Universidade de São Paulo - Instituto de Física
Complementos de Mecânica Clássica

Solução do Primeiro Exercício Trabalho

Rafael Wagner - 8540310

3 de setembro de 2016

1 Problema de força dependente do tempo

Questão: Uma partícula de massa m, em movimento unidimensional, em repouso na origem no instante $t = 0$ está submetida à uma força unidimensional $F(t) = F_0 cos(\omega t + \theta)$.
(a) Esboce a forma que se deve esperar para $v(t)$ e $x(t)$ para vários períodos de oscilação da força.
(b) Determina $v(t)$ e $x(t)$ e compare com o resultado do item anterior.

Solução:
(a) Nesse primeiro item a ideia é pensar os possíveis resultados de $v(t)$ e $x(t)$ sem obtê-los explicitamente. Sabendo que a equação diferencial de segunda ordem que devemos resolver é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0 cos(\omega t + \theta) = ma(t) \tag{1}$$

podemos observar que a aceleração dessa partícula depende do cosseno com amplitudes entre mais ou menos F_0/m. Portanto sabemos explicitamente como a aceleração se comporta no decorrer do tempo.

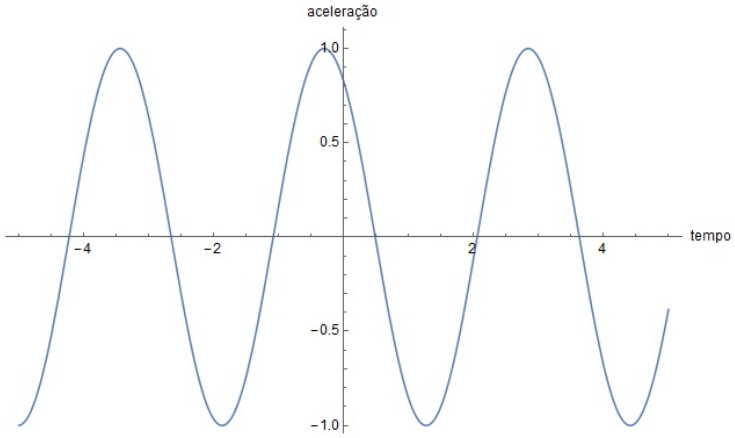

Figura 1: Esboço da aceleração em função do tempo para o valor de $\omega = 2.0 rad/s$ e $\theta = 0.5 rad$ e usando que $F_0/m = 1.0$.

Sabemos dos cursos de Cálculo o que a variação de θ e de ω fazem com a aceleração. O parâmetro θ desloca a função toda - para a esquerda ou para a direita dependendo do sinal de θ - e o parâmetro ω é a frequência, ou seja, aumenta ou diminui a oscilação da aceleração em relação ao tempo.

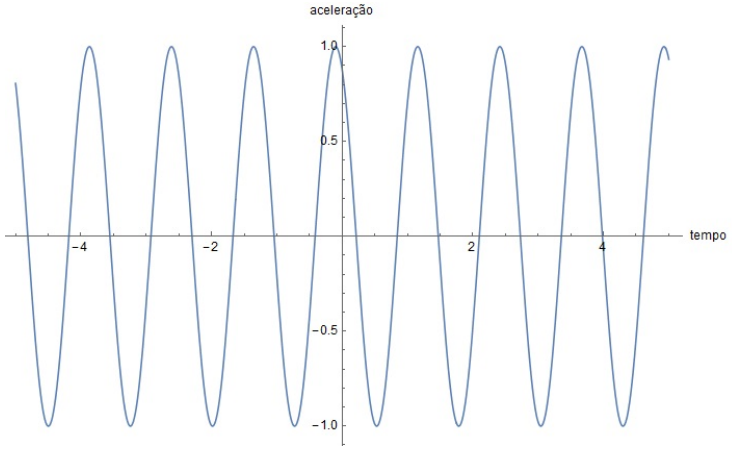

Figura 2: Mesma função que anteriormente com a diferença de que agora $\omega = 5.0 rad/s$

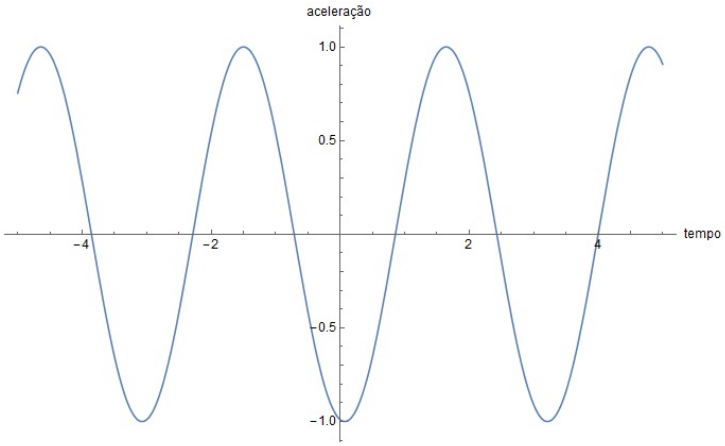

Figura 3: Mesma função que anteriormente com a diferença de que agora $\theta = 3.0 rad/s$

