EAE 5706: Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Aula 7: Jogos de Informação Incompleta:
Equilíbrio de Nash Bayesiano

Marcos Y. Nakaguma

23/08/2017

Extra

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Vimos anteriormente que vários jogos apresentam múltiplos equilíbrios de Nash. Nesta seção, estudaremos uma maneira sistemática de refinar nossas predições dentro do conjunto de possíveis equilíbrios.

- O refinamento de trembling-hand perfection baseia-se na ideia de que estratégias fracamente dominadas não devem ser utilizadas em equilíbrio.

- Se cada jogador acreditar que existe uma pequena probabilidade de que seus oponentes utilizem um perfil de estratégias para o qual a estratégia fracamente dominada não é uma melhor resposta, então o uso dessas estratégias não é justificável.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Exemplo: Votação em Comitê
  - Suponha que exista um número ímpar de membros em um comitê, $I > 2$, e que cada um deles deva votar simultaneamente entre duas alternativas, "Q" (status quo) e "R" (reforma).
  - A decisão do comitê é determinada por maioria e a preferência dos membros é tal que todos preferem a reforma ao status quo.
  - Um equilíbrio de Nash deste jogo é dado por um perfil de estratégias em que todos escolhem $s_i = R$, de maneira que a reforma é aprovada por unanimidade.
  - Porém, existem vários equilíbrios neste jogo. Talvez o mais implausível deles seja aquele em que todos os membros escolhem $s_i = Q$, de maneira que o status quo é mantido.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- (Cont.)
  - Note que, neste caso, dadas as estratégias dos demais jogadores, nenhum membro é capaz de influenciar a decisão do comitê, i.e. nenhum deles é pivotal.
  - Portanto, todos os membros estão indiferentes entre votar pela reforma ou pelo status quo.
  - No entanto, é razoável pensar que cada membro vote assumindo ser pivotal com alguma probabilidade. Neste caso, todos eles devem escolher $s_i = R$, pois $s_i = Q$ é fracamente dominado por $s_i = R$.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Dizemos que um equilíbrio de Nash é trembling-hand perfect se ele for "robusto" à introdução de uma pequena possibilidade de que os jogadores cometam erros ao implementarem as suas estratégias.
- Seguindo Selten (1975), dado o espaço de estratégias puras, S_i, defina:

$$\Delta_\varepsilon(S_i) = \{\sigma_i \in \Delta(S_i) : \sigma_i(s_i) \geq \varepsilon \text{ para todo } s_i \in S_i\}$$

  como o espaço de estratégias mistas "perturbado". Este é o conjunto das estratégias mistas do jogador i que atribuem pelo menos prob. $\varepsilon \geq 0$ em cada estratégia pura.
- A probabilidade ε captura a noção de que uma estratégia s_i pode ser jogada por erro pelo jogador i.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Definição: Para um jogo na forma normal $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$, definimos um jogo perturbado:

$$\Gamma_\varepsilon = [I, \{\Delta_\varepsilon(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}],$$

para uma dada escolha de $\varepsilon > 0$, com $\sum_{s_i \in S_i} \varepsilon < 1$ para todo i.

- Definição: Um equilíbrio de Nash σ do jogo $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ é trembling-hand perfect se existir uma sequência de jogos perturbados $\{\Gamma_{\varepsilon^k}\}_{k=1}^\infty$ convergindo para Γ_N, no sentido de que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon^k = 0$, para a qual existe uma sequência associada de equilíbrios de Nash $\{\sigma^k\}_{k=1}^\infty$ convergindo para σ, isto é $\lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Proposição: Se σ^* é um equilíbrio trembling-hand perfect, então para todo i e $s_i \in S_i$ tal que $\sigma_i^*(s_i) > 0$, s_i não é fracamente dominada.

- A proposição inversa de que todo equilíbrio de Nash não involvendo o uso de estratégias fracamente dominadas é trembling-hand perfect não é necessariamente verdadeira, i.e. o conceito de trembling-hand perfection pode excluir mais do que apenas os equilíbrios de Nash envolvendo estratégias fracamente dominadas.

