EAE 5706: Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Aula 6: Jogos Simultâneos: Equilíbrio de Nash (Aplicações)
e Equilíbrio Correlacionado

Marcos Y. Nakaguma

21/08/2017

Revisão

- Definição: Um perfil de estratégias mistas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I) \in \Delta(S)$ constitui um equilíbrio de Nash se para todo $i = 1, ..., I$,

$$u_i\,(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i})$$

para todo $\sigma_i^{'} \in \Delta(S_i)$.

- Proposição: Seja $S_i^+ \subset S_i$ o conjunto de estratégias puras às quais o jogador i atribui probabilidade positiva em $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$. Um perfil de estratégias mistas σ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, para todo $i = 1, ..., I$:

    i. $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i})$ para todo $s_i, s_i^{'} \in S_i^+$;

    ii. $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i})$ para todo $s_i \in S_i^+$ e $s_i^{'} \notin S_i^+$.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- Exemplo 1: Modelo de Bertrand (Linear e Simétrico)
  - Considere duas firmas com curvas de custo lineares e idênticas:
    $$c(q_i) = cq_i, \quad \text{com } c \geq 0$$
    A demanda de mercado é uma função contínua e decrescente em p:
    $$Q(p) > 0$$
  - Vamos mostrar que o único equilíbrio de Nash em estratégias puras é $s_1 = s_2 = c$. De fato, é imediato mostrar que este perfil de estratégias constitui um equilíbrio de Nash.
  - Para mostrar que não existe nenhum outro equilíbrio em estratégias puras, suponha, sem perda de generalidade, que $s_1 \geq s_2$, com $s_i \neq c$ para pelo menos uma firma i.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - Assim, existem três casos a serem considerados:
    1. Suponha que $s_2 > c$. Neste caso, a firma 1 poderia obter um payoff maior escolhendo $\tilde{s}_1 = s_2 - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$;
    2. Suponha que $s_2 = c$ com $s_1 > c$ (por hipótese). Neste caso, a firma 2 poderia obter payoff maior escolhendo $\tilde{s}_2 = s_1 - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$;
    3. Suponha que $s_2 < c$. Neste caso, a firma 2 está realizando um prejuízo e poderia obter um payoff maior escolhendo $\tilde{s}_2 = c$.
  - Portanto, $s_1 = s_2 = c$ é o único equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- Exemplo 2: Modelo de Bertrand (Linear e Assimétrico)
  - Suponha agora que os custos marginais das duas firmas são assimétricos:
    $$0 \leq c_1 < c_2$$
    Assuma também que $Q(p)(p - c_1)$ é estritamente crescente no intervalo $p \in [c_1, c_2 + \delta]$, com $\delta > 0$.
  - É possível mostrar que este jogo não possui equilíbrio em estratégias puras. (Note que a função de melhor resposta não é bem definida.)
  - No entanto, é possível construir um equilíbrio de Nash em estratégias mistas em que a firma 1 escolhe $s_1 = c_2$ e a firma 2 escolhe uniformemente estratégias puras no intervalo $[c_2, c_2 + \varepsilon]$ para $\varepsilon > 0$.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - A estratégia da firma 2 pode ser representada por uma função densidade cumulativa (cdf):

$$F(s_2;\varepsilon) = \frac{s_2 - c_2}{\varepsilon} \quad \text{para } s_2 \in [c_2, c_2+\varepsilon]$$

com função densidade de probabilidade (pdf):

$$f(s_2;\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{para } s_2 \in [c_2, c_2+\varepsilon]$$

