EAE 5706: Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Aula 4: Jogos Simultâneos:
Estratégias Racionalizáveis e Equilíbrio de Nash

Marcos Y. Nakaguma

16/08/2017

Revisão

- Na aula passada, vimos os seguintes conceitos de dominância:
  - Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma estritamente dominante se para todo $s_i^{'} \neq s_i$ tiver-se que:
  $$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^{'}, s_{-i}), \quad \text{para todo } s_{-i} \in S_{-i}$$
  - Uma estratégia $s_i \in S_i$ é estritamente dominada se existir outra estratégia $s_i^{'} \in S_i$ tal que:
  $$u_i(s_i^{'}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \quad \text{para todo } s_{-i} \in S_{-i}.$$
  - Uma estratégia $s_i \in S_i$ é fracamente dominada se existir outra estratégia $s_i^{'} \in S_i$ tal que:
  $$u_i(s_i^{'}, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \quad \text{para todo } s_{-i} \in S_{-i}$$
  e
  $$u_i(s_i^{'}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \quad \text{para pelo menos um } s_{-i} \in S_{-i}$$

Revisão

- Para estratégias mistas, demonstramos o seguinte resultado:
  - Uma estratégia pura $s_i \in S_i$ é estritamente dominada para um jogador i se existir outra estratégia $\sigma_i^{'} \in \Delta(S_i)$ tal que:
  $$u_i(\sigma_i^{'}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \quad \text{para todo } s_{-i} \in S_{-i}$$
  - Assim, para testarmos se uma estratégia pura s_i é estritamente dominada, basta considerarmos perfis de estratégias puras $s_{-i} \in S_{-i}$ para os demais jogadores.

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

- Exemplo 1: Modelo de Cournot Linear
  - Função demanda inversa:
$$p(Q) = a - bQ$$
  - Função custo:
$$c(q_i) = cq_i$$
  - Funções payoff:
$$\begin{aligned} u_i(q_i, q_{-i}) &= [a - b(q_i + q_{-i})] q_i - cq_i \\ &= (a - c) q_i - bq_i^2 - bq_i q_{-i} \end{aligned}$$
  - Vamos mostrar que este jogo pode ser resolvido através da eliminação iterada das estratégias estritamente dominadas.

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

- (Cont.)
  - Defina as funções de reação ou melhor resposta $r_i : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ como a produção ótima da firma i dado o nível de produção da sua rival.
  - Essas funções podem ser computadas através das condições de primeira ordem do problema de maximização de lucro das firmas:
$$a - c - 2bq_i - bq_{-i} = 0 \quad \Rightarrow \quad r(q_{-i}) = \frac{a - c}{2b} - \frac{q_{-i}}{2}$$
Note que $r(\cdot)$ é uma função estritamente decrescente, i.e. quanto maior a produção do concorrente, menos a firma deseja produzir.
  - O espaço de estratégias inicial de cada firma é $S_i^0 = [0, \infty)$, mas note que produzir uma quantidade "muito" elevada pode não ser ótimo para as firmas.

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

- (Cont.)
  - De fato, qualquer produção acima de $r(0) = \frac{a-c}{2b} < \infty$ (nível de produção de monopólio) é estritamente dominada, pois a menor quantidade produzida pelo concorrente é zero.
  - Assim, eliminando as estratégias dominadas do conjunto de estratégias possíveis, obtemos $S_i^1 = [0, r(0)]$.
  - Note que, como agora o concorrente nunca produz uma quantidade maior do que $r(0)$, então qualquer produção menor do que $r^2(0) = r(r(0)) = \frac{a-c}{4b} > 0$ é estritamente dominada para a firma i.
  - Assim, eliminando iteradamente as estratégias dominadas do conjunto de estratégias possíveis, obtemos $S_i^2 = [r^2(0), r(0)]$.

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

- (Cont.)
  - Procedendo analogamente, sabemos que 0 concorrente nunca produzirá uma quantidade menor do que $r^2(0)$, de forma que qualquer produção acima de $r^3(0) = \frac{3(a-c)}{8b}$ é estritamente dominada para a firma i.
  - Assim, eliminando iteradamente as estratégias dominadas do conjunto de estratégias possíveis, obtemos $S_i^3 = [r^2(0), r^3(0)]$. E assim por diante, *ad infinitum*...
  - Note que os limites inferiores desses intervalos formam uma sequência $r^{2n}(0)$ enquanto que os limites superiores formam uma sequência $r^{2n+1}(0)$, com $n = 1, 2, \ldots$.