- Proposição: Em um jogo com dois jogadores, se σ^* é um equilíbrio de Nash onde σ_1^* e σ_2^* não são fracamente dominadas, então σ^* é trembling-hand perfect.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Exemplo: Considere o seguinte jogo com três jogadores: (Exercício 8.F.2)

ℓ:

	L	R
T	1,1,1	1,0,1
B	1,1,1	0,0,1

r:

	L	R
T	1,1,0	0,0,0
B	0,1,0	1,0,0

  - Vamos mostrar que embora (B, L, ℓ) seja um equilíbrio de Nash em que nenhuma estratégia é fracamente dominada, ele não é trembling-hand perfect.
  - Seja que $\lambda = \Pr(R)$ e $\theta = \Pr(r)$. Se (B, L, ℓ) é trembling-hand perfect, então existe uma sequência $(\lambda^n, \theta^n) \to (0, 0)$ tal que B é uma melhor resposta do jogador 1 para λ^n e θ^n para qualquer n.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- (Cont.)
  - Dado λ^n e θ^n, a utilidade esperada do jogador 1 é tal que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B) &= \lambda^n\theta^n + (1-\lambda^n)(1-\theta^n) \\ &= 1-\lambda^n(1-\theta^n)-(1-\lambda^n)\theta^n\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \lambda^n(1-\theta^n)+(1-\lambda^n)\theta^n+(1-\lambda^n)(1-\theta^n) \\ &= 1-\lambda^n\theta^n\end{aligned}$$

  - Note que para λ^n e θ^n pequenos (e.g. $\lambda^n, \theta^n < \frac{1}{2}$), temos:

$$\lambda^n\theta^n < \lambda^n(1-\theta^n)$$

e

$$\lambda^n\theta^n < (1-\lambda^n)\theta^n,$$

de forma que $\mathbb{E}(T) > \mathbb{E}(B)$.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- No exemplo anterior, a probabilidade de que apenas um dos jogadores 2 e 3 cometam um erro é muito maior do que a probabilidade de que ambos cometam um erro.
- Esse fato faz com que a estratégia B não seja uma melhor resposta a uma perturbação local qualquer, ainda que ela não seja fracamente dominada por T.
- Portanto, o conceito de trembling-hand perfection pode excluir mais do que apenas os equilíbrios de Nash envolvendo estratégias fracamente dominadas.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Teorema: (Existência) Todo jogo finito possui um equilíbrio trembling-hand perfect.
- Uma implicação deste resultado é a de que todo jogo possui pelo menos um equilíbrio de Nash em que nenhum jogador utiliza uma estratégia fracamente dominada com probabilidade positiva.

Jogos de Informação Incompleta:

Equilíbrio de Nash Bayesiano

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- Nas seções anteriores, assumimos a estrutura de payoffs dos jogadores era de conhecimento comum, isto é todos eles conhecem os payoffs obtidos por seus oponentes para cada possível resultado do jogo. Esses jogos são chamados de jogos de informação completa.

- No entanto, esta hipótese será muito restritiva em várias situações. Por exemplo, no caso dos modelos de Bertrand e Cournot, é possível que as firmas não conheçam a estrutura de custo de seus rivais.

- Nesta seção, estudaremos os chamados jogos de informação incompleta.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- Definição: Um jogo é de informação incompleta quando alguns jogadores não conhecem o payoff obtido pelos seus rivais para alguns perfis de estratégias.

- Harsanyi propôs uma forma de analizar jogos de informção incompleta transformando-os em jogos de informação completa mas imperfeita.

- A ideia consiste em imaginar que a estrutura de payoff (tipo) dos jogadores é determinada pela Natureza no início do jogo.