Esperamos que a velocidade e a posição com relação ao tempo comportem-se como, respectivamente, uma função seno com uma constante e uma função cosseno e uma constante. Não tendo uma ideia muito clara de como a variação do parâmetro θ podemos apenas supor que o fato da aceleração inicial não ser necessariamente zero trará consequências interessantes. Por exemplo, conhecemos o caso em que $\theta = 0$ solucionado pela professora em sala de aula. Nesse caso a partícula não se movimenta em média, sempre retornando à sua posição inicial. Esperamos que a solução seja algo semelhante, portanto, às funções descritas pelos gráficos abaixo:

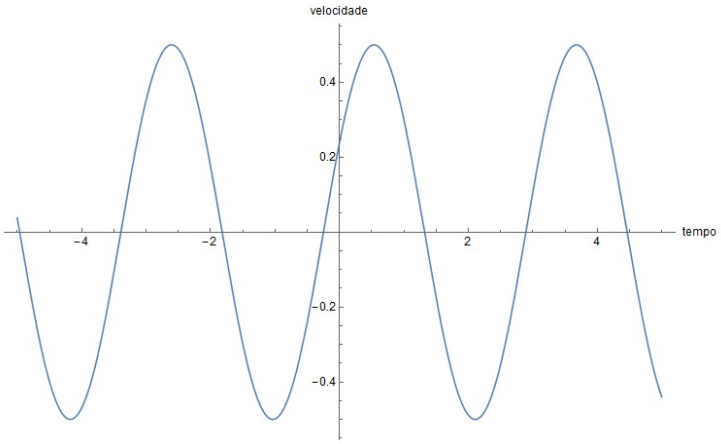

Figura 4: Uma função provável, que seja da forma de um seno com o mesmo argumento: $v(t) = sen(\omega t + \theta)/\omega$ onde aqui temos que o ômega divido deve vir de uma integração futura. Os parâmetros são $\omega = 2.0 rad/s$ e $\theta = 0.5 rad$

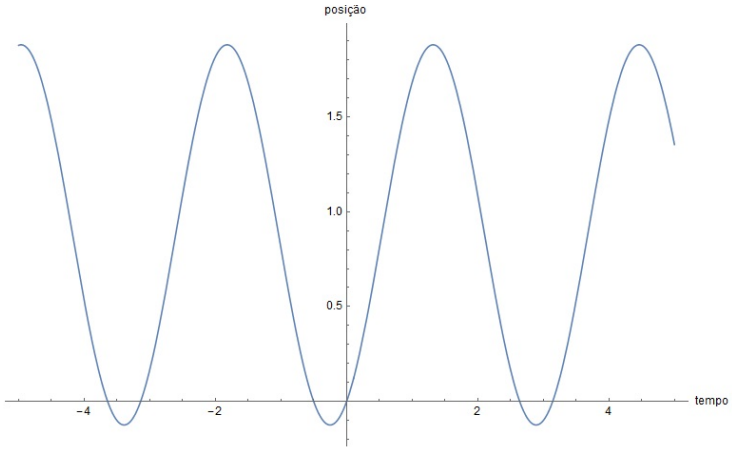

Figura 5: Novamente uma possível função da posição - mera estimativa - onde temos $x(t) = x_0 - cos(\omega t + \theta)$. Os parâmetros são $X_0 = 0.877$, metros ou centímetros, etc, $\omega = 2.0 rad/s$ e $\theta = 0.5 rad$

A única diferença é que devem existir constantes de integração de modo que a velocidade saia da origem ($v_0 = 0$) que dependerão dos parâmetros (F_0, θ, ω).

(b) Agora vamos calcular explicitamente e fazer as comparações com as nossas expectativas!

Para isso basta resolver as equações diferenciais por integração direta. A nossa equação diferencial é separável e portanto podemos transformar a equação

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 cos(\omega t + \theta) \tag{2}$$

numa equação equivalente

$$dv = \frac{F_0}{m} cos(\omega t + \theta) dt \tag{3}$$

e resolver essa equação integrando diretamente:

$$\int_{v_0=0}^{v(t)} dv' = \int_{t_0=0}^{t} \frac{F_0}{m} cos(\omega t' + \theta) dt' \tag{4}$$

$$u = \omega t' + \theta \ \ ; \ \ du = dt' \tag{5}$$

$$v(t) = \frac{F_0}{m\omega} sen(u)|_{\theta}^{\omega t+\theta} = \frac{F_0}{m\omega} sen(\omega t + \theta) - \frac{F_0}{m\omega} sen(\theta) \tag{6}$$

Note que a equação (5) respeita a condição de que $v(0) = 0$. Ela possui um termo constante devido *exclusivamente* ao parâmetro θ. Ou seja, esse parâmetro modifica a maneira como esperavamos que a $v(t)$ se comporta-se (talvez alguém tenha previsto isso antecipadamente, vai de pessoa para pessoa essa primeira parte do exercício; o importante é obter os resultados analiticamente e intepretá-los qualitativamente).
Com esse termo a nossa função $v(t)$ será transladada para cima (ou para baixo) com relação ao eixo do tempo, ou seja, a partícula possuirá velocidade em uma direção de x (positiva ou negativa) por mais tempo do que em outra.