  - Note que a firma 2 está jogando uma melhor resposta a $s_1 = c_2$, pois obtém lucro zero e não é capaz de aumentar o seu payoff.
  - Para mostrar que a firma 1 está atuando de maneira ótima, precisamos provar que ela não tem incentivo para desviar para $\widetilde{s}_1 \in (c_2, c_2+\varepsilon]$.
    - ★ Note que qualquer $\widetilde{s}_1 < c_2$ ou $\widetilde{s}_1 > c_2+\varepsilon$ resultaria em um payoff estritamente menor do que $s_1 = c_2$.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - Dada a estratégia da firma 2, o lucro obtido pela firma 1 ao escolher um preço, s_1, no intervalo $[c_2, c_2+\varepsilon]$ é:

$$\pi(s_1) = (1 - F(s_1;\varepsilon))(s_1 - c_1)\, Q(s_1)$$

  - Diferenciando em relação a p, obtemos:

$$\pi^{'}(s_1) = (1 - F(s_1;\varepsilon))\left[Q(s_1) + (s_1 - c_1)\, Q^{'}(s_1)\right] - f(s_1;\varepsilon)(s_1 - c_1)\, Q(s_1)$$

ou seja:

$$\pi^{'}(s_1) = \left(1 - \frac{s_1 - c_2}{\varepsilon}\right)\left[Q(s_1) + (s_1 - c_1)\, Q^{'}(s_1)\right] - \frac{1}{\varepsilon}(s_1 - c_1)\, Q(s_1)$$

  - Note que para ε suficientemente pequeno, podemos tornar os termos $\frac{s_1 - c_2}{\varepsilon}$ e $\frac{1}{\varepsilon}$ arbitrariamente grandes para qualquer $s_1 \in [c_2, c_2+\varepsilon]$.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - Assim, podemos garantir que $\pi^{'}(p) < 0$, de forma que o ótimo para a firma 1 seria, de fato, escolher $s_1 = c_2$, i.e. a solução ótima é uma solução de fronteira.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- Exemplo 3: Common Value All-Pay Auction
  - Existem I compradores de um objeto cujo valor é $v > 0$. Os compradores realizam os seus lances, $s_i \geq 0$, simultaneamente e o objeto é atribuído ao indivíduo com o maior lance.
  - Todo jogador deve pagar o valor do seu lance, independentemente de ter levado ou não o objeto. Portanto, o payoff do jogador i é $v - s_i$ se ele vence o leilão e $-s_i$ caso contrário.
  - Note que este jogo não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras, porém é possível construir um equilíbrio de Nash em estratégias mistas simétrico, em que todos os jogadores utilizam a mesma estratégia.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - Assuma que a estratégia dos jogadores seja dada por uma função densidade cumulativa (sobre possíveis lances) $F(x)$, com $F(v) = 1$, i.e. nenhum comprador dá um lance maior do que o valor do objeto.
  - Para que o jogador esteja indiferente entre todos os possíveis lances dados com probabilidade positiva, devemos ter:
  $$[F(x)]^{I-1} v - x = \overline{u}, \quad \text{para todo } x \in Supp(F)$$
  para um dado nível de utilidade constante $\overline{u}$.
  - Resolvendo para $F(x)$, obtemos:
  $$F(x) = \left(\frac{\overline{u} + x}{v}\right)^{\frac{1}{I-1}}$$

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - Como $F(v) = 1$, segue que:
  $$F(v) = \left(\frac{\overline{u} + v}{v}\right)^{\frac{1}{I-1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{u} = 0$$
  Assim, a estratégia dos jogadores é caracterizada por:
  $$F(x) = \left(\frac{x}{v}\right)^{\frac{1}{I-1}}$$
  Portanto, $Supp(F) = [0, v]$.
  - Para concluir o argumento, precisamos mostrar que todo $x \notin Supp(F)$ resulta em um payoff menor do que $\overline{u} = 0$. De fato, observe que todo lance $x > v$ gera um payoff esperado de $v - x < 0$.
  - Observe que, em equilíbrio, a competição entre os compradores faz com que eles obtenham um payoff esperado de zero.

Equilíbrio Correlacionado

Equilíbrio Correlacionado

- Até o momento, assumimos que os jogadores aleatorizam as suas estratégias de maneira independente. Nesta seção, estudaremos o conceito de equilíbrio correlacionado.

- Exemplo 1: Batalha dos Sexos
  - Um casal deve decidir entre ir a uma partida de futebol ou assistir a um concerto. Ambos querem ir a um desses eventos juntos, embora Ann prefira ir ao concerto e Bob à partida de futebol.

