EAE 5706: Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Aula 5: Jogos Simultâneos: Equilíbrio de Nash

Marcos Y. Nakaguma

18/08/2017

Equilíbrio de Nash

Equilíbrio de Nash

- Nesta seção, apresentamos o conceito de solução mais comum em teoria dos jogos, denominado equilíbrio de Nash.

- Definição: Um perfil de estratégias $s = (s_1, ..., s_I)$ constitui um equilíbrio de Nash em estratégias puras se para todo $i = 1, ..., I$,

$$u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$$

para todo $s_i^{'} \in S_i$.

- Em um equilíbrio de Nash, a estratégia de cada jogador deve ser uma melhor resposta para as estratégias *escolhidas* pelos seus oponentes.

Equilíbrio de Nash

- Ao contrário dos conceitos de solução estudados anteriormente, o conceito de equilíbrio de Nash se aplica a um perfil de estratégias e não a uma estratégia individual.

- O termo equilíbrio é usado para indicar que cada jogador se comporta de maneira ótima, *dadas* as estratégias de seus oponentes.

- O conceito de estratégia racionalizável apenas requere que o jogador escolha uma estratégia que seja ótima em relação a uma conjectura razoável qualquer sobre o comportamento de seus oponentes.

- O equilíbrio de Nash, por outro lado, requere que o jogador escolha a estratégia ótima em relação dadas as estratégias de fato escolhidas por seus oponentes.

Equilíbrio de Nash

- Exemplo 1: Considere o seguinte jogo simultâneo:

		Jogador 2		
		ℓ	m	r
Jogador 1	U	5, 3	0, 4	3, 5
	M	4, 0	5, 5	4, 0
	D	3, 5	0, 4	5, 3

  - O único equilíbrio de Nash em estratégias puras deste jogo é (M, m):

    i. A melhor resposta do jogador 1 a m é M;

    ii. A melhor resposta do jogador 2 a M é m.

Equilíbrio de Nash

- Exemplo 2: Considere o seguinte jogo simultâneo:

		Jogador 2			
		b_1	b_2	b_3	b_4
Jogador 1	a_1	0, 7	2, 5	7, 0	0, 1
	a_2	5, 2	3, 3	5, 2	0, 1
	a_3	7, 0	2, 5	0, 7	0, 1
	a_4	0, 0	0,-2	0, 0	10,-1

  - O único equilíbrio de Nash em estratégias puras deste jogo é (a_2, b_2):

    i. A melhor resposta do jogador 1 a b_2 é a_2;

    ii. A melhor resposta do jogador 2 a a_2 é b_2.

Equilíbrio de Nash

- Exemplo 3: Considere o seguinte jogo simultâneo:

		Jogador 2	
		Empire State	Grand Central
Jogador 1	Empire State	$100, 100$	$0, 0$
	Grand Central	$0, 0$	$100, 100$

  - Este jogo possui dois equilíbrios de Nash em estratégias puras: (*Empire State*, *Empire State*) e (*Grand Central*, *Grand Central*).
  - Note que o conceito de equilíbrio de Nash depende de maneira crucial da hipótese de expectativas mutuamente corretas.

Equilíbrio de Nash

- Uma definição mais compacta do conceito de equilíbrio de Nash pode ser dada utilizando o conceito de correspondência de melhor resposta.

- Definição: Uma correspondência $f : A \rightrightarrows \mathbb{R}^K$ é uma regra ("mapping") que atribui um conjunto $f(x) \subset \mathbb{R}^K$ para todo $x \in A$.

- Definição: A correspondência de melhor resposta de um jogador i, $b_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$, é definida por:

$$b_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i}) \text{ para todo } s_i^{'} \in S_i\}$$

Equilíbrio de Nash

- Definição: Um perfil de estrégias $(s_1, ..., s_I)$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se:

$$s_i \in b_i(s_{-i}), \qquad \text{para } i = 1, ..., I.$$

Equilíbrio de Nash: Existência

- Teorema (Existência): Suponha que todo conjunto de estratégias $S_i \subset \mathbb{R}^N$ seja não-vazio, compacto e convexo e que toda função payoff $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua em s e quasi-côncava em s_i. Então, existe um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Equilíbrio de Nash: Existência

- Defina a correspondência $b : S \rightrightarrows S$ como:

$$b(s_1, ..., s_I) = b_1(s_{-1}) \times ... \times b_I(s_{-I})$$

Assim, um equilíbrio de Nash é um perfil de estratégias s^* tal que:

$$s^* \in b(s^*)$$

Equilíbrio de Nash: Prova

- Para provar a existência de um equilíbrio de Nash, vamos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

- Lemma: Suponha que $X \subset \mathbb{R}^N$ seja um conjunto não-vazio, compacto e convexo e que $f : X \rightrightarrows X$ seja uma correspondência não-vazia, convexa e hemi-contínua superior, então existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in f(x^*)$.