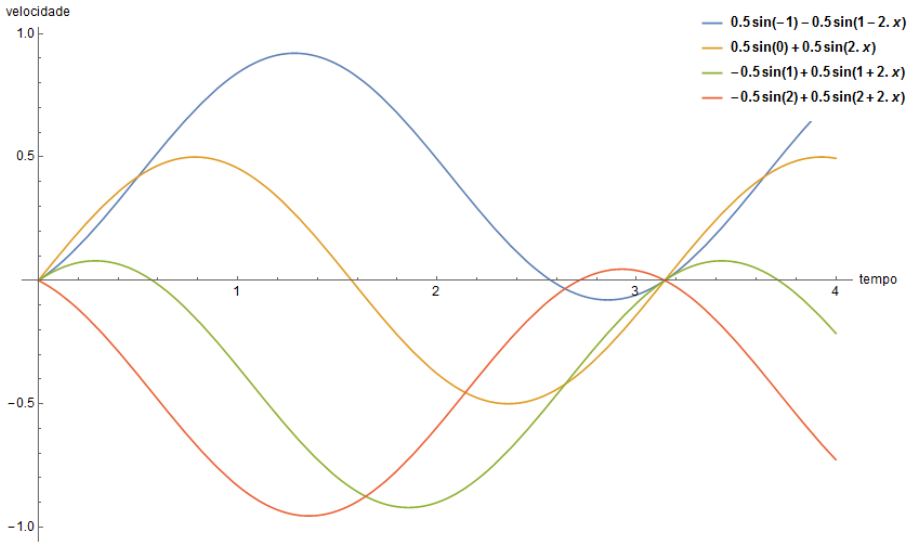

Figura 6: Com o gráfico podemos ver o efeito que a variação do parâmetro θ causa: fixamos $F_0/m = 1m/s^2$, $\omega = 2rad/s$, variamos $\theta = -1, 0, 1, 2$. Lembre que a função para a velocidade utilizada é a dada pela parte final da equação (5).

Com a figura acima fica claro o que o fator θ faz com a velocidade: quando $\theta = 0rad$ temos uma curva senoide perfeita, a partícula passa o mesmo tempo indo numa direção ou na direção contrária. Note que para a partícula com $\theta = -1.0rad$ - curva a zul - a partícula passa muito mais tempo na direção positiva do que na direção negativa. Ou seja, a partícula anda mais numa direção do que na outra!!
Encontremos por integração $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\omega} sen(\omega t + \theta) - \frac{F_0}{m\omega} sen(\theta) \tag{7}$$

o que nos leva à integração:

$$\int_{x_0=0}^{x(t)} dx' = \int_0^t \left[\frac{F_0}{m\omega} sen(\omega t' + \theta) - \frac{F_0}{m\omega} sen(\theta) \right] dt' \tag{8}$$

$$x(t) = -\frac{F_0 sen(\theta)}{m\omega} t + \frac{F_0 cos(\theta)}{m\omega^2} - \frac{F_0}{m\omega^2} cos(\omega t + \theta) \tag{9}$$

Note que a equação (9) nos mostra o que a análise da velocidade $v(t)$ indicava: como a partícula passa mais tempo com a velocidade em uma direção (positiva ou negativa do eixo) a partícula sai do lugar; no caso em que $\theta = 0$ a partícula não se move globalmente, sempre voltando ao seu ponto de partída (em $x(0) = 0$).

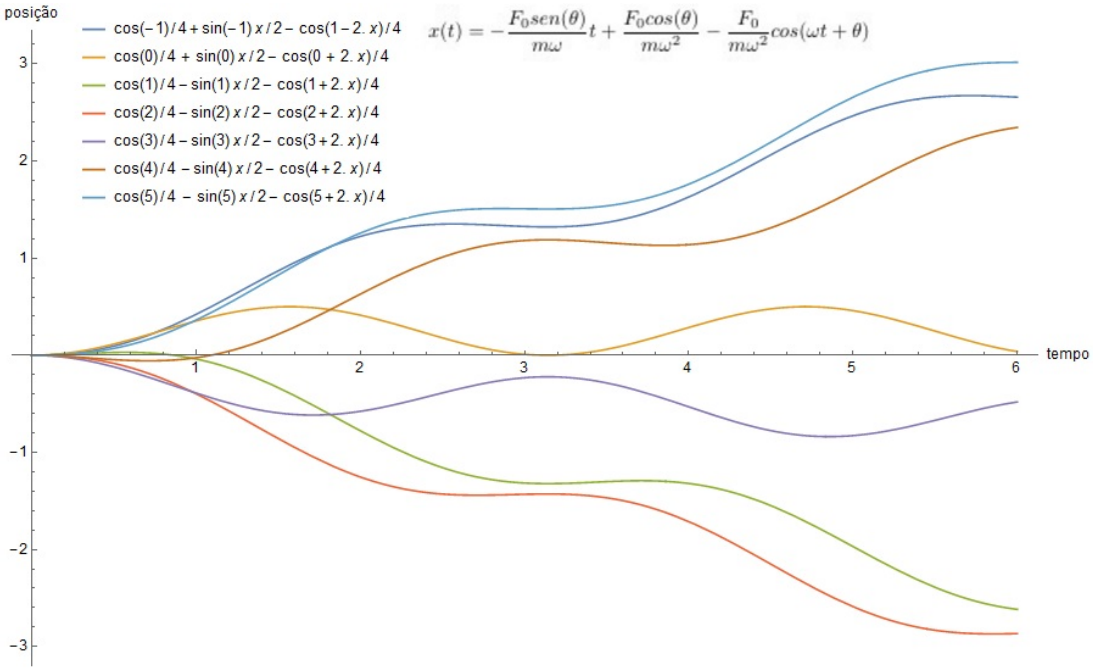

Figura 7: Nessa figura plotamos vários gráficos de $x(t)$ cada um para um parâmetro diferente de θ. Note que a partícula pode se manterindo e voltando para sua posição inicial; pode também ir na direção de mais ou menos infinito, e, dependendo do valor de θ, divergir mais rapidamente ou mais lentamente. Aqui, como anteriormente $\omega = 2.0 rad/s$, $F_0/m = 1 m/s^2$.