		Ann	
		f	c
Bob	F	$2, 6$	$0, 0$
	C	$0, 0$	$6, 2$

  - Observe que existem três equilíbrios de Nash neste jogo: (F, f), (C, c) e $(0.25F + 0.75C,\ 0.75f + 0.25c)$, com payoffs esperados de $(6, 2)$, $(2, 6)$ e $(1.5, 1.5)$, respectivamente.

Equilíbrio Correlacionado

- (Cont.)
  - Note que ambos os jogadores poderiam coordenar na seguinte estratégia: se o resultado do lançamento de uma moeda for cara, ambos vão à partida; e se for coroa, ambos vão ao concerto.
  - Dado que o outro jogador está seguindo a estratégia prescrita, nenhum deles têm incentivo para desviar desta estratégia.
  - Observe que esta estratégia gera, em expectativa, a combinação convexa dos payoffs dos dois equilíbrios de Nash em estratégias puras, $(4, 4)$, constituíndo um resultado mais equânime e que Pareto domina o equilíbrio em estratégias mistas.
  - De forma geral, o uso de um mecanismo público de aleatorização pode gerar *qualquer* combinação convexa dos payoffs de equilíbrio.

Equilíbrio Correlacionado

- O exemplo a seguir mostra que o uso de sinais privados e correlacionados pode gerar um resultado ainda melhor do que o uso de um mecanismo público.

- Exemplo 2: Batalha dos Sexos (modificada)

  - Considere o seguinte jogo:

		Ann f	Ann c
Bob	F	$5,1$	$0,0$
	C	$4,4$	$1,5$

  - Observe que existem três equilíbrios de Nash neste jogo: (F, f), (C, c) e $(0.5F + 0.5C,\ 0.5f + 0.5c)$, com payoffs esperados de $(5, 1)$, $(1, 5)$ e $(2.5, 2.5)$, respectivamente.

  - Vimos que, através do uso de um mecanismo de aleatorização público, podemos gerar qualquer combinação convexa dos payoffs de equilíbrio.

Equilíbrio Correlacionado

- (Cont.)
  - Considere agora o seguinte mecanismo: uma pessoa é contratada para lançar um dado de três faces e revelar informação da seguinte maneira: ela diz se o resultado é 1 ou $\{2, 3\}$ para Ann; e se o resultado é $\{1, 2\}$ ou 3 para Bob.

  - Note que, como os sinais privados são gerados pelo mesmo dado, eles estão correlacionados.

  - Considere as seguintes estratégias: (i) Bob joga F quando o seu sinal é 1 e C quando $\{2, 3\}$; e (ii) Ann joga f quando o seu sinal é $\{1, 2\}$ e c quando 3.

  - Assim, temos:

Dado	Resultado
1	(F, f)
2	(C, f)
3	(C, c)

Equilíbrio Correlacionado

- (Cont.)

  - Note que nenhum jogador possui incentivo para desviar das estratégias descritas acima:

    i. Se o sinal é 1, Bob sabe que Ann irá jogar f. Portanto, o melhor para ele é jogar F.

    ii. Se o sinal é $\{2, 3\}$, Bob sabe que Ann irá jogar f com prob. $0,5$ e c com prob. $0,5$. Logo, ele está indiferente entre as duas estratégias.

  - Portanto, o comportamento prescrito anteriormente é "self-enforcing" e resulta em um payoff esperado de $(3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3})$, o qual está fora do conjunto convexo gerado pelos payoffs dos equilíbrios de Nash.

Equilíbrio Correlacionado

- Definição: Uma distribuição de probabilidade $p(\cdot)$ no espaço $S = S_1 \times ... \times S_I$, é um equilíbrio correlacionado se para todo i e toda estratégia s_i escolhida com probabilidade positiva sob p, temos:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i}|s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i}|s_i) u_i(s_i^{'}, s_{-i}) \quad \forall s_i^{'} \in S_i$$

- Uma forma de interpretar esta definição é a de que todos sabem ex-ante que o mecanismo escolhe um perfil de estratégias s com probabilidade $p(s)$, mas cada jogador apenas conhece o componente de s que se refere a sua própria estratégia, s_i.

- Assim, temos um equilíbrio correlacionado se todos os jogadores preferem seguir a recomendação do mecanismo, s_i, dado que todos os demais jogadores estão seguindo as suas recomendações.