- Assim, precisamos mostrar que $b : S \rightrightarrows S$ é uma correspondência não-vazia, convexa e hemi-contínua superior.

Equilíbrio de Nash: Prova

1. Para todo s, $b(s)$ é não-vazio.

   - Como u_i é uma função contínua sobre o conjunto compacto S_i, segue, pelo Teorema de Weierstrass, que $b_i(s_{-i})$ é não-vazio para todo s.

   - Logo, $b(s)$ é não-vazio para todo s.

Equilíbrio de Nash: Prova

2. Para todo s, $b(s)$ é convexo.

   - Para um dado s_{-i}, suponha que $s_i, s_i^{'} \in b_i(s_{-i})$. Por definição, segue que:
   $$\overline{u} = u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i^{'}, s_{-i})$$

   - Note que como u_i é quase-côncava, temos:
   $$u_i(\lambda s_i + (1-\lambda) s_i^{'}, s_{-i}) \geq \overline{u} \text{ para todo } \lambda \in [0,1],$$
   o que implica que $\lambda s_i + (1-\lambda) s_i^{'} \in b_i(s_{-i})$.

   - Portanto, $b_i(s_{-i})$ é convexo para todo s_{-i} e, consequentemente, $b(s)$ é convexo para todo s.

Equilíbrio de Nash: Prova

3. $b(s)$ é hemi-contínua superior.

   - Suponha que $s_i^n \to s_i$ e $s_{-i}^n \to s_{-i}$ com $s_i^n \in b_i(s_{-i}^n)$ para todo n. Gostariamos de mostrar que $s_i \in b_i(s_{-i})$.

   - Por definição, $u_i(s_i^n, s_{-i}^n) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i}^n)$ para todo $s_i^{'} \in S_i$.

   - Assim, pela continuidade de u_i, segue que $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$ para todo $s_i^{'} \in S_i$.

   - Portanto, $s_i \in b_i(s_{-i})$, de forma que b_i é hemi-contínua superior e, consequentemente, b é hemi-contínua superior.

- Assim, todas as condições do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani são satisfeitas. Logo, existe um perfil de estratégias s^* tal que $s^* \in b(s^*)$. ■

Equilíbrio de Nash:

Estratégias Mistas

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Definição: Um perfil de estratégias mistas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I) \in \Delta(S)$ constitui um equilíbrio de Nash se para todo $i = 1, ..., I$,

$$u_i\,(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i})$$

para todo $\sigma_i^{'} \in \Delta(S_i)$.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Exemplo: Considere o seguinte jogo:

		Jogador 2	
		Cara	Coroa
Jogador 1	Cara	$-1,+1$	$+1,-1$
	Coroa	$+1,-1$	$-1,+1$

  - Note que apesar de não existir nenhum equilíbrio em estratégias puras, existe um equilíbrio em estratégias mistas em que cada jogador escolhe cara ou coroa com igual probabilidade.
  - A escolha aleatória de cada jogador torna o seu oponente indiferente entre escolher cara ou coroa, de forma que ele também esteja disposto a escolher cada alternativa com igual probabilidade.
  - De fato, a indiferença entre as estratégias jogadas com probabilidade positiva é uma característica geral dos equilíbrios em estratégias mistas.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Proposição: Seja $S_i^+ \subset S_i$ o conjunto de estratégias puras às quais o jogador i atribui probabilidade positiva em $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$. Um perfil de estratégias mistas σ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, para todo $i = 1, ..., I$:

  i. $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i})$ para todo $s_i, s_i^{'} \in S_i^+$;

  ii. $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i})$ para todo $s_i \in S_i^+$ e $s_i^{'} \notin S_i^+$;

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Prova:

  ($\Rightarrow$) Suponha que σ é um equilíbrio de Nash e que uma das condições (i) ou (ii) não sejam válidas, de forma que existam estratégias $s_i \in S_i^+$ e $s_i^{'} \in S_i$ tais que:

$$u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

  - Note que, neste caso, dado σ_{-i}, o jogador i poderia aumentar o seu payoff transferindo "probabilidade" de s_i para $s_i^{'}$. Portanto, σ não poderia ser um equilíbrio de Nash.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- (Cont.)