Com essa última análise terminamos o exercício. Note que a partícula se movimenta por causa do termo θ; o termo em $x(t)$ linear com t se deve ao valor não nulo desse parâmetro.

2 Problema de força dependente da velocidade

Questão: Um corpo é projetado verticalmente para cima em um campo gravitacional constante com uma velocidade inicial v_0. Mostre que se existir uma força retardadora proporcional ao quadrado da velocidade instantânea, a velocidade do corpo ao retornar à posição inicial será: $\frac{v_0 v_f}{\sqrt{v_0^2+v_f^2}}$ onde v_f é a velocidade final quando o movimento do corpo se torna uniforme.

Solução: **Neste exercício convencionamos usar o sentido positivo de x o sentido de subida da partícula**. Temos que o corpo é lançado verticalmente *para cima* com uma velocidade inicial $v(0) = v_0$. Esse corpo sobe até uma altura máxima x_M e em seguida cai indefinidamente.

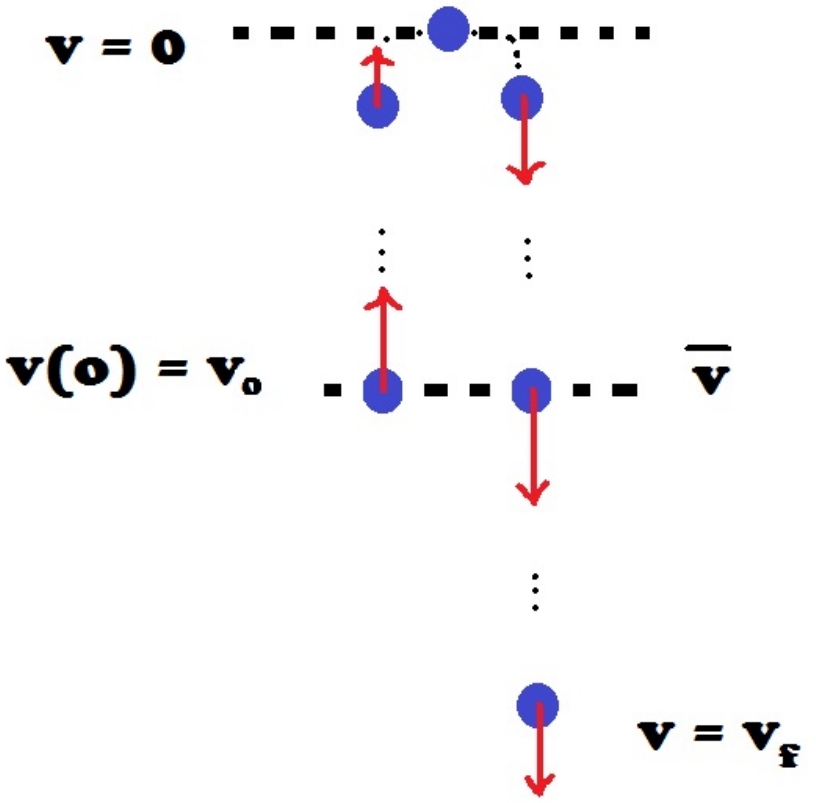

Figura 8: Essa figura é um esquema do evento físico descrito pelo exercício. A partícula é lançada para cima com uma velocidade inicial $v(0) = v_0$, sobe até que sua velocidade se anule - devido à uma força de atrito proporcional à v^2 - e em seguida re-inicia seu movimento, agora caindo indefinidamente. A velocidade v_f é a velocidade limítrofe, a partir dela a contribuição das forças de atrito e peso se igualam mantendo a partícula em velocidade constante. A velocidade $\bar{v}$ é a que o exercício pede para ser demonstrada.

Temos então que a força de atrito determinada pelo exercício é proporcional à v^2 de modo que será necessário separar o movimento da partícula em duas equações diferentes: uma para a subida e outra para a decida.

2.1 Subida

Para a subida teremos

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - bv^2 \tag{10}$$

usamos que $1 = dx/dx$ e mudamos a equação (10) para

$$\frac{dvdx}{dtdx} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = -g - \frac{b}{m}v^2 \tag{11}$$

donde podemos separar em duas equações diferenciais equivalentes e integrá-las:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'v'}{1 + \frac{bv'^2}{mg}} = -\int_{x_0=0}^{x} g dx' = -gx \tag{12}$$

Agora fazemos a mudança de variáveis $u = 1 + bv^2/mg$ donde $du = 2bvdv/mg$ e então ficamos com

$$-gx = \int_{u(v_0)}^{u(v)} \frac{mg}{2b}\frac{du'}{u'} = \frac{mg}{2b} ln(u(v)/u(v(0))) = \frac{mg}{2b} ln\left(\frac{\frac{bv^2}{mg} + 1}{\frac{bv_0^2}{mg} + 1}\right) \tag{13}$$

donde

$$e^{-2bx/m} = \frac{\frac{bv^2}{mg} + 1}{\frac{bv_0^2}{mg} + 1} \Leftrightarrow \tag{14}$$

$$v^2 = v(x)^2 = \frac{mg}{b}\left(e^{-2bx/m}\left(\frac{bv_0^2}{mg} + 1\right) - 1\right) \tag{15}$$

