

Considere um sistema de dois corpos de massas m_1 e m_2 .

1. Determine as posições $\mathbf{r}'_1$ e $\mathbf{r}'_2$ dos corpos no referencial do centro de massa (CM).
2. Sendo $\mathbf{R}$ a posição do centro de massa, determine a energia cinética do sistema em função de $\dot{\mathbf{R}}$, $\dot{\mathbf{r}}'_1$ e $\dot{\mathbf{r}}'_2$.
3. Agora considere $\mathbf{r}$ a posição do corpo 2 em relação ao corpo 1. Mostre que a energia cinética é

$$T = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (1)$$

onde $M = m_1 + m_2$ e $\mu = m_1 m_2 / M$.

Considerando que as partículas estejam sujeitas unicamente a um potencial de interação entre elas,

4. Mostre que

$$\frac{d\dot{\mathbf{R}}}{dt} = 0. \quad (2)$$

de onde segue que o momento total $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ é constante.

5. Qual o número de graus de liberdade que o problema adquire quando nos restringimos ao referencial do centro de massa?
6. Mostre que para o movimento relativo a Lagrangeana é

$$L' = \frac{\mu}{2} \left[\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] - V(r). \quad (3)$$

7. Mostre que o momento é conservado.
8. Mostre que a equação do movimento é

$$\mu \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(V + \frac{l^2}{2\mu r^2} \right), \quad (4)$$

onde $l = \mu r^2 \dot{\theta}$.

Conservação de energia

9. A partir da conservação de momento angular, mostre que a área varrida pelo raio médio da órbita é constante (Segunda Lei de Kepler).
10. Usando o momento angular l , mostre que a equação do movimento é

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) + \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{dV}{dr}. \quad (5)$$

11. Mostre também que

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right). \quad (6)$$

12. Mostre que se $U = U(r)$ então $dU/dt = (\partial U/\partial r)\dot{r}$, mostre que

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{r}^2}{2}\right), \quad (7)$$

e daqui conclua a conservação de energia.

Equação diferencial da órbita

13. A partir da equação

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad (8)$$

e considerando que $\dot{r} = (dr/d\theta)\dot{\theta}$, mostre que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta}. \quad (9)$$

14. Sendo $u = 1/r$, mostre que $(du/d\theta) = -(1/r^2)(dr/d\theta)$ e portanto

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\theta}, \quad (10)$$

e portanto

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{l^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \quad (11)$$

15. Mostre que a equação da órbita fica

$$\frac{l^2 u^2}{\mu} \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] = f(1/u), \quad (12)$$

onde $f(r) = -(\partial V/\partial r)$.

O problema de Kepler

O problema da gravitação envolve uma força $f(r) = -K/r^2$, portanto temos

$$\frac{l^2 u^2}{\mu} \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - k \right] = 0, \quad (13)$$

onde $k = K\mu/l^2$.

16. Mostre que esta equação é a equação de um oscilador harmônica, isto é

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = 0, \quad (14)$$

e portanto a solução da equação da órbita fica

$$\frac{1}{r(\theta)} = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{K\mu}{l^2}. \quad (15)$$

17. Mostre que a solução pode ser escrita na forma de equação de uma cônica, isto é,

$$\frac{J}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta + \varphi), \quad (16)$$

e determine J e ε .

18. Mostre que em termos da energia mecânica E temos

$$A = \frac{K\mu}{l^2} \sqrt{1 + 2l^2 E / (\mu K^2)} \quad (17)$$

e

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2l^2 E / (\mu K^2)}. \quad (18)$$

19. Demonstre a Terceira Lei de Kepler, isto é, mostre que

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{K} a^3, \quad (19)$$

onde T é o período da órbita e a é o semi-eixo maior da elipse que descreve a órbita do planeta.