MANUAL/LIVRO DE MACROECONOMIA EM CONSTRUÇÃO
CURSO DE MACROECONOMIA II
DIURNO-2 SEMESTRE-2014/2015/2016

José R. N. Chiappin-Prof. Departamento Economia-FEA-USP

02/12/2016

Contents

1 MACROECONOMIA DA ECONOMIA FECHADA 1

1.1 MODELO TEÓRICO KEYNESIANO DE ECONOMIA FECHADA: CURTO PRAZO=MODELO IS-LM 3

1.1.1 O SISTEMA DE EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO MODELO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO PARA A ECONOMIA FECHADA: VARIÁVEIS ENDÓGENAS E EXÓGENAS 4

1.1.2 O mercado monetário: a construção da LM 4

1.2 METODOLOGIA DA ESTÁTICA COMPARATIVA -TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLICITA 5

1.2.1 Estática compararativa como instrumento para o estudo do impacto de política econômica fiscal e monetária 8

1.2.2 O estudo do impacto de uma política econômica fiscal: impacto de G sobre Y. 9

1.2.3 O estudo do impacto da política fiscal G sobre a taxa de juros r 11

1.3 EXEMPLO:MODELO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO LINEAR 14

1.3.1 Política fiscal, G, e seu impacto em Y e r 15

1.3.2 Política Monetária, M, e seu impacto em Y e r 16

1.4 Construção da Curva AD 18
1.4.1 Construção da AD de modo formal 18
1.4.2 Construção da curva AD 20
1.5 A construção da curva AS 24
1.5.1 O mercado de trabalho no modelo keynesiano 24
1.5.2 A construção da curva da oferta do trabalho 27
1.5.3 A construção formal da cuva AS no modelo Keynesiano 30
1.6 A CONSTRUÇÃO DA CURVA AS NA ABORDAGEM DE BLANCHARD 32
1.6.1 A RELAÇÃO DE FIXAÇÃO DE SALÁRIOS 32
1.6.2 DETERMINAÇÃO DOS PREÇOS 34
1.6.3 A construção do modelo AS-AD por Blanchard 40
1.6.4 O modelo de Blanchard das três equações para curto e médio prazo 43
1.7 O modelo da econômica clássica: mercados em competição perfeita 48

2 MACROECONOMIA DA ECONOMIA ABERTA:MODELO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO APLICADA À ECONOMIA ABERTA 55
2.1 REGIME DE CÂMBIO 55
2.2 REGIME DE CÂMBIO FIXO 58
2.2.1 MOBILIDADE IMPERFEITA DO CAPITAL 65

3 REGIME DE CÂMBIO FLUTUANTE 81
3.1 MOBILIDADE DE CAPITAL: MOBILIDADE IMPERFEITA 82
3.1.1 Considere um politica monetária expansionista:$M_0 \rightarrow M_1 > M_0$ 83
3.1.2 Análise do impacto de uma política fiscal expansionista: $G_0 \rightarrow G_1 > G_0$ 87

3.2 IMOBILIDADE DO CAPITAL 91
3.2.1 Análise do impacto de uma política fiscal expansionista: $G_0 \to G_1 > G_0$ 94
3.2.2 Análise do impacto de uma política fiscal expansionista: $G_0 \to G_1 > G_0$ 102
3.3 REGIME DE CÂMBIO FIXO: $E = \epsilon = cte$ ou $X_\epsilon = 0$ 106
3.3.1 Mobilidade imperfeita de capital: $0 < F_r = f < \infty$ . . . 106
3.3.2 Imobilidade do capital = $F_r = f = 0$ 110
3.3.3 Mobilidade perfeita de capital: $F_r = f \to \infty$ 116
3.4 regime de câmbio flutuante: E, ou ϵ é livre para flutuar. 121
3.4.1 mobilidade imperfeita de capital $0 < F_r = f < \infty$ . . . 121
3.4.2 Imobilidade do capital: $F_r = f = 0$ 129
3.4.3 Mobilidade perfeita do capital, $F_r = f \to \infty, \to r = r*$ 134