Essa é a solução para a velocidade em função da posição durante a *subida*. Nesse caso teremos que a velocidade se torna zero no ponto onde $x = x_M$ é a altura máxima.

$$e^{-2bx/m} = \left(\frac{bv_0^2}{mg} + 1\right)^{-1} \Leftrightarrow e^{-2bx/m} = \frac{mg}{mg + bv_0^2} \Leftrightarrow \tag{16}$$

$$\frac{-2bx}{m} = ln\left(\frac{mg}{mg + bv_0^2}\right) \Leftrightarrow \tag{17}$$

$$x = x_M = \frac{-m}{2b} ln\left(\frac{mg}{mg + bv_0^2}\right) \tag{18}$$

2.2 Descida

Agora que sabemos a altura máxima, essa será a coordenada inicial - o x_0 para a solução da descida - a qual encontraremos a solução desejada pelo exercício. Para tanto precisamos determinar a equação da velocidade v para a descida.
A equação diferencial agora será:

$$m\frac{dvv}{dx} = -mg + bv^2 \tag{19}$$

donde, usando separação das equações diferenciais independentes obteremos as seguintes integrações:

$$\int_0^v \frac{dv'v'}{\frac{bv'^2}{mg}-1} = \int_{x_M}^x g dx' = (x - x_M)g \tag{20}$$

fazendo a mudança, como anteriormente, $u = bv^2/mg - 1$ com $du = 2bvdv/mg$ o resultado ficará

$$(x - x_M)g = \int_{u(0)}^{u(v)} \frac{mg}{2b}\frac{du'}{u'} = \frac{mg}{2b} ln\left(\frac{bv^2/mg - 1}{-1}\right) = \frac{mg}{2b} ln\left(1 - \frac{bv^2}{mg}\right) \tag{21}$$

donde

$$e^{\frac{2b(x-x_M)}{m}} = 1 - \frac{bv^2}{mg} \Leftrightarrow \tag{22}$$

$$v^2 = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{\frac{2b(x-x_M)}{m}}\right) \tag{23}$$

Agora notemos que a velocidade v_f será obtida fazendo o limite de quando x tender à menos infinito

$$v_f = \lim_{x\to-\infty} v(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{mg}{b}\left(1 - e^{\frac{2b(x-x_M)}{m}}\right)} = \sqrt{\frac{mg}{b}} \tag{24}$$

Sabendo isso, agora, basta colocar $x = 0$ na equação de $v(x)$ para a descida e colocar o valor de x_M determinado anteriormente em função de v_0. Fazendo isso passo-a-passo ficaremos com a seguinte expressão:

$$x_M = \frac{-m}{2b} ln\left(\frac{mg}{mg + bv_0^2}\right) \tag{25}$$

$$v(x) = v_f\sqrt{1 - e^{\frac{-2bx_M}{m}}} \tag{26}$$

$$v(x) = \bar{v} = v_f\sqrt{1 - exp\left(\frac{-2b\left(\frac{-m}{2b} ln\left(\frac{mg}{mg+bv_0^2}\right)\right)}{m}\right)} \tag{27}$$

donde

$$\bar{v} = v_f\sqrt{1 - \frac{mg}{mg + bv_0^2}} = v_f v_0\sqrt{\frac{b}{mg + bv_0^2}} = \frac{v_f v_0}{\sqrt{\frac{mg}{b} + v_0^2}} = \frac{v_f v_0}{\sqrt{v_f^2 + v_0^2}} \tag{28}$$

portanto demonstramos que, ao voltar à posição inicial, a velocidade da partícula será $\bar{v}$ dada por:

$$\bar{v} = \frac{v_f v_0}{\sqrt{v_f^2 + v_0^2}} \tag{29}$$

Isso completa o exercício.

3 Problema de força dependente da posição

Questão: Uma partícula está sujeita à ação da força $F(x) = -kx + \frac{a}{x^3}$, onde k e a são duas constantes estritamente positivas.
(a) Determine o potencial $U(x)$, descreva a natureza das soluções e determine a solução de $x(t)$.
(b) Você pode dar uma interpretação simples do movimento quando $E^2 >> ka$, onde E é a energia total da partícula?

Solução:
(a)Para determinar o potencial basta encontrarmos uma função tal que

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{30}$$

porque o potencial é sempre determinado à menos de uma constante aditiva que pode desaparecer usando a escolha correta de um referêncial arbitrário. Nesse caso, por verificação direta é fácil ver que

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{a}{2x^2} \tag{31}$$

satisfaz que

$$-\frac{dU}{dx} = -\left(kx - \frac{a}{x^3}\right) = -kx + \frac{a}{x^3} = F(x) \tag{32}$$

Portanto determinamos o potencial $U(x)$ à qual a partícula esta sujeita.