- Cada jogador conhece o seu próprio tipo e a distribuição de probabilidade utilizada pela natureza para determinar os tipos dos demais jogadores, $F : \Theta \longrightarrow [0, 1]$.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

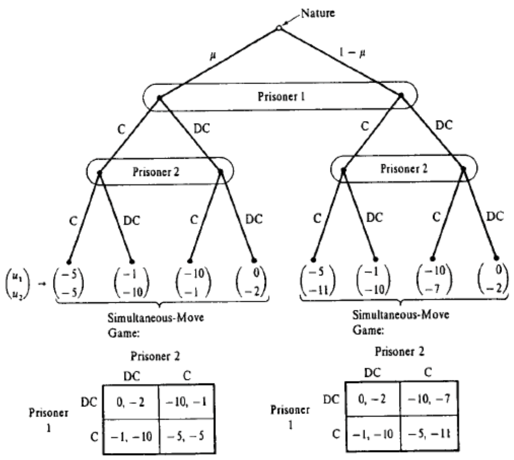
- Exemplo: Dilema dos Prisioneiros com Informação Incompleta
  - Considere uma versão do dilema dos prisioneiros em que o jogador 2 pode assumir dois tipos, "leal" ou "oportunista", $\theta \in \Theta_2 \equiv \{L, O\}$ com $\Pr(\theta = O) = \mu$. Os payoffs dos jogadores são os seguintes:

		Jogador 2 $(\theta = O)$	
		DC	C
Jogador 1	DC	0,-2	-10,-1
	C	-1,-10	-5,-5

		Jogador 2 $(\theta = L)$	
		DC	C
Jogador 1	DC	0,-2	-10,-7
	C	-1,-10	-5,-11

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- (Cont.)
  - A representação desse jogo na forma extensiva é dada por:



Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- (Cont.)
  - Um plano contingente completo para o jogador 2 é dado por uma função que especifica uma ação para cada possível realização do seu tipo θ. Observe que ele possui dois conjuntos de informação distintos.
  - Portanto, o jogador 2 possui quatro possíveis estratégias puras:
    - *i*. "Confessar se $\theta = O$; confessar se $\theta = L$";
    - *ii*. "Confessar se $\theta = O$; não confessar se $\theta = L$";
    - *iii*. "Não confessar se $\theta = O$; confessar se $\theta = L$";
    - *iv*. "Não confessar se $\theta = O$; não confessar se $\theta = L$".
  - Note que uma estratégia para o jogador 1 é simplesmente uma escolha entre "confessar" e "não confessar", dado que ele não observa o tipo do jogador 2.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- Em um jogo Bayesiano, cada jogador i possui uma função payoff $u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i, \theta_{-i})$, $u_i : S \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\theta_i \in \Theta_i$ é uma variável aleatória observada apenas por i.

- A distribuição de probabilidade conjunta dos tipos é dada por $F(\theta_1, ..., \theta_I)$, $F : \Theta \rightarrow [0, 1]$, onde F é de conhecimento comum.

- Assim, um jogo Bayesiano é formalmente definido por:

$$[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)]$$

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- Uma estratégia pura em um jogo Bayesiano é dada por uma função $s_i(\theta_i)$, $s_i : \Theta_i \rightarrow S_i$, que estabelece a estratégia do jogador para cada realização do seu tipo θ_i.

- O conjunto de estratégias puras de um jogador i no jogo Bayesiano, $\mathcal{S}_i$, é dado pelo conjunto de todas essas funções.

- Dado um perfil de estratégias para cada jogador, o payoff esperado (ex-ante) do jogador i é dado por:

$$\widetilde{u}_i(s_i(\cdot), s_{-i}(\cdot)) = \mathbb{E}_\theta[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})]$$

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- Definição: Um equilíbrio de Nash Bayesiano do jogo $[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)]$ é um perfil de estratégias $(s_1(\cdot), ..., s_I(\cdot))$ que constitui um equilíbrio de Nash do jogo $\Gamma_N = [I, \{\mathcal{S}_i\}, \{\widetilde{u}_i(\cdot)\}]$, i.e. para todo $i = 1, ..., I$:

$$\widetilde{u}_i(s_i(\cdot), s_{-i}(\cdot)) \geq \widetilde{u}_i(s_i^{'}(\cdot), s_{-i}(\cdot)) \quad \text{para todo } s_i^{'}(\cdot) \in \mathcal{S}_i$$

- A definição acima pode ser interpretada como *ex-ante* no sentido de que os jogadores escolhem as suas estratégias antes mesmo de conhecerem os seus próprios tipos.