4 TEORIA DO CRESCIMENTO ECONÔMICO 139
4.1 MODELO DE SOLOW DO CRESCIMENTO ECONÔMICO: SEM TECNOLOGIA 139
4.1.1 A função de produção 140
4.1.2 A equação da acumulação do capital-A equação fundamental do movimento de Solow 142
4.1.3 Um modelo concreto de Solow: função de produção Gobb-Douglas 148
4.1.4 Análise da equação da acumulação do capital 149
4.1.5 Condição de equilíbrio e o estado estacionário 149
4.1.6 A estabilidade do estado de equilíbrio 151
4.1.7 Análise do estado de equilíbrio 153
4.1.8 Dinâmica Transiente: dinâmica em direção ao equilíbrio 156
4.1.9 Os determinantes do capital e da produto/renda per capita no estado de equilíbrio 161

4.1.10 Estática Comparativa 163
4.1.11 Introdução aos sistemas dinâmicos e equações diferenciais ordinárias:abordagem analítica e numérica 165
4.1.12 A regra de ouro da acumulação do capital 183
4.1.13 Pressupostos do modelo de Solow: função de produção, o mercado competitivo e a AS vertical: 186
4.2 MODELO DE SOLOW COM TECNOLOGIA: INTRODUÇÃO 189
4.2.1 MODELO DE SOLOW COM TECNOLOGIA: HARROD NEUTRO 194
4.2.2 A participação da renda dos salário e do capital da renda total 202
4.2.3 A ideia, a hipótese e a controversia da convergência econômica 203
4.3 MODELO DE CRESCIMENTO DE BARRO COM GASTOS DO GOVERNO 211
4.3.1 A equação da acumulação do capital-A equação fundamental do movimento do modelo de Solow-Swan 214
4.4 TEORIAS E MODELOS DE CRESCIMENTO ENDOGENOS 223
4.4.1 MODELOS DE CRESCIMENTO ENDÓGENO: MODELO AK 223
4.4.2 MODELOS DE CRESCIMENTO ENDÓGENO: MODELO DE SCHUMPETER 229

5 OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA:PROGRAMAÇÃO CLÁSSICA, PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR E PROGRAMAÇÃO LINEAR 239

5.1 introdução: A estruturação do espaço: o espaço euclidiano de n dimensões E^n 240
5.2 Programação clássica 241

5.2.1 introdução: a construção do problema e sua representação 241
5.2.2 As condições e as técnicas de solução do problema . . . 242

6 OTIMIZAÇÃO DINÂMICA:ABORDAGEM VARIACIONAL, TEORIA DO CONTROLE E PROGRAMAÇÃO DINÂMICA 251

6.1 Abordagem variacional com os extremos fixos 251
6.1.1 As etapas para encontrar as condições de primeira ordem 253
6.2 Abordagem variacional com um dos extremos livre: as condições de transversalidade 259
6.3 As condições de segunda ordem 268
6.4 Cálculo Variacional com horizonte infinito 272
6.5 Equações Diferencias Ordinárias Lineares 274
6.5.1 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1 ordem . 274
6.5.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2 Ordem 274
6.6 Cálculo variacional com restrições 274
6.6.1 Restrições na forma de igualdades 275
6.6.2 Restrições na forma de integrais:O problema isoperimétrico 275

7 Teoria do Controle Ótimo e o Prncípio do Máximo 281

7.1 Fundamentos da condição de primeira ordem da teoria do controle ótimo denominada de Princípio de màximo 285
7.2 Sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de 1 ordem 293

8 Aplicações 295

8.1 Modelo de Solow- Ramsey: sem tecnologia 295
8.1.1 A função de produção 296
8.1.2 A equação da acumulação do capital-A equação fundamental do movimento de Solow 298

8.2 Modelo de Solow com tecnologia 306
8.3 Modelo de dois setores 306
8.4 Modelo de Diamond: overlaping generations (OLG 318
8.5 Modelos endogenos do crescimento econômico 318
8.5.1 Modelo AK 318
8.6 Modelo de Schumpeter 318