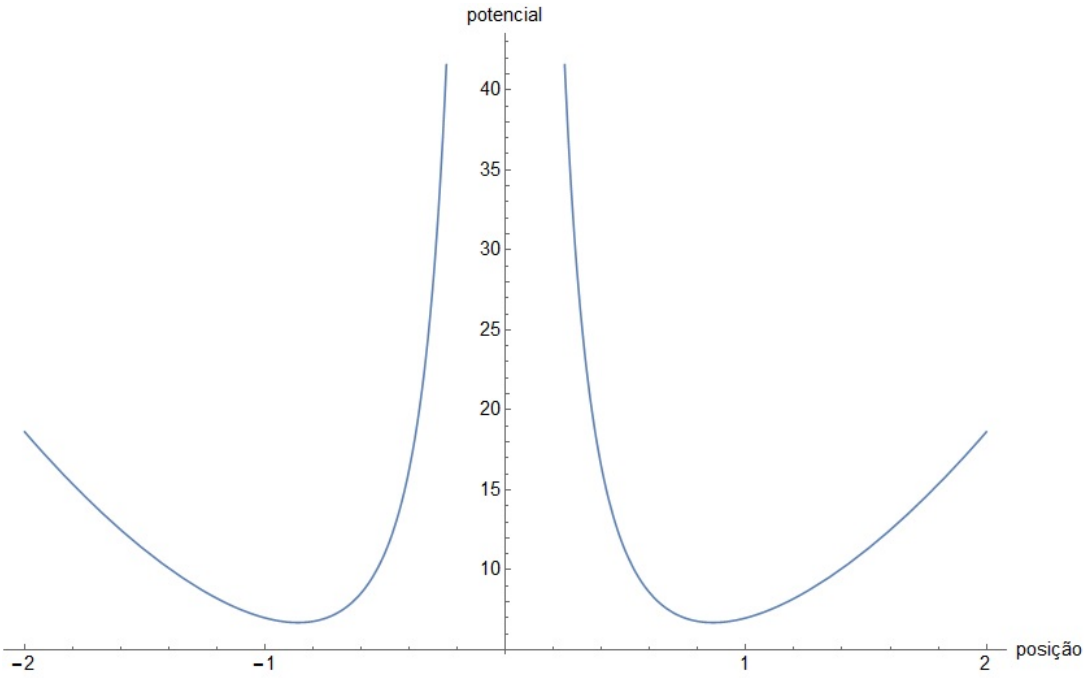

Figura 9: Esboço do potencial $U(x)$ para os parâmetros $k = 9.0$ e $a = 5.0$ - sem unidades. Note que é uma função par estritamente positiva que tende à infinito em três regiões: no zero, em mais infinito e em menos infinito.

Agora analisemos qualitativamente o que acontece para diferentes valores da condição inicial E - energia mecânica da partícula, tendo em mente que encontraremos se possível a posição $x(t)$ usando que

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x')\right)}} \tag{33}$$

3.1 $\mathbf{E \leq 0}$

Como o potencial é estritamente positivo para todo valor de x a energia, ou seja, a condição inicial

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \tag{34}$$

deve ser estritamente positiva, e de fato isso acontece, tendo em vista que v_0^2 é sempre positivo e que $U(x_0)$ também é sempre positivo. Portanto não há como $E \leq 0$.

3.2 E > 0

Pelo esboço podemos perceber que se a energia E for menor do que o valor mínimo de $U(x)$ entramos na condição $E < U(x)$ de modo que a integral se torna imaginária e o movimento não ocorre. Agora note que existe um ponto de equilíbrio estável em:

$$\frac{dU(x)}{dx} = kx - \frac{a}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \tag{35}$$

$$x^4 = \frac{a}{k} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{a}{k}} \tag{36}$$

que esta bem definido tendo em vista que a e k são constantes estritamente positivas. No esboço feito na figura 9 o ponto de equilíbrio estável é $x = (5/9)^{1/4} = 0.86334$. Podemos mostrar que é um ponto de equilíbrio estável porque a derivada é nula e a segunda derivada é positiva:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = k + 3\frac{a}{x^4} > 0 \tag{37}$$

Note que para qualquer que seja o valor da energia E o que acontece é que sempre obtemos o resultado de um oscilador, ou seja, a partícula nunca escapa. Se ela possuir energia suficiente para que a equação $E - U(x)$ seja positiva - lembre-se que se essa relação não for positiva teríamos uma velocidade imaginária, ou seja, não há movimento - então a partícula: ou está no ponto de equilíbrio estável e não se move; ou entra em uma oscilação com respeito à dois pontos. Não importa quão grande seja a energia a partícula oscila entre dois pontos cada vez mais distantes, mas oscila mesmo assim.