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

- (Cont.)
  - Em particular, temos que:

$$r^n(0) = -\frac{a-c}{b}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

    é uma série convergente, de forma que a sequência de intervalos S_i^n converge para um único ponto, i.e. $\lim_{n\to\infty} r^n(0) = \frac{a-c}{3b}$.
  - Portanto, o único perfil de estratégias que sobrevive a eliminação iterada das estratégias estritamente dominadas é $\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$.

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

- Exemplo 2: Leilão de Segundo Preço
  - Um vendedor possui um objeto indivisível.
  - Existem I compradores, com "*valuations*" $0 \leq v_1 \leq ... \leq v_I$ (conhecimento comum).
  - Os jogadores revelam seus lances, $s_i \in S_i = [0, \infty)$, simultaneamente. O indivíduo com o maior lance leva o objeto e paga o valor do segundo maior lance.
  - Para um dado perfil de estratégias $(s_1, ..., s_I) \in S$, seja $W(s) = \{k : s_k \geq s_j \text{ para qualquer } j\}$ o conjunto dos indivíduos com o maior lance. A utilidade de um jogador i é dada por:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} s_j & \text{se } s_i > \max_{j \neq i} s_j \\ \frac{1}{|W(s)|}(v_i - s_i) & \text{se } s_i = \max_{j \neq i} s_j \\ 0 & \text{se } s_i < \max_{j \neq i} s_j \end{cases}$$

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

- (Cont.)
  - Vamos mostrar que é fracamente dominante para cada jogador dar um lance igual ao seu valuation, i.e. $s_i = v_i$.
  - Suponha, primeiro, que $s_i > v_i$. Para um dado perfil de estratégias dos demais jogadores, s_{-i}, temos que:

    i. Se $s_i < \max_{j \neq i} s_j$, então $u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(v_i, s_{-i}) = 0$;

    ii. Se $\max_{j \neq i} s_j \leq v_i$, então $u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(v_i, s_{-i}) \geq 0$;

    iii. Se $v_i < \max_{j \neq i} s_j \leq s_i$, então $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(v_i, s_{-i}) = 0$.

Estratégias Dominantes e Dominadas: Aplicações

- (Cont.)
  - Suponha, em seguida, que $s_i < v_i$. Para um dado perfil de estratégias dos demais jogadores, s_{-i}, temos que:

    i. Se $v_i \leq \max_{j \neq i} s_j$, então $u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(v_i, s_{-i}) = 0$;

    ii. Se $\max_{j \neq i} s_j < s_i$, então $u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(v_i, s_{-i}) > 0$;

    iii. Se $s_i \leq \max_{j \neq i} s_j < v_i$, então $0 = u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(v_i, s_{-i})$.
  - Portanto, v_i domina fracamente qualquer $s_i \neq v_i$.
  - Assim, é razoável esperar que todos os jogadores dêem lances iguais aos seus valuations e que o indivíduo com o maior valuation vença o leilão, levando o objeto pelo valor do segundo maior valuation.

Estratégias Racionalizáveis

Estratégias Racionalizáveis

- Até aqui, vimos que estratégias estritamente dominadas podem ser eliminadas com base no argumento da racionalidade dos agentes.

- Nesta seção, veremos que podemos eliminar um conjunto ainda maior de estratégias explorando a hipótese de conhecimento comum da racionalidade.

- Em particular, introduziremos o conceito de estratégias racionalizáveis, que consistem naquelas estratégias que podem ser "racionalmente" utilizadas em um jogo.

Estratégias Racionalizáveis

- Definição: Uma estratégia $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ é uma melhor resposta a um perfil de estratégias $\sigma_{-i} \in \Pi_{j \neq i} \Delta(S_j)$ se:

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}), \text{ para todo } \sigma_i^{'} \in \Delta(S_i).$$

  Uma estratégia $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ nunca é uma melhor resposta se não existir um $\sigma_{-i} \in \Pi_{j \neq i} \Delta(S_j)$ para o qual σ_i é uma melhor resposta.