9 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA:A EQUAÇÃO RECURSIVA DE HAMILTON-JACOBI-BELMAM 319

9.1 Programação Dinâmica: abordagem discreta 324
9.2 Aplicações 324
9.3 BIBLIOGRAFIA 324

Chapter 1

MACROECONOMIA DA ECONOMIA FECHADA

MODELO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO, MODELO CLÁSSICO, MODELO KEYNESIANO DE MÉDIO PRAZO

Resumo de alguns tópicos da aula. A abordagem adotada neste manual tenta fazer uma combinação das propostas encontradas nos livros de Macroeconomia de Branson, Sargent, Blanchard, Mankiew e Carlin com a metodologia da estatica comparativa formulada com os recursos do teorema da função implicita. A principal característica é substituir ou transformar a abordagem por gráficos em uma abordagem formal da macroeconomia, segundo o modelo keynesiano, de economia fechadas e abertas no curto prazo. A metodologia da estática comparativa com o núcleo no teorema da funçaõ implicita aplicado às equações do modelo keynesiano conduz a uma representação matricial e algébrica das equações representando o impacto das variáveis endógenas nas variáveis exógenas. Com esses recursos pretende-se fundamentar também a extensão do modelo de keynes de curto prazo da economia fechada para economia aberta formalizando e estendendo a proposta do modelo de Mundel Fleming.

Assim, o principal e imediato objetivo é substituir a abordagem de gráficos adotada por todos os manuais, até onde conheço, de macroeconomia, particularmente, os manuais de Blanchard, Mankiew e Carlin pela abordagem matricial e algébrica via o teorema da função implicita. Neste contexto, o propósito é relacionar e abordar a macroeconomia com os instrumentos desenvolvidos no curso de economia matemática do primeiro ano mostrando sua aplicabilidade e utilidade mostrando a continuidade, interconexão e complementariedade e progressividade de complexidade da grade de cursos do Departamento de Economia da FEA-USP.

A abordagem do teorema da função impllicita pode também ser aplicada na microeconomia assim como na econometria mostrando a forte e robusta importancia do curso de economia matemática para o desenvolvimento dos demais e principais cursos da grade de economia. O manual não pretende substituir os livros do Blanchard nem o do Carlin adotados, mas, completar essa literatura, de tal modo a construir uma unidade instrumental de abordagens aos temas econômicos. Este manual será completado com a aplicação deste mesma abordagem para reconstruir a aplicação do modelo de Keynes para a economia fechada. Em breve estaremos disponibilizando esse material sobre o modelo keynesiano para a economia fechada.

Acreditamos proporcionar uma contribuição nesta substituição da abordagem de gráficos ao modelo keynesiano tanto para economia fechada quanto aberta com a abordagem da formalização algébrica via a utilização do teorema da função implicta e da representação matricial das equações fundamentais.

Certamente estamos ainda, mesmo com 290 páginas, num estágio provisório que será gradativo e sistematicamente completados com outras notas, passagens, e maior detalhamento.Particularmente, pretendemos deixar mais claro em cada etapa os mecanismos de transmissão das políticas econômicas analisadas que são extraídas dos fundamentos teóricos. Portanto, elas são para ser encaradas como provisórias e que serão completadas no desenvolvimento

do curso, inclusive com a colocação dos gráficos e das regras para construsão dos gráficos. A bibliografia consultada será adicionada, assim como as aplicações a problemas brasileiros.

O ponto de vista metodológico adotado aqui é que qualquer teoria econômica que se pretenda relativamente consistente e organizada teoricamente deve ser expressa por meio de um sistema de equações em que variáveis endógenas sejam determinadas em termos de variáveis exógenas. Essa determinação significa encontrar a solução, ponto de equilíbrio ou crítico ou estado estacionário, do sistema de equações que consiste em expressar as variáveis endógenas em termos de exógenas. Uma vez garantido que esse sistema de equações tenha solução que essa solução seja única ou múltipla e que seja estável, podemos estudar o comportamento do sistema em torno do ponto de equilíbrio do sistema.