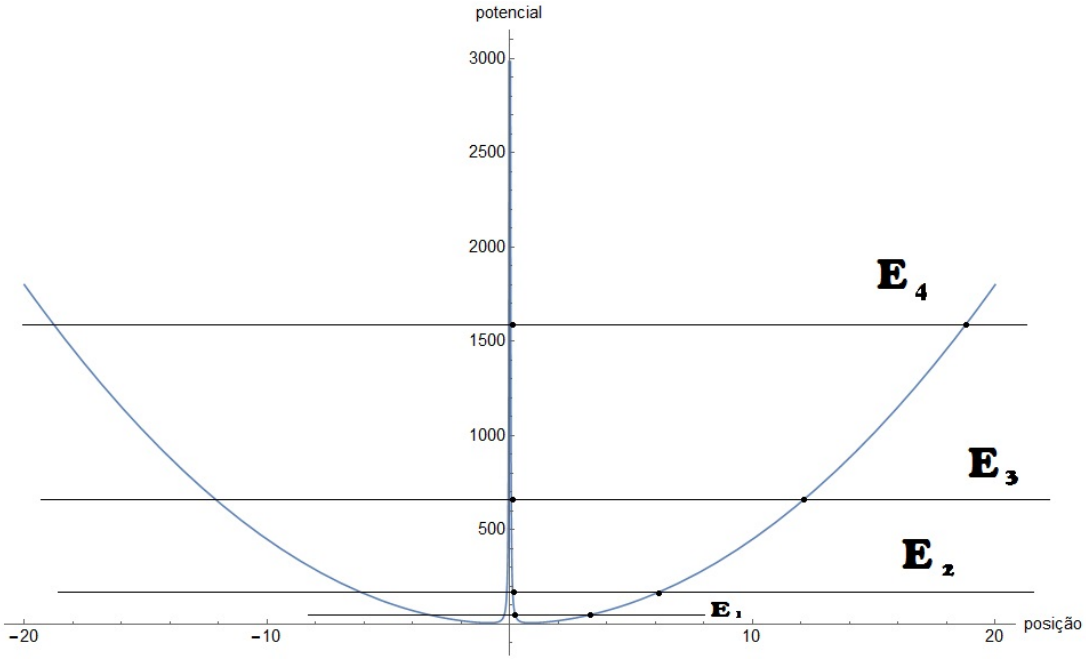

Figura 10: A mesma função plotada da figura 9 porém com a posição variando de -20 até 20. Podemos ver que não importa quão grande a energia fica: $40 < E_1 < 50$, $150 < E_2 < 200$, $600 < E_3 < 700$, $1500 < E_4 < 1600$ sempre existem dois pontos (pontos pretos na curva azul) tais que a partícula ficará presa nesses pontos e oscilará de um ponto à outro.

Por fim, para terminar o item, vamos encontrar a posição $x(t)$ explicitamente. Para isso basta resolver a integral

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - \frac{kx'^2}{2} - \frac{a}{2x'^2}}} \tag{38}$$

sem perda de generalidade podemos colocar $t_0 = 0$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2Ex'^2 - kx'^4 - a}{2x'^2}}} = \sqrt{m} \int_{x_0}^{x} \frac{x'dx'}{\sqrt{2Ex'^2 - kx'^4 - a}} \tag{39}$$

Agora note que

$$-kx^4 + 2Ex^2 - a = -k\left(x^4 - \frac{2Ex^2}{k} + \frac{a}{k}\right) = \tag{40}$$

$$= -k\left(x^4 - \frac{2Ex^2}{k} + \frac{E^2}{k^2} - \frac{E^2}{k^2} + \frac{a}{k}\right) = \tag{41}$$

$$= -k\left(\left(x^2 - \frac{E}{k}\right)^2 - \left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)\right) = \tag{42}$$

$$= k\left(\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right) - \left(x^2 - \frac{E}{k}\right)^2\right) \tag{43}$$

Colocando esse resultado na equação (39)

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^{x} \frac{x'dx'}{\sqrt{\left(\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right) - \left(x'^2 - \frac{E}{k}\right)^2\right)}} \tag{44}$$

Como $\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)$ é uma constante podemos fazer a seguinte manipulação:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)}} \int_{x_0}^{x} \frac{x'dx'}{\sqrt{\left(1 - \frac{\left(x'^2 - \frac{E}{k}\right)^2}{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)}\right)}} \tag{45}$$

E agora fazemos a mudança de variáveis

$$x^2 - \frac{E}{k} = \sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} sin(\theta) \tag{46}$$

$$2dxx = \sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} cos(\theta) d\theta \tag{47}$$

donde a integral fica

$$t = \sqrt{\frac{m}{k\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)}} \sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} \frac{cos(\theta')d\theta'}{\sqrt{1 - sen(\theta')^2}} = \tag{48}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{cos(\theta')d\theta'}{|cos(\theta')|} \tag{49}$$

Nesse caso pela transformação da fórmula (47) o $cos(\theta)$ precisa ser positivo porque xdx o é e a raiz quadrada também é positiva. Portanto ficamos com a relação simples:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}(\theta - \theta_0) \tag{50}$$

$$\theta(t) = 2t\sqrt{\frac{k}{m}} + \theta_0 \tag{51}$$

Usando a equação (46) podemos escrever portanto que $x(t)$ é dado por

$$x(t) = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} sin\left(2t\sqrt{\frac{k}{m}} + \theta_0\right) + \frac{E}{k}} \tag{52}$$

(b)Agora o exercíco pede para que interpretemos (fisicamente) o caso em que $E^2 >> ka$. A figura abaixo mostra o gráfico da $x(t)$ dada pela equação (52) com alguns parâmetros aleatórios e três casos específicos: A energia aproximadamente do mesmo valor que ka, a energia maior do que ka a energia muito maior do que ka.

