 2B = 0 \qquad (4)$$

Combinando (1) com (3):

De (1) : $\left(\dfrac{5 + 6s_1}{2}\right)A = C$

Aplica em (3):

$$2s_1^{\,2} + 3s_1 + 1 = 0$$
$$s_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -1$$

Combinando (2) com (4):

De (2) : $\left(\dfrac{5 + 6s_2}{2}\right)B = D$

Aplica em (4):

$$2s_2^{\,2} + 3s_2 + 1 = 0$$
$$s_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -1$$

Escolhendo para solução:

$$s_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad s_2 = -1$$

$$i_1 = Ae^{-t/2} + Be^{-t}$$

$$i_2 = Ce^{-t/2} + De^{-t}$$

Quando $t = 0$:

$$i_1(0) = A + B = 9 \qquad (5)$$

$$i_2(0) = C + D = 9/4 \qquad (6)$$

Escolhendo as equações (1) e (2):

$$(5 + 6s_1)A - 2C = 0 \rightarrow s_1 = -1/2$$

$$(5 + 6s_2)B - 2D = 0 \rightarrow s_2 = -1$$

$$2A - 2C = 0 \qquad (7)$$

$$-B - 2D = 0 \qquad (8)$$

Resolvendo o sistema das equações (5), (6), (7) e (8):

$$A = \frac{9}{2}$$

$$B = \frac{9}{2}$$

$$C = \frac{9}{2}$$

$$D = -\frac{9}{4}$$

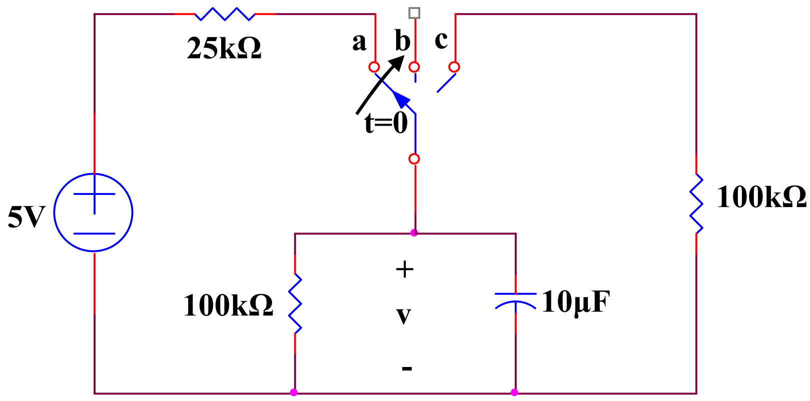
$$\boxed{\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{9}{2}e^{-t/2} + \frac{9}{2}e^{-t} \\ i_2(t) &= \frac{9}{2}e^{-t/2} - \frac{9}{4}e^{-t} \end{aligned}}$$

As constantes de tempo são:

$$\gamma_1 = 2s$$

$$\gamma_2 = 1s$$

4. A chave do circuito abaixo está em **a** por muito tempo. Em **t = 0** ela é movida para **b** e, em **t = 1s** é movida para **c**. Para que instante **t**, **v = 1V**?



Solução:

Com a chave em **a** o capacitor se carrega e em **t = 0⁻**:

$$v\left(0^-\right) = \frac{100000}{25000+100000} \cdot 5 = 4V$$

Com a chave na posição **b**, **0 < t < 1:**

$$v\left(t\right) = V_o e^{-t/RC} = 4e^{-\frac{t}{10^5 \cdot 10^{-5}}} = 4e^{-t}V$$

Em **t = 1s:**

$$v\left(1\right) = 4e^{-1} = 1,472V$$

Com a chave na posição **c, t > 1:**

$$v(t)=v(1)e^{-\frac{t}{(10^5//10^5)\cdot 10^{-5}}}=1,472e^{-2t}$$

$$1=1,472e^{-2t}$$

$$\frac{1}{1,472}=e^{-2t}$$

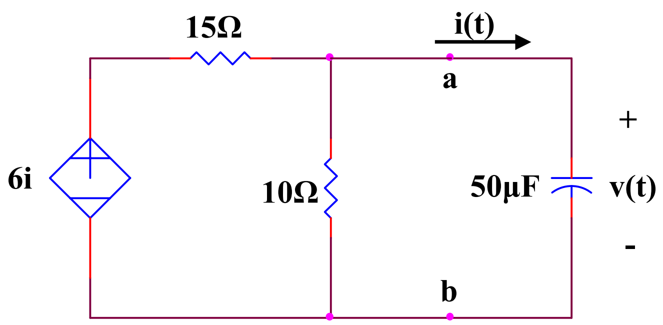
$$\ln\left(\frac{1}{1,472}\right)=-2t$$

$$t=0,193s$$

Assim o instante em que ocorre **v = 1** é:

$$\boxed{t=1+0,193=1,193s}$$

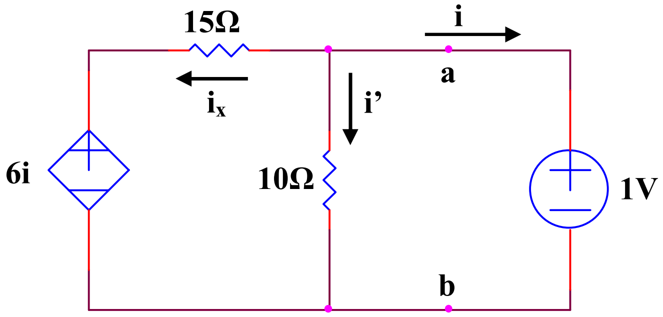
5. Com referência ao circuito mostrado a seguir sabe-se que **v(0) = 9V**. Determine i(t) para **t > 0**.



Solução:

Para se obter a tensão v(t) e i(t) precisamos do equivalente resistivo (Thévenin) ligado ao capacitor.

Assim obtém-se o equivalente Thévenin visto de **ab**.



$$i' = \frac{1}{10} = 0,1A$$

$$-1 + 15i_x + 6i = 0$$

$$i + i_x + i' = 0$$

$$\begin{cases} 1 = 15i_x + 6i \\ -0,1 = i_x + i \end{cases}$$

$$i_x = -0,1 - i$$

$$1 = 15(-0,1 - i) + 6i$$

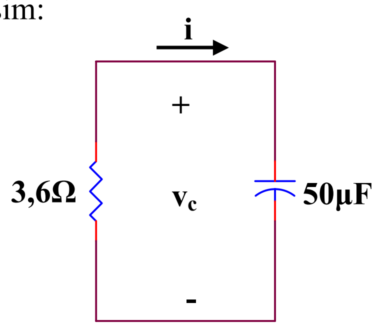
$$1 + 1,5 = -9i$$

$$i = \frac{2,5}{-9}$$

$$i = -0,2777A$$

$$R_{TH} = -\frac{1}{i} = \frac{1}{0,2777} = 3,6\Omega$$

Assim:



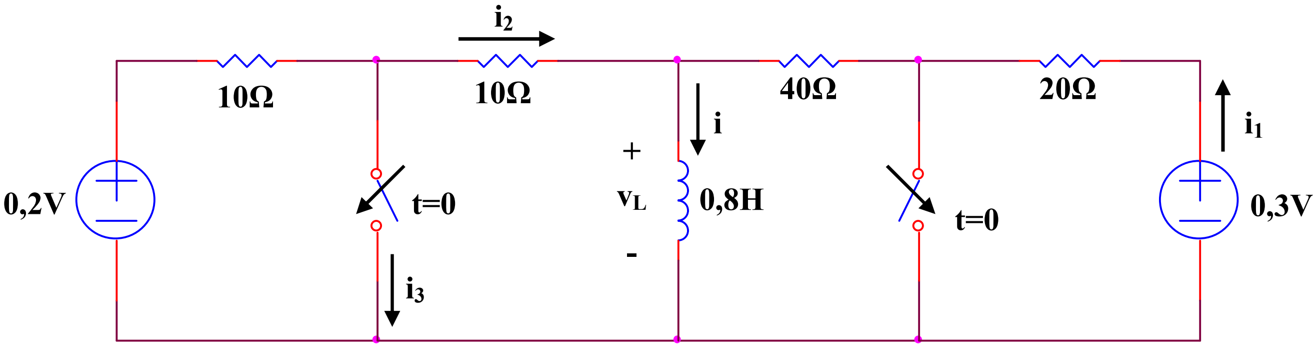
$$v_c(t) = 9e^{-\frac{t}{3,6\times50\times10^{-6}}}$$

$$v_c(t) = 9e^{-5555,5t}V$$

$$i(t) = -\frac{v_c}{3,6} = C\frac{dv_c}{dt} = -50\times10^{-6}\times9\times5555,5e^{-5555,5t}$$

$$\boxed{i(t) = -2,5e^{-5555,5t}A}$$

6. As duas chaves do circuito que segue são fechadas em t = 0. Determine $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ para **t > 0**.