Apêndice

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Vimos anteriormente que vários jogos apresentam múltiplos equilíbrios de Nash. Nesta seção, estudaremos uma maneira sistemática de refinar nossas predições dentro do conjunto de possíveis equilíbrios.

- O refinamento de trembling-hand perfection baseia-se na ideia de que estratégias fracamente dominadas não devem ser utilizadas em equilíbrio.

- Se cada jogador acreditar que existe uma pequena probabilidade de que seus oponentes utilizem um perfil de estratégias para o qual a estratégia fracamente dominada não é uma melhor resposta, então o uso dessas estratégias não é justificável.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Exemplo: Votação em Comitê
  - Suponha que exista um número ímpar de membros em um comitê, $I > 2$, e que cada um deles deva votar simultaneamente entre duas alternativas, "Q" (status quo) e "R" (reforma).
  - A decisão do comitê é determinada por maioria e a preferência dos membros é tal que todos preferem a reforma ao status quo.
  - Um equilíbrio de Nash deste jogo é dado por um perfil de estratégias em que todos escolhem $s_i = R$, de maneira que a reforma é aprovada por unanimidade.
  - Porém, existem vários equilíbrios neste jogo. Talvez o mais implausível deles seja aquele em que todos os membros escolhem $s_i = Q$, de maneira que o status quo é mantido.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- (Cont.)
  - Note que, neste caso, dadas as estratégias dos demais jogadores, nenhum membro é capaz de influenciar a decisão do comitê, i.e. nenhum deles é pivotal.
  - Portanto, todos os membros estão indiferentes entre votar pela reforma ou pelo status quo.
  - No entanto, é razoável pensar que cada membro vote assumindo ser pivotal com alguma probabilidade. Neste caso, todos eles devem escolher $s_i = R$, pois $s_i = Q$ é fracamente dominado por $s_i = R$.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Dizemos que um equilíbrio de Nash é trembling-hand perfect se ele for "robusto" à introdução de uma pequena possibilidade de que os jogadores cometam erros ao implementarem as suas estratégias.
- Seguindo Selten (1975), dado o espaço de estratégias puras, S_i, defina:

$$\Delta_\varepsilon(S_i) = \{\sigma_i \in \Delta(S_i) : \sigma_i(s_i) \geq \varepsilon \text{ para todo } s_i \in S_i\}$$

  como o espaço de estratégias mistas "perturbado". Este é o conjunto das estratégias mistas do jogador i que atribuem pelo menos prob. $\varepsilon \geq 0$ em cada estratégia pura.
- A probabilidade ε captura a noção de que uma estratégia s_i pode ser jogada por erro pelo jogador i.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Definição: Para um jogo na forma normal $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$, definimos um jogo perturbado:

$$\Gamma_\varepsilon = [I, \{\Delta_\varepsilon(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}],$$

para uma dada escolha de $\varepsilon > 0$, com $\sum_{s_i \in S_i} \varepsilon < 1$ para todo i.

- Definição: Um equilíbrio de Nash σ do jogo $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ é trembling-hand perfect se existir uma sequência de jogos perturbados $\{\Gamma_{\varepsilon^k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergindo para Γ_N, no sentido de que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon^k = 0$, para a qual existe uma sequência associada de equilíbrios de Nash $\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$ convergindo para σ, isto é $\lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$.

Refinamento: Trembling-Hand Perfection

- Proposição: Se σ^* é um equilíbrio trembling-hand perfect, então para todo i e $s_i \in S_i$ tal que $\sigma_i^*(s_i) > 0$, s_i não é fracamente dominada.

- A proposição inversa de que todo equilíbrio de Nash não involvendo o uso de estratégias fracamente dominadas é trembling-hand perfect não é necessariamente verdadeira, i.e. o conceito de trembling-hand perfection pode excluir mais do que apenas os equilíbrios de Nash envolvendo estratégias fracamente dominadas.

- Proposição: Em um jogo com dois jogadores, se σ^* é um equilíbrio de Nash onde σ_1^* e σ_2^* não são fracamente dominadas, então σ^* é trembling-hand perfect.