- Alternativamente, poderíamos imaginar que os jogadores escolhessem as suas estratégias no estágio *ex-interim*, i.e. após conhecerem os seus tipos, mas ainda sem conhecerem os tipos dos seus oponentes.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- De fato, existe uma conexão entre essas duas visões: uma estratégia constitui um equilíbrio Bayesiano se, e somente se, ela maximiza a utilidade esperada do jogador condicionada à realização de cada um de seus possíveis tipos θ_i.

- Proposição: Um perfil de estratégias $(s_1(\cdot), ..., s_I(\cdot))$ é um equilíbrio de Nash Bayesiano se, e somente se, para todo i e todo $\theta_i \in \Theta_i$ que ocorre com probabilidade positiva:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})|\theta_i]$$
$$\geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[u_i(s_i'(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})|\theta_i]$$

para todo $s_i'(\cdot) \in S_i$.

- Note que a expectativa acima é tomada em relação aos tipos dos demais jogadores, θ_{-i}, condicionado à realização do tipo θ_i.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- A proposição anterior nos diz que podemos analisar cada tipo do jogador i como sendo um agente diferente, que maximiza o seu payoff esperado independentemente do que os demais tipos do mesmo jogador estão fazendo.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- Exemplo 1: Dilema dos Prisioneiros (Cont.)
  - Considere incialmente o comportamento ótimo de cada um dos tipos do jogador 1. Observe que:

    i. Se $\theta = O$, a estratégia dominante do jogador 2 é "confessar";

    ii. Se $\theta = L$, a estratégia dominante do jogador 2 é "não confessar"

  - Dado o comportamento ótimo do jogador 2, as utilidades esperadas do jogador 1 são:

$$\widetilde{u}_1^C = \mu(-5) + (1-\mu)(-1)$$

e

$$\widetilde{u}_1^{DC} = \mu(-10) + (1-\mu)(0)$$

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- (Cont.)
  - Portanto, a melhor resposta para o jogador 1 é "confessar" se, e somente se:
  $$\widetilde{u}_1^C \geq \widetilde{u}_1^{DC},$$
  ou seja,
  $$\mu(-5) + (1-\mu)(-1) \geq \mu(-10) \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \frac{1}{6}$$
  - Por outro lado, a sua melhor resposta é "não confessar" se, e somente se:
  $$\widetilde{u}_1^C < \widetilde{u}_1^{DC} \quad \Rightarrow \quad \mu < \frac{1}{6}$$
  - Portanto, o equilíbrio de Nash Bayesiano é caracterizado por:
  $$\begin{array}{ll} (C,(C,DC)) & \text{se } \mu \geq \frac{1}{6} \\ (DC,(C,DC)) & \text{se } \mu < \frac{1}{6} \end{array}$$

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- Exemplo 2: Inovação e Pesquisa & Desenvolvimento
  - Considere um acordo de P&D entre duas firmas estabelecendo que qualquer inovação por parte de uma delas deve ser compartilhada integralmente com a outra.
  - O custo de desenvolvimento de uma nova tecnologia é $c \in (0,1)$.
  - O benefício de cada firma com a adoção da nova tecnologia é θ_i^2.
  - Cada firma conhece apenas o seu tipo, $\theta_i \in \Theta \equiv [0,1]$, e sabe que a distribuição de tipos de seu parceiro é tal que $\theta_i \sim U[0,1]$.
  - Cada firma observa privadamente o seu próprio tipo e simultaneamente decidem desenvolver ou não a tecnologia (modelo sem incerteza).

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- (Cont.)
  - Vamos resolver para o equilíbrio Bayesiano deste jogo.
  - Uma estratégia para a firma i é uma função $s_i : \Theta \to \{0,1\}$, onde $s_i(\theta_i) = 1$ se o tipo θ_i da firma decide desenvolver a tecnologia e $s_i(\theta_i) = 0$ caso contrário.
  - Para um dado tipo da firma i, θ_i, e dada uma conjectura sobre a estratégia da firma parceira, $s_j(\cdot)$, temos que as utilidades esperadas de i são:

    i. Se a firma resolve desenvolver a tecnologia, $s_i(\theta_i) = 1$:
    $$\theta_i^2 - c$$
    ii. Se a firma resolve não desenvolver a tecnologia, $s_i(\theta_i) = 0$:
    $$\Pr\left[s_j(\theta_j) = 1\right]\theta_i^2$$