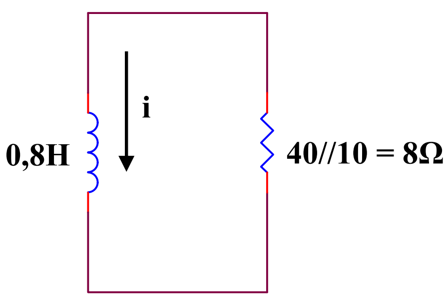
Solução:

a) Antes de t = 0 com o inductor em curto $v_L = 0$:

$$i_3(0^-) = 0$$
$$-0,2 + 10i_2 + 10i_2 + v_L = 0$$
$$-0,3 + 20i_1 + 40i_1 + v_L = 0$$
$$i = i_2 + i_1 = 0,015A$$
$$i_2 = 0,01A$$
$$i_1 = 0,005A$$

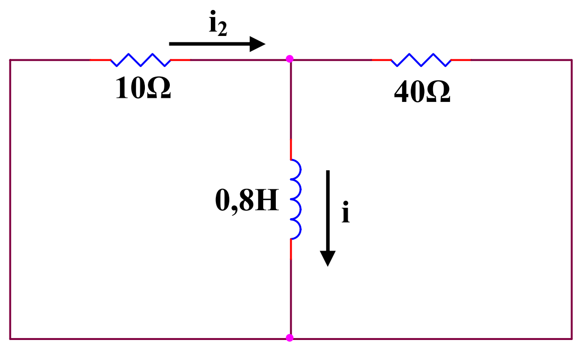
b) Após o fechamento das chaves o indutor fica em paralelo com as resistências de 10Ω e 40Ω e as fontes deixam de alimentar o indutor. Assim:

$$i_3 = \frac{0,2}{10} = 0,02A \qquad t > 0$$



$$i(t)_3 = I_o e^{-\frac{R}{L}t} = 0,015e^{-\frac{8}{0,8}t} = 0,015e^{-10t}A$$

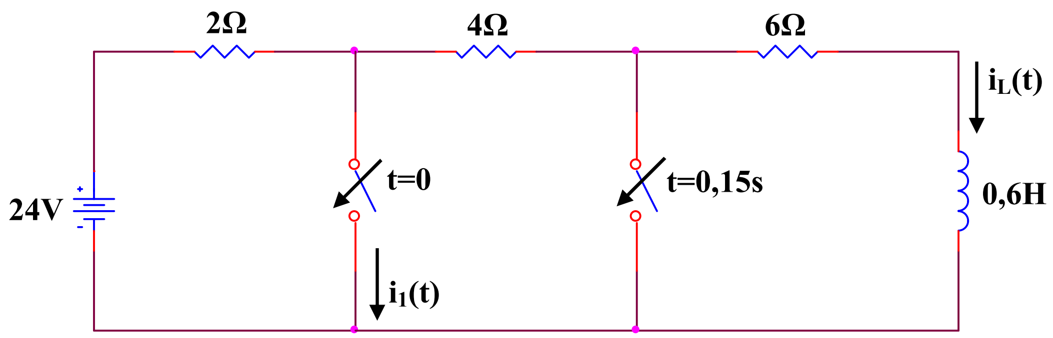
c) i_2 é obtido de i(t) por divisão de corrente para **t > 0**.



$$i_2 = -\frac{40 \cdot i}{40+10} = -0,8 \times 0,015e^{-10} = -0,015e^{-10t}\,A$$

7. A chave da esquerda no circuito que segue é fechada em **t = 0**.

a) Determinar $i_L(t)$ e $i_1(t)$ para **0 < t < 0,15**.
b) A chave do lado direito é fechada em t = 0,15. Determine $i_L(t)$ e $i_1(t)$ para **t > 0,15**.



Solução:

a) Para t < 0:

$$i_1\left(0^-\right) = 0$$

$$i_L\left(0^-\right) = \frac{24}{2+4+6} = 2A$$

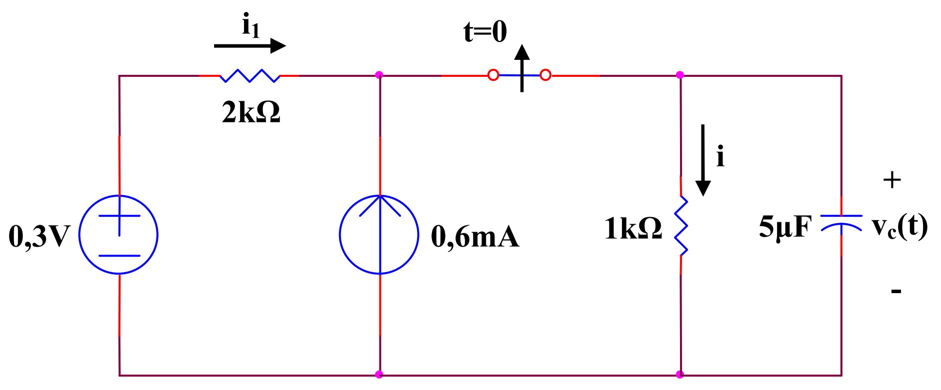
Para 0 < t < 0,15 com a chave da esquerda fechada:

$$i_L(t) = I_o e^{-\frac{10}{0,6}t} = 2e^{-16,67t}$$
$$i_1(t) = \frac{24}{2} - i_L(t) = 12 - 2e^{-16,67t}$$

c) Para t > 0,15:

$$i_1(t) = \frac{24}{2} = 12A$$
$$i_L(t) = i_L(0,1)\cdot e^{-\frac{6}{0,6}t} = 2e^{-1,667}\cdot e^{-10t}$$
$$i_L(t) = 2\times 0,1888e^{-10t}$$
$$i_L(t) = 0,3776e^{-10t}$$

8. Após ter estado fechada por um longo tempo, a chave no circuito abaixo é aberta em **t = 0**. Determine v(t) para **t > 0**.



Solução:

Para **t = 0⁻** o capacitor está carregado e em aberto:

$$v_c(0^-) = 1000i \qquad (1)$$
$$0,3 = 2000i_1 + 1000i \qquad (2)$$
$$i_1 + 0,6\times 10^{-3} = i \rightarrow i_1 = i - 0,006 \qquad (3)$$

Levando (3) em (2):

$$0,3 = 2000(i - 0,0006) + 1000i$$

$$0,3 = 3000i - 1,2$$

$$i = \frac{1,5}{3000} = 0,5\times10^{-3}\,A$$

$$v_c(0^-) = 1000\times0,5\times10^{-3} = 0,5V = v_c(0^+)$$

Para **t** > **0**:

$$v_c(t) = v_c(0^+)e^{-\frac{t}{10^3\times5\times10^{-6}}} = 0,5e^{-200t}V$$

9. Um capacitor de precisão de valor 1μF tem como dielétrico (isolante entre as placas condutoras) um material com resistividade muito elevada. O capacitor é carregado até 1V em t = 0 e é, então, desligado da fonte. Observa-se que a voltagem cai a 0,9V em 100 horas.

Determine a resistência de isolação:

$$v(t) = V_o e^{-t/RC}$$

$$0,9 = 1e^{-\frac{t}{R\times10^{-6}}}$$

$$0,9 = e^{-\frac{10^6 t}{R}}$$

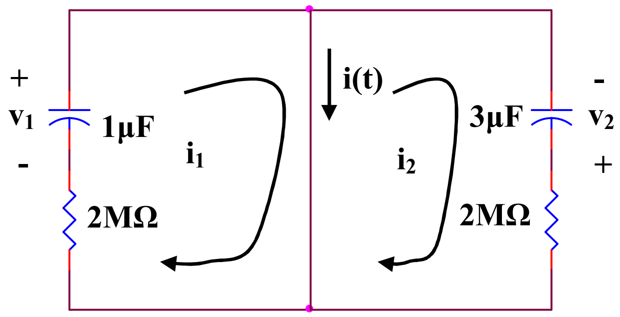
$$\ln(0,9) = \ln\left(e^{-\frac{10^6 t}{R}}\right)$$

$$-0,1053605 = -\frac{10^6 t}{R}$$

$$t = 100\times3600 = 36\times10^4 s$$

$$R = \frac{10^6\times36\times10^4}{0,1053605} = 3,4168\times10^{12}\,\Omega$$

10. As voltagens iniciais nos capacitores, do circuito que segue, são: $\mathbf{v_1(0) = 10V}$ e $\mathbf{v_2(0) = 4V}$. Para que valor de t, i = 0?



Solução:

$$i_1(t) - i_2(t) = i(t)$$

Quando $i(t) = 0 \rightarrow i_1(t) = i_2(t)$

Como os resistores são de igual valor a corrente i(t) será nula quando $\mathbf{v_1(t) = v_2(t)}$.

$$v_1(t) = 10e^{-\frac{t}{2}}$$

$$v_2(t) = 4e^{-\frac{t}{6}}$$

$$10e^{-\frac{t}{2}} = 4e^{-\frac{t}{6}}$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{e^{-\frac{t}{6}}} = \frac{4}{10}$$

$$e^{-\frac{t}{3}} = 0,4$$

$$\ln\left(e^{-\frac{t}{3}}\right) = \ln(4)$$

$$-\frac{t}{3} = -0,91629 \rightarrow t = 2,74887s$$