Esse estudo do comportamento do sistema em torno do ponto de equilíbrio pode ser garantido pelo teorema da função implicita que proporciona as condições que devem ser preenchidas para obter diretamente a variação ou o impacto na variação das variáveis endógenas em termos da variação das variáveis exógenas.

1.1 MODELO TEÓRICO KEYNESIANO DE ECONOMIA FECHADA: CURTO PRAZO=MODELO IS-LM

No caso da economia fechada apresentamos aqui apenas uma estrutura inicial. Logo voltaremos ao tema da MacroI que é a aplicação do modelo Keynesiano de curto prazo à economia fechada.

1.1.1 O SISTEMA DE EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO MODELO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO PARA A ECONOMIA FECHADA: VARIÁVEIS ENDÓGENAS E EXÓGENAS

O mercado de bens: a construção da IS

$$\begin{cases} Y - C(Y - T(Y)) - I(r) - G = 0 & (1.1) \\ I_r < 0 & (1.2) \\ T_Y > 0 & (1.3) \\ C_Y > 0 & (1.4) \\ & (1.5) \end{cases}$$

1.1.2 O mercado monetário: a construção da LM

$$\begin{cases} \frac{M}{P} - L(Y, r) = 0 & (1.6) \\ P = cte = 1 & (1.7) \\ L_r < 0 & (1.8) \\ L_y > 0 & (1.9) \\ & (1.10) \end{cases}$$

A construção da IS-LM

$$\begin{cases} Y - C(Y - T(Y)) - I(r) - G = 0 & (1.11) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y, r) = 0 & (1.12) \\ P = cte = 1 & (1.13) \\ & (1.14) \end{cases}$$

Com as condições

$$\begin{cases} L_r < 0 & (1.15) \\ L_y > 0 & (1.16) \\ I_r < 0 & (1.17) \\ T_Y > 0 & (1.18) \\ C_Y > 0 & (1.19) \\ & (1.20) \end{cases}$$

1.2 METODOLOGIA DA ESTÁTICA COMPARATIVA -TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLICITA

Teorema da função implicita aplicado ao modelo keynesiano de curto prazo para a economia fechada:abordagem da estática comparativa para análise do impacto da política fiscal e monetária.

Como ponto de partida onsideramos a teoria econômica como formulado por um sistema de equações composta de variáveis exógenas, endógenas e parâmetros. Consideramos que o sistema de equações preenchem condições que garantem a existência de um ponto de equilíbrio.

O objetivo da estática comparativa é estudar o impacto da variação das variáveis exógenas ou dos parâmetros sobre a variação das variáveis endógenas de um modelo.Em termos de teoria econômica o objetivo é descobrir como os valores de equilíbri das variáveis endógenas de um modelo se alteram em resposta às mudanças nas variáveis ou parâmetros exógenos. Desta forma, procura-se obter as taxas de mudanças das variáveis endógenas do equilíbrio decorrente das mudanças nas variáveis exógenas ou parâmetros que aparecem nas teorias. O instrumento matemático para formalizar a estática comparativa é o teorema da função implícita.

Variáveis exógenas:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Variáveis endógenas:

$$Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

Vamos considerar a teoria econômica descrita pelo sistema de equações

$$\begin{cases} F^1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 & (1.21) \\ F^2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 & (1.22) \\ \qquad\qquad \ldots & (1.23) \\ F^n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 & (1.24) \\ & (1.25) \end{cases}$$

Se:

- as funções $F^1, \ldots, F^n$ tem derivadas parciais contínuas

- e existe um ponto $(y_{10}, y_{20}, \ldots y_{n0}, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$ que satisfaz o sistema de equações e tal que a matriz jacobiana obtida neste ponto é diferente de zero, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix}_{(y_{10},\ldots,y_{n0},x_{10},x_{20}\ldots,x_{m0})} \neq 0$$

Assim, preenchidos os requisitos do teorema da função implicita, podemos resolver a equação acima para uma vizinhança do ponto de equilíbrio, e, então estudar em torno desse ponto por meio do método da estática comparativa uma política econômica (fiscal e monetária) Seja o ponto de equilíbrio descrito pelas variaveis endógenas e exógenas:

$$(y_{10}, y_{20}, \ldots, x_{10}, \ldots, x_{m0})$$

Pode-se obter em torno de uma vizinhança deste ponto de equilíbrio, descrito por

$$(x_{10}, \ldots, x_{m0})$$

que faz o jacobiano do sistema neste ponto diferente de zero, a seguinte relação entre variáveis endógenas e exógenas.