  ($\Leftarrow$) Suponha que as condições (i) e (ii) sejam válidas, mas que σ não constitua um equilíbrio de Nash. Assim, deve existir um jogador i e uma estratégia $\sigma_i^{'}$ tais que:

$$u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

  onde:

$$u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) = \sum_{\tilde{s}_i \in S_i} \sigma_i^{'}(\tilde{s}_i) \times u_i(\tilde{s}_i, \sigma_{-i})$$

  - Desta forma, deve existir uma estratégia pura $s_i^{'} \in S_i$, utilizada com probabilidade estritamente positiva sob $\sigma_i^{'}$, tal que:

$$u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- (Cont.)
  - Da condição (i), segue que:
    $$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i, \sigma_{-i})$$
    para todo $s_i \in S_i^+$. Assim, temos que:
    $$u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i}),$$
    para todo $s_i \in S_i^+$. (Observe que $s_i^{'}$ pode pertencer ou não a S_i^+.)
  - Portanto, (i) e (ii) não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Portanto, uma condição necessária e suficiente para que um perfil de estratégias mistas seja um equilíbrio de Nash é a de que, dadas as estratégias de seus oponentes:

  i. Cada jogador esteja indiferente entre as estratégias puras às quais ele atribui probabilidade estritamente positiva; e

  ii. As estratégias puras às quais ele atribui probabilidade positiva são pelo menos tão boas quanto as estratégias puras que ele utiliza com probabilidade zero.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Corolário: Nenhuma estratégia (pura) estritamente dominada pode ser jogada com probabilidade positiva em um equilíbrio de Nash.
  - Prova: Suponha que s_i seja uma estratégia estritamente dominada. Assim, existe $s_i^{'} \in S_i$ tal que, para todo σ_{-i}, temos:
    $$u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i})$$
  - Note que não existe nenhum equilíbrio σ^* com $\sigma^*(s_i) > 0$, pois caso contrário:

    (a) Se $\sigma^*(s_i^{'}) > 0$, então a condição (i) da proposição anterior é violada;

    (b) Se $\sigma^*(s_i^{'}) = 0$, então a condição (ii) é violada.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Note que a restrição de que cada jogador esteja indiferente entre as estratégias puras que utiliza com probabilidade positiva coloca uma restrição sobre as estratégias de seus oponentes.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Exemplo: Considere novamente o seguinte jogo:

		Jogador 2	
		Empire State	Grand Central
Jogador 1	Empire State	100, 100	0, 0
	Grand Central	0, 0	1000, 1000

  - Para que o jogador 1 escolha aleatoriamente entre "Empire State" e "Grand Central", ele deve estar exatamente indiferente entre as duas alternativas.
  - Para ser satisfeita, tal condição depende da estratégia do jogador 2. Suponha que o jogador 2 escolha "Empire State" com prob. σ_2.
  - A probabilidade σ_2 que torna o jogador 1 exatamente indiferente entre as duas alternativas é tal que:

$$\underbrace{\sigma_2 100 + (1-\sigma_2)0}_{\text{"Empire State"}} = \underbrace{\sigma_2 0 + (1-\sigma_2)1000}_{\text{"Grand Central"}} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{10}{11}$$

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- (Cont.)
  - Por outro lado, para que o jogador 2 escolha aleatoriamente entre "Empire State" e "Grand Central", ele também deve estar exatamente indiferente entre as duas alternativas.
  - Utilizando argumento semelhante, podemos mostrar que para que isso ocorra o jogador 1 deve escolher "Empire State" com prob. $\sigma_1 = \frac{10}{11}$.
  - Assim, concluimos que é um equilíbrio de Nash se ambos os jogadores escolherem ir ao Empire State com probabilidade $\frac{10}{11}$.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Teorema: (Existência) Suponha que os conjuntos $S_1, ..., S_I$ possuam um número finito de elementos. Então, todo jogo tem um equilíbrio de Nash (possivelmente em estratégias mistas).
  - Prova: Dado que os conjuntos de estratégias puras, $S_1, ..., S_I$, são não vazios, finitos (e compactos), então os conjuntos das estratégias mistas, $\Delta(S_1), ..., \Delta(S_I)$, são não vazios, compactos e convexos.
  - Além disso, as funções de utilidade $u_i : \Delta(S) \to \mathbb{R}$ são dadas por:

    $$u_i(\sigma_1, ..., \sigma_I) = \sum_{s \in S} [\sigma_1(s_1) \times ... \times \sigma_I(s_I)].u_i(s)$$

    Note que u_i é contínua e quasi-linear em σ_i, dado que $u_i(\sigma)$ é linear em $u_i(s)$.
  - Assim, o teorema provado anteriormente se aplica, de forma que o equilíbrio de Nash existe.