- Intuitivamente, σ_i é uma melhor resposta para σ_{-i} se ela for a escolha ótima do jogador i quando ele conjectura que os seus oponentes escolherão σ_{-i}.

- De forma análoga, σ_i nunca é uma melhor resposta se não existir nenhuma conjectura σ_{-i} sobre as estratégias dos seus oponentes que justifique a escolha de σ_i.

Estratégias Racionalizáveis

- As estratégias que nunca são uma melhor resposta também podem ser eliminadas com base na hipótese de racionalidade dos agentes. Intuitivamente, essas estratégias não são "justificáveis" sob nenhuma circunstância.
- Note que uma estratégia estritamente dominada nunca é uma melhor resposta.
- Assim, a eliminação das estratégias que nunca são uma melhor resposta também elimina todas as estratégias estritamente dominadas.
- As estratégias que sobrevivem ao processo de eliminação iterada das estratégias que nunca são uma melhor resposta são denominadas estratégias racionalizáveis.

Estratégias Racionalizáveis

- Definição: As estratégias em $\Delta(S_i)$ que sobrevivem à eliminação iterada das estratégias que nunca são uma melhor resposta são chamadas de estratégias racionalizáveis do jogador i.
- Assim como no caso das estratégias estritamente dominadas, a eliminação iterada das estratégias que nunca são uma melhor resposta não é afetada pela ordem com que as estratégias são removidas.

Estratégias Racionalizáveis

- Proposição: Em jogos com apenas dois jogadores, toda estratégia que nunca é uma melhor resposta é estritamente dominada por alguma estratégia (potencialmente mista).
- Portanto, com dois jogadores, o conjunto das estratégias que sobrevive à eliminação iterada das estratégias estritamente dominadas é igual ao conjunto das estratégias que sobrevive à eliminação das estratégias que nunca são uma melhor resposta. (Exercício 8.C.3)

Estratégias Racionalizáveis

- Exemplo: Considere o seguinte jogo:

		Jogador 2			
		b_1	b_2	b_3	b_4
	a_1	$0,7$	$2,5$	$7,0$	$0,1$
Jogador 1	a_2	$5,2$	$3,3$	$5,2$	$0,1$
	a_3	$7,0$	$2,5$	$0,7$	$0,1$
	a_4	$0,0$	$0,-2$	$0,0$	$10,-1$

  - Neste caso, o conjunto de estratégias puras racionalizáveis para o jogador 1 é $\{a_1, a_2, a_3\}$ e para o jogador 2 é $\{b_1, b_2, b_3\}$.
  - Note que para cada uma das estratégias racionalizáveis podemos construir uma cadeia de justificativas circular.

Estratégias Racionalizáveis

- (Cont.)
  - Cadeia de justificativas para a_1:

$$\boxed{a_1} \to b_1 \to a_3 \to b_3 \to \boxed{a_1}$$

  - Cadeia de justificativas para a_2:

$$\boxed{a_2} \to b_2 \to \boxed{a_2}$$

  - Cadeia de justificativas para a_3:

$$\boxed{a_3} \to b_3 \to a_1 \to b_1 \to \boxed{a_3}$$

  - Cadeia de justificativas para a_4:

$$\boxed{a_4} \to b_1 \to a_3 \to b_3 \to a_1 \to b_1 \to \ldots$$

$$\boxed{a_4} \to b_3 \to a_1 \to b_1 \to a_3 \to b_3 \to \ldots$$

Exemplo: "p-Beauty Contest"

- Cada sujeito escolhe simultaneamente um número inteiro entre 0 e 20. A média dos números escolhidos será computada e os vencedores são aqueles que tiverem escolhido o número mais próximo de $\frac{3}{4}$ da média.

- Exemplo: Considere um jogo com três participantes e suponha que as escolhas de cada um tenham sido: $s_1 = 1$, $s_2 = 5$ e $s_3 = 18$. Neste caso, a média ponderada das escolhas é:

$$\frac{1+5+18}{3} = 8$$

  Assim, temos que:

$$\frac{3}{4} \times 8 = 6$$

  Logos, o jogador 2 é o único vencedor.