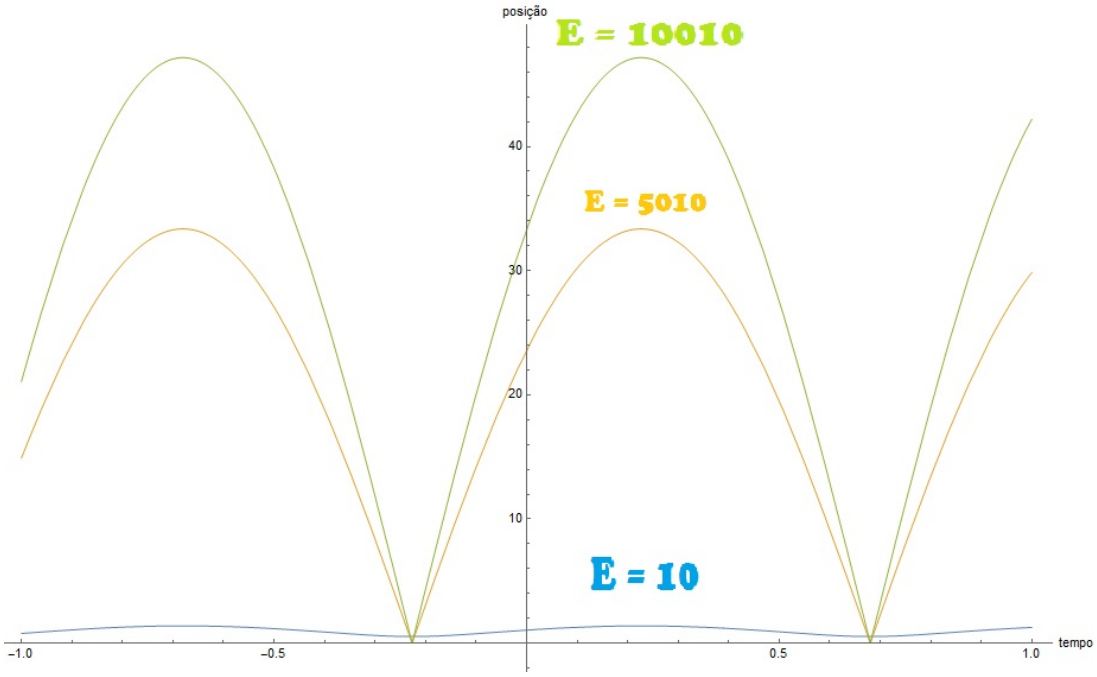

Figura 11: Três plots diferentes para a função dada pela equação 52. Os parâmetros utilizados em todos foram: $k = 9$, $a = 5$, $m = 1$, $\theta = 3$. Os valores da energia estão nas respectivas curvas com as cores de suas curvas $E_{azul} = 10$, $E_{amarelo} = 5010$, $E_{verde} = 10010$.

Com isso podemos perceber que quanto mais energia damos à partícula mais ela se aproxima da posição $x = 0$. Em contrapartida mais longe ela alcança e a sua oscilação fica cada vez mais acentuada.

Podemos fazer uma análise interessante, quando ao invés de fazer a mudança de variáveis na equação (46) de $sin(\theta)$ fizermos para $cos(\theta)$ ficariamos com as novas relações:

$$x^2 - \frac{E}{k} = \sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} cos(\theta) \tag{53}$$

$$2xdx = -\sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} sin(\theta) d\theta \tag{54}$$

E então ficamos com a relação

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \tag{55}$$

$$\theta(t) = \theta_0 - 2\sqrt{\frac{k}{m}} t \tag{56}$$

Donde determinamos a posição em função do tempo por:

$$x(t) = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} cos\left(\theta_0 - 2\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \frac{E}{k}} \tag{57}$$

Agora colocamos $\theta_0 = 2\beta_0$ donde obtemos que

$$x(t) = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} cos\left[2\left(\beta_0 - \sqrt{\frac{k}{m}} t\right)\right] + \frac{E}{k}} \tag{58}$$

Agora usamos as relações trigonométricas para fazer a seguinte mudança - colocando $\delta(t) = \beta_0 - \sqrt{k/m}t$ apenas para ficar mais claro a mudança:

$$\begin{aligned} cos(2\delta(t)) = cos^2(\delta(t)) - sen^2(\delta(t)) = \\ = 2cos^2(\delta(t)) - 1 \end{aligned} \tag{59}$$

Donde

$$1 + cos(2\delta(t)) = 2cos^2(\delta(t)) \tag{60}$$

Portanto

$$(x(t))^2 = \frac{E}{k}\left(1 + \frac{k}{E}\sqrt{\left(\frac{E^2}{k^2} - \frac{a}{k}\right)} cos(2\delta(t))\right) \tag{61}$$

$$(x(t))^2 = \frac{E}{k}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{ka}{E^2}} cos(2\delta(t))\right) \tag{62}$$

Como $E^2 >> ka$ temos que $ka/E^2 << 1$ e então podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\sqrt{1-\frac{ka}{E^2}} \approx 1 - \frac{ka}{2E^2} \tag{63}$$

Subistituindo (63) e (60) em (62) ficamos com

$$(x(t))^2 = \frac{E}{k}\left(1 + \left(1 - \frac{ka}{2E^2}\right)(2cos^2(\delta(t)) - 1)\right) \tag{64}$$

$$(x(t))^2 = \frac{E}{k}\left(1 + 2cos^2(\delta(t)) - \frac{ka}{E^2}cos(\delta(t)) + \frac{ka}{2E^2} - 1\right) \tag{65}$$

Se, agora, considerarmos que $ka/E^2 \approx 0$ teremos que

$$(x(t))^2 \approx \frac{2E}{k}cos^2(\delta(t)) \tag{66}$$

Ou seja, para um regime onde a energia mecânica é muito maior do que o produto ka a partícula se comporta como um oscilador harmônico!! Cuja amplitude é dada pela relação (67):

$$x(t) = Acos(\delta(t)) \tag{67}$$

Com $A = \sqrt{2E/k}$ e fase $\delta(t) = \beta_0 - \sqrt{k/m}t$. Note da figura 10 como, para grandes energias, o gráfico fica cada vez mais parecido com um potencial do tipo x^2.