Equilíbrio de Nash: Estratégias Mistas

- Observe que o uso de estratégias mistas em jogos finitos (i.e. em que os conjuntos de estratégias são finitos) é importante, pois, embora o espaço de estratégias puras, S, não seja convexo, a possibilidade de escolhas aleatórias serve para "convexificar" o espaço de estratégias.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- Exemplo 1: Modelo de Bertrand (Linear e Simétrico)
  - Considere duas firmas com curvas de custo lineares e idênticas:

    $$c(q_i) = cq_i, \quad \text{com } c \geq 0$$

    A demanda de mercado é uma função contínua e decrescente em p:

    $$Q(p) > 0$$

  - Vamos mostrar que o único equilíbrio de Nash em estratégias puras é $s_1 = s_2 = c$. De fato, é imediato mostrar que este perfil de estratégias constitui um equilíbrio de Nash.
  - Para mostrar que não existe nenhum outro equilíbrio em estratégias puras, suponha, sem perda de generalidade, que $s_1 \geq s_2$, com $s_i \neq c$ para pelo menos uma firma i.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - Assim, existem três casos a serem considerados:
    1. Suponha que $s_2 > c$. Neste caso, a firma 1 poderia obter um payoff maior escolhendo $\widetilde{s}_1 = s_2 - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$;
    2. Suponha que $s_2 = c$ com $s_1 > c$ (por hipótese). Neste caso, a firma 2 poderia obter payoff maior escolhendo $\widetilde{s}_2 = s_1 - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$;
    3. Suponha que $s_2 < c$. Neste caso, a firma 2 está realizando um prejuízo e poderia obter um payoff maior escolhendo $\widetilde{s}_2 = c$.
  - Portanto, $s_1 = s_2 = c$ é o único equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- Exemplo 2: Modelo de Bertrand (Linear e Assimétrico)
  - Suponha agora que os custos marginais das duas firmas são assimétricos:

    $$0 \leq c_1 < c_2$$

    Assuma também que $Q(p)(p - c_1)$ é estritamente crescente no intervalo $p \in [c_1, c_2 + \delta]$, com $\delta > 0$.
  - É possível mostrar que este jogo não possui equilíbrio em estratégias puras. (Note que a função de melhor resposta não é bem definida.)
  - No entanto, é possível construir um equilíbrio de Nash em estratégias mistas em que a firma 1 escolhe $s_1 = c_2$ e a firma 2 escolhe uniformemente estratégias puras no intervalo $[c_2, c_2 + \epsilon]$ para $\varepsilon > 0$.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - A estratégia da firma 2 pode ser representada por uma função densidade cumulativa (cdf):

$$F(s_2;\varepsilon) = \frac{s_2 - c_2}{\varepsilon} \quad \text{para } s_2 \in [c_2, c_2 + \varepsilon]$$

com função densidade de probabilidade (pdf):

$$f(s_2;\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{para } s_2 \in [c_2, c_2 + \varepsilon]$$

  - Note que a firma 2 está jogando uma melhor resposta a $s_1 = c_2$, pois obtém lucro zero e não é capaz de aumentar o seu payoff.
  - Para mostrar que a firma 1 está atuando de maneira ótima, precisamos provar que ela não tem incentivo para desviar para $\widetilde{s}_1 \in (c_2, c_2 + \varepsilon]$.
    - ★ Note que qualquer $\widetilde{s}_1 < c_2$ ou $\widetilde{s}_1 > c_2 + \varepsilon$ resultaria em um payoff estritamente menor do que $s_1 = c_2$.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - Dada a estratégia da firma 2, o lucro obtido pela firma 1 ao escolher um preço, s_1, no intervalo $[c_2, c_2 + \varepsilon]$ é:

$$\pi(s_1) = (1 - F(s_1;\varepsilon))(s_1 - c_1) Q(s_1)$$

  - Diferenciando em relação a p, obtemos:

$$\pi^{'}(s_1) = (1 - F(s_1;\varepsilon)) \left[Q(s_1) + (s_1 - c_1) Q^{'}(s_1)\right] - f(s_1;\varepsilon)(s_1 - c_1)$$

ou seja:

$$\pi^{'}(s_1) = \left(1 - \frac{s_1 - c_2}{\epsilon}\right) \left[Q(s_1) + (s_1 - c_1) Q^{'}(s_1)\right] - \frac{1}{\epsilon}(s_1 - c_1) Q(s_1)$$

  - Note que para ϵ suficientemente pequeno, podemos tornar os termos $\frac{s_1 - c_2}{\varepsilon}$ e $\frac{1}{\varepsilon}$ arbitrariamente grandes para qualquer $p \in [c_2, c_2 + \varepsilon]$.

Equilíbrio de Nash: Aplicações

- (Cont.)
  - Assim, podemos garantir que $\pi^{'}(p) < 0$, de forma que o ótimo para a firma 1 seria, de fato, escolher $s_1 = c_2$, i.e. a solução ótima é uma solução de fronteira.