Exemplo: "p-Beauty Contest"

- John Maynard Keynes (1936) descreveu o funcionamento do mercado financeiro como um concurso de beleza.
- A ideia desses concursos era que cada leitor de um jornal deveria escolher os seis rostos mais bonitos dentre uma centena de fotos.
- O prêmio do concurso seria atribuído à(s) pessoa(s) cujas escolhas tivessem sido as mais próximas das seleções realizadas pelos demais leitores.
- A descrição de Keynes sobre o mercado financeiro corresponde a uma situação em que cada investidor deseja realizar os mesmos investimentos que os demais investidores.

Exemplo: "p-Beauty Contest"

- A melhor estratégia para um investidor não é necessariamente realizar os seus investimentos com base nos "fundamentos", mas sim com base no que ele espera que os outros investidores farão.
- Na realidade, o argumento de Keynes é ainda mais sofisticado, antecipando, em grande medida, os conceitos de racionalidade e conhecimento comum formalizados pela teoria dos jogos.
- "*It is not a case of choosing those [faces] that, to the best of one's judgment, are really the prettiest, nor even those that average opinion genuinely thinks the prettiest. We have reached the third degree where we devote our intelligences to anticipating what average opinion expects the average opinion to be. And there are some, I believe, who practice the fourth, fifth and higher degrees.*" (General Theory of Employment Interest and Money, 1936).

Exemplo: "p-Beauty Contest"

- Considere um jogo com $n > 2$ jogadores, $N = \{1, ..., n\}$.
- Cada jogador deve escolher um número inteiro entre 0 e 20, $S_i = \{1, 2, ..., 20\}$.
- Os vencedores são os jogadores que tiverem escolhido o número inteiro mais próximo de $\frac{3}{4}$ da média.
- Note que podem existir mais do que um vencedor. Por exemplo, se $s_1 = s_2 = 2$ e $s_3 = 8$, então tanto 1 quanto 2 são vencedores.

Exemplo: "p-Beauty Contest"

- Formalmente, o conjunto de vencedores é dado por:

$$W = \left\{ i \in N : \arg\min_{i \in N} \left| s_i - \frac{3}{4}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_j \right| \right\}$$

- Cada jogador paga 1 para participar do jogo e os vencedores dividem igualmente o montante arrecadado. Assim, caso hajam $m \geq 1$ vencedores, o payoff de cada um deles será $\frac{n}{m} - 1$.

- Quais estratégias são racionalizáveis neste jogo?

- Intuitivamente, cada jogador deseja escolher um número menor do que a média, de forma que, caso exista alguma estratégia que nunca é uma melhor resposta, ela deve envolver a escolha de um número alto.

Exemplo: "p-Beauty Contest"

- Considere inicialmente s_i=20. Sob quais condições 20 pode ser uma melhor resposta?
  - Suponha que a sua crença é a de que a média será menor do que 20. Neste caso, a sua melhor resposta deve ser necessariamente um número menor do que 20.
  - Suponha que a sua crença é a de que a média é exatamente igual a 20, i.e. tanto você quanto os demais jogadores estão escolhendo 20.
  - Neste caso, todos os jogadores estão dividindo o montante arrecadado, de forma que você poderia aumentar o seu payoff reduzindo o número escolhido para 19, por exemplo.
  - Portanto, $s_i = 20$ nunca pode ser uma melhor resposta.

Exemplo: "p-Beauty Contest"

- Assim, após a primeira rodada de eliminação das estratégias que nunca podem ser uma melhor resposta, temos: $S_i^1 = \{0, 1, ..., 19\}$.

- Note que um argumento semelhante se aplica em cada etapa subsequente, de forma que podemos eliminar sucessivamente os maiores números de cada rodada, i.e. 19, 18, ..., 2.

- Assim, o conjunto de estratégias remanescente na 19^a rodada é $S_i^{19} = \{0, 1\}$.

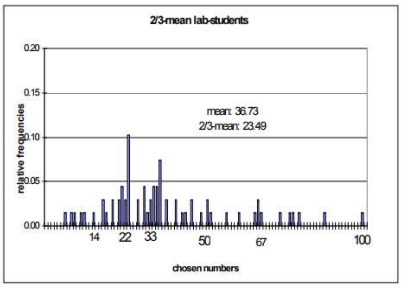
- Observe que a partir deste ponto, não podemos mais necessariamente reduzir o conjunto das estratégias dos jogadores. (Por que?)