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- (Cont.)
  - Portanto, a melhor resposta da firma i é desenvolver a tecnologia se, e somente se:

$$\theta_i^2 - c \geq \Pr\left[s_j\left(\theta_j\right) = 1\right]\theta_i^2 \;\Rightarrow\; \theta_i \geq \left(\frac{c}{1 - \Pr\left[s_j\left(\theta_j\right) = 1\right]}\right)^{1/2}$$

    Assim, para uma estratégia *qualquer* da firma j, a estratégia ótima da firma i possui a forma de uma cutoff rule.

  - É interessante notar que, caso a firma estivesse trabalhando sozinha, ela estaria disposta a desenvolver a tecnologia caso $\theta_i \geq c^{1/2}$. Observe que o cutoff derivado acima é sempre maior do que isso.

  - Intuitivamente, sob o contrato de parceria, cada firma possui incentivo para pegar carona no esforço da outra.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- (Cont.)
  - Assim, por simetria, temos que as estratégias de equilíbrio são caracterizadas pelos seguintes thresholds:

$$\widehat{\theta}_1 = \left(\frac{c}{1 - \Pr[s_2(\theta_2) = 1]}\right)^{1/2}$$

$$\widehat{\theta}_2 = \left(\frac{c}{1 - \Pr[s_1(\theta_1) = 1]}\right)^{1/2}$$

    onde:

$$\Pr[s_1(\theta_1) = 1] = \Pr[\theta_1 \geq \widehat{\theta}_1] = 1 - \widehat{\theta}_1$$

    e

$$\Pr[s_2(\theta_2) = 1] = \Pr[\theta_2 \geq \widehat{\theta}_2] = 1 - \widehat{\theta}_2$$

    Note que para que o equilíbrio seja bem definido, precisamos supor que $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2 \in [0, 1]$. Vamos mostrar, depois, que esta condição é, de fato, satisfeita.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- (Cont.)
  - Logo, em equilíbrio, temos:

$$\widehat{\theta}_1 = \left(\frac{c}{\widehat{\theta}_2}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\theta}_2.\widehat{\theta}_1^2 = c$$

$$\widehat{\theta}_2 = \left(\frac{c}{\widehat{\theta}_1}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\theta}_1.\widehat{\theta}_2^2 = c$$

  - Portanto, segue que $\widehat{\theta}_1 = \widehat{\theta}_2$, de forma que, em equilíbrio, ambas as firmas utilizam o mesmo cutoff:

$$\theta^* = c^{1/3},$$

    com $0 < \theta^* < 1$, dada a hipótese de que $c \in (0, 1)$.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- (Cont.)
  - Assim, em equilíbrio, a estratégia da firma i, $s_i : \Theta \to \{0,1\}$, é dada por:
$$s_i(\theta_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta_i \geq \theta^* \\ 0 & \text{se } \theta_i < \theta^* \end{cases},$$
    com $\theta^* = c^{1/3}$. Portanto, cada firma desenvolve a tecnologia com probabilidade $1 - \theta^*$.
  - Em equilíbrio, ambas as firmas desenvolvem a tecnologia com prob. $(1 - \theta^*)^2$, uma única firma desenvolve com prob. $2\theta^*(1 - \theta^*)$ e nenhuma firma desenvolve com prob. θ^{*2}.

Jogos de Informação Incompleta: Equilíbrio Bayesiano

- Exemplo 3: Leilão de Segundo Preço com Informação Incompleta
  - Neste caso, vamos assumir que o valuation v_i dos jogadores é informação privada.
  - Assim como no caso de informação completa, o equilíbrio Bayesiano deste jogo é $s_i(v_i) = v_i$, i.e. a estratégia ótima de cada jogador é dar um lance exatamente igual ao seu valuation.
  - Este resultado segue do fato de que, dado o seu valuation v_i e para qualquer estratégia e tipo de seus rivais, dar um lance igual ao seu verdadeira valuation é fracamente dominante.