

Mecânica Quântica — 7600022

Segunda Lista — para praticar para a prova do dia 29/8/2017

1. Considere um elétron no poço infinito definido pelo potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < a/2) \\ \infty & (|x| > a/2). \end{cases}$$

Se o elétron se encontrar no estado fundamental, qual será a corrente de probabilidade $J(x, t)$? *Sugestão: lembre-se da expressão $J(x, t) = (\hbar/m)\Im[\psi^*(x, t)\partial\psi(x, t)/\partial x]$, onde \Im denota a parte imaginária.*

2. Encontre a densidade de corrente para a função de onda

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

onde A , k , e ω são constantes.

3. Um elétron é livre, isto é, está sujeito a um potencial $V(x) = 0$.

- Encontre as autofunções de seu Hamiltoniano, a menos de uma constante multiplicativa.
- Mostre que para cada autovalor E , há duas autofunções.
- Mostre explicitamente que uma combinação linear qualquer das autofunções no item anterior é autofunção do mesmo Hamiltoniano.

4. Considere agora um elétron sujeito ao potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ \infty & (x < 0). \end{cases}$$

- Encontre as autofunções do Hamiltoniano correspondente
- Verifique que essas autofunções são não-degeneradas
- Calcule a densidade de corrente para essas autofunções

5. Dado o operador $D_x = \partial/\partial x$, o operador $x D_x$ é linear?

6. Defina-se o exponencial de um operador A pela igualdade

$$e^A = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

Encontre a função $e^{aD_x}\psi(x)$, onde a é uma constante com dimensão de distância. *Sugestão: lembre-se da série de Taylor.*

7. Se $\varphi(x)$ for uma autofunção do operador A com operador λ , mostre que $e^A\varphi(x) = e^\lambda\varphi(x)$.

8. Quanto vale $e^{(-i/\hbar)Ht}\psi(x, t)$, onde H é o Hamiltoniano e $\psi(x, t)$ uma função de onda de um dado sistema. *Lembre-se de que $\psi(x, t)$ obedece à Equação de Schrödinger e note que este problema é semelhante ao problema 6.*

9. Repita o problema anterior para uma autofunção $\varphi_n(t)$ do Hamiltoniano, com autovalor E . *Neste caso, é mais fácil seguir o procedimento do problema 7.*

10. Dois elétrons se encontram no poço do problema 1. Um está no estado fundamental e o outro, no primeiro estado excitado.

- Qual é a Equação de Schrödinger independente do tempo para esse sistema?
- Mostre que $\psi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)$ obedece à Equação de Schrödinger independente do tempo e às condições de contorno em $x = \pm a/2$, onde $\varphi_n(x)$ é a autofunção do poço infinito para um só elétron.
- Apesar de satisfazer a Equação de Schrödinger independente do tempo e às condições de contorno, a função $\psi(x_1, x_2, t)$ não é a função de onda do par. Explique por quê e encontre a função de onda correta.