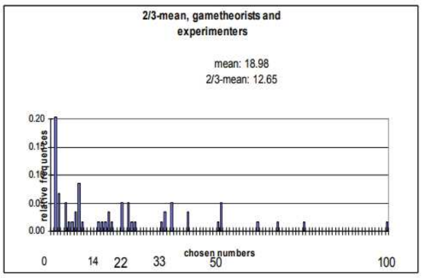
Exemplo: "p-Beauty Contest"

- Em particular, note que se $n > 2$, então ambas as estratégias remanescentes podem constituir uma melhor resposta.
  - Suponha que você espere que todos os demais jogadores escolham 1. Neste caso, escolher 1 é a sua melhor resposta.
  - Se, por outro lado, você espera que todos os demais jogadores escolham 0, então a sua melhor resposta é escolher 0.
- Assim, concluímos através do processo de eliminação iterada que nenhum jogador deve escolher um número maior do que 1. Além disso, se $n = 2$, então ambos deverão escolher 0.

Exemplo: "p-Beauty Contest"

- Nagel, R. "Unraveling in Guessing Games: An Experimental Study." *American Economic Review*, 1995.





Estratégias Racionalizáveis

- É importante notar que normalmente existirão diversas estratégias racionalizáveis, de forma que a ideia de resolver jogos com base apenas na determinação dessas estratégias constitui um conceito de solução ainda muito fraco.
- Assim, para obtermos previsões mais precisas sobre o comportamento dos agentes, teremos que impor "requisitos de equilíbrio" adicionais sobre as estratégias dos jogadores.

Equilíbrio de Nash

Equilíbrio de Nash

- Nesta seção, apresentamos o conceito de solução mais comum em teoria dos jogos, denominado equilíbrio de Nash.

- Definição: Um perfil de estratégias $s = (s_1, ..., s_I)$ constitui um equilíbrio de Nash em estratégias puras se para todo $i = 1, ..., I$,

$$u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$$

para todo $s_i^{'} \in S_i$.

- Em um equilíbrio de Nash, a estratégia de cada jogador deve ser uma melhor resposta para as estratégias *escolhidas* pelos seus oponentes.

Equilíbrio de Nash

- Ao contrário dos conceitos de solução estudados anteriormente, o conceito de equilíbrio de Nash se aplica a um perfil de estratégias e não a uma estratégia individual.

- O termo equilíbrio é usado para indicar que cada jogador se comporta de maneira ótima, *dadas* as estratégias de seus oponentes.

- O conceito de estratégia racionalizável apenas requere que o jogador escolha uma estratégia que seja ótima em relação a uma conjectura razoável qualquer sobre o comportamento de seus oponentes.

- O equilíbrio de Nash, por outro lado, requere que o jogador escolha a estratégia ótima em relação dadas as estratégias de fato escolhidas por seus oponentes.

Equilíbrio de Nash

- Exemplo 1: Considere o seguinte jogo simultâneo:

		Jogador 2		
		ℓ	m	r
Jogador 1	U	5, 3	0, 4	3, 5
	M	4, 0	5, 5	4, 0
	D	3, 5	0, 4	5, 3

  - O único equilíbrio de Nash em estratégias puras deste jogo é (M, m):
    - *i*. A melhor resposta do jogador 1 a m é M;
    - *ii*. A melhor resposta do jogador 2 a M é m.

Equilíbrio de Nash

- Exemplo 2: Considere o seguinte jogo simultâneo:

		Jogador 2			
		b_1	b_2	b_3	b_4
Jogador 1	a_1	0, 7	2, 5	7, 0	0, 1
	a_2	5, 2	3, 3	5, 2	0, 1
	a_3	7, 0	2, 5	0, 7	0, 1
	a_4	0, 0	0,-2	0, 0	10,-1

  - O único equilíbrio de Nash em estratégias puras deste jogo é (a_2, b_2):
    - *i*. A melhor resposta do jogador 1 a b_2 é a_2;
    - *ii*. A melhor resposta do jogador 2 a a_2 é b_2.

Equilíbrio de Nash

- Exemplo 3: Considere o seguinte jogo simultâneo:

		Jogador 2	
		Empire State	Grand Central
Jogador 1	Empire State	100, 100	0, 0
	Grand Central	0, 0	100, 100

  - Este jogo possui dois equilíbrios de Nash em estratégias puras: (*Empire State*, *Empire State*) e (*Grand Central*, *Grand Central*).
  - Note que o conceito de equilíbrio de Nash depende de maneira crucial da hipótese de expectativas mutuamente corretas.

Equilíbrio de Nash

- Uma definição mais compacta do conceito de equilíbrio de Nash pode ser dada utilizando o conceito de correspondência de melhor resposta.

- Definição: Uma correspondência $f : A \rightrightarrows \mathbb{R}^K$ é uma regra ("mapping") que atribui um conjunto $f(x) \subset \mathbb{R}^K$ para todo $x \in A$.

- Definição: A correspondência de melhor resposta de um jogador i, $b_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$, é definida por:

$$b_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i}) \text{ para todo } s_i^{'} \in S_i\}$$

Equilíbrio de Nash

- Definição: Um perfil de estrégias $(s_1, ..., s_I)$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se:

$$s_i \in b_i(s_{-i}), \qquad \text{para } i = 1, ..., I.$$

Equilíbrio de Nash: Existência

- Teorema (Existência): Suponha que todo conjunto de estratégias $S_i \subset \mathbb{R}^N$ seja não-vazio, compacto e convexo e que toda função payoff $u_i : S \to \mathbb{R}$ seja contínua em s e quasi-côncava em s_i. Então, existe um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Equilíbrio de Nash: Existência

- Defina a correspondência $b : S \rightrightarrows S$ como:

$$b(s_1, ..., s_I) = b_1(s_{-1}) \times ... \times b_I(s_{-I})$$

Assim, um equilíbrio de Nash é um perfil de estratégias s^* tal que:

$$s^* \in b(s^*)$$

Equilíbrio de Nash: Prova

- Para provar a existência de um equilíbrio de Nash, vamos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

- Lemma: Suponha que $X \subset \mathbb{R}^N$ seja um conjunto não-vazio, compacto e convexo e que $f : X \rightrightarrows X$ seja uma correspondência não-vazia, convexa e hemi-contínua superior, então existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in f(x^*)$.

- Assim, precisamos mostrar que $b : S \rightrightarrows S$ é uma correspondência não-vazia, convexa e hemi-contínua superior.

Equilíbrio de Nash: Prova

1. Para todo s, $b(s)$ é não-vazio.
   - Como u_i é uma função contínua sobre o conjunto compacto S_i, segue, pelo Teorema de Weierstrass, que $b_i(s_{-i})$ é não-vazio para todo s.
   - Logo, $b(s)$ é não-vazio para todo s.

Equilíbrio de Nash: Prova

2. Para todo s, $b(s)$ é convexo.

   - Para um dado s_{-i}, suponha que $s_i, s_i' \in b_i(s_{-i})$. Por definição, segue que:
   $$\overline{u} = u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i', s_{-i})$$

   - Note que como u_i é quase-côncava, temos:
   $$u_i(\lambda s_i + (1-\lambda)\, s_i', s_{-i}) \geq \overline{u} \text{ para todo } \lambda \in [0,1],$$
   o que implica que $\lambda s_i + (1-\lambda)\, s_i' \in b_i(s_{-i})$.

   - Portanto, $b_i(s_{-i})$ é convexo para todo s_{-i} e, consequentemente, $b(s)$ é convexo para todo s.

Equilíbrio de Nash: Prova

3. $b(s)$ é hemi-contínua superior.

   - Suponha que $s_i^n \longrightarrow s_i$ e $s_{-i}^n \longrightarrow s_{-i}$ com $s_i^n \in b_i(s_{-i}^n)$ para todo n. Gostariamos de mostrar que $s_i \in b_i(s_{-i})$.

   - Por definição, $u_i(s_i^n, s_{-i}^n) \geq u_i(s_i', s_{-i}^n)$ para todo $s_i' \in S_i$.

   - Assim, pela continuidade de u_i, segue que $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$ para todo $s_i' \in S_i$.

   - Portanto, $s_i \in b_i(s_{-i})$, de forma que b_i é hemi-contínua superior e, consequentemente, b é hemi-contínua superior.

- Assim, todas as condições do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani são satisfeitas. Logo, existe um perfil de estratégias s^* tal que $s^* \in b(s^*)$. ∎