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & (1.26) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & (1.27) \\ \quad \ldots & (1.28) \\ y_n = y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & (1.29) \end{cases}$$

O ponto de equilíbrio acima satisfaz essa relação.

Com estas condições preenchidas pode-se construir a seguinte relação dada representacao matricial para a abordagem da estática comparativa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\partial F^1}{\partial x_1} \\ \frac{-\partial F^2}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{-\partial F^n}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

1.2.1 Estática compararativa como instrumento para o estudo do impacto de política econômica fiscal e monetária

O modelo Keynesiano de curto para economia fechada se compõe da equação IS e da equação LM.

$$\begin{cases} Y - C(Y - T(Y)) - I(r) - G = 0 & (1.30) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y, r) = 0 & (1.31) \\ P = cte = 1 & (1.32) \end{cases}$$

e das condições

$$\begin{cases} L_r < 0 & (1.33) \\ L_Y > 0 & (1.34) \\ I_r < 0 & (1.35) \\ T_Y > 0 & (1.36) \\ C_Y > 0 & (1.37) \end{cases}$$

O estado de equilíbrio do mercados de bens e serviços e monetário

Pressupõe-se a existência de um estado de equilíbrio, definido pelas variáveis endógenas (y, r), ou seja, (Y_0, r_0), sob as condições dadas pelas variáveis exógenas (G_0, M_0), tal que,

$$\begin{cases} Y_0 - C(Y_0 - T(Y_0)) - I(r_0) - G_0 = 0 & (1.38) \\ \dfrac{M_0}{P} - L(Y_0, r_0) = 0 & (1.39) \\ P = cte = 1 & (1.40) \end{cases}$$

1.2.2 O estudo do impacto de uma política econômica fiscal: impacto de G sobre Y.

Aplicando o teorema da função implicita, em torno do estado de equilíbrio (Y_0, r_0), para o estudo da estática comparativa de uma política econômica fiscal obtemos a seguinte representação matricial.

O impacto da política fiscal G sobre a renda Y é representado por

$$\begin{bmatrix} & Y & r \\ F^1 & (1 - C_Y(1 - T_Y)) & -I_r \\ F^2 & -L_y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial G} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial G} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & Y & r \\ F^1 & (1 - C_Y(1 - T_Y)) & -I_r \\ F^2 & -L_Y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I_r \\ 0 & -L_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C_Y(1 - T_Y)) & -I_r \\ -L_Y & -L_r \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{-L_r}{-L_r(1 - C_Y(1 - T_Y)) - I_r L_Y} \tag{1.41}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{-L_r}{-L_r((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{I_r L_Y}{L_r})} \tag{1.42}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{I_r L_Y}{L_r})} \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{I_r L_Y}{L_r})} > 0 \tag{1.44}$$

Uma vez que

$$((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{I_r L_Y}{L_r}) > 0 \tag{1.45}$$

Conclusão que podemos extrair das relações anteriores acerca desse impacto é que se a política fiscal é expansionista $G \uparrow$ então seu impacto sobre a renda é tal que $Y \uparrow$, e, se a política fiscal é contracionista, isto é, $G \downarrow$ então seu impacto sobre a renda é tal que $Y \downarrow$.

1.2.3 O estudo do impacto da política fiscal G sobre a taxa de juros r

O impacto da política fiscal G sobre a taxa de juros r é dada por

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C_Y(1 - T_Y)) & 1 \\ -L_Y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C_Y(1 - T_Y)) & -I_r \\ -L_Y & -L_r \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{L_Y}{-L_r(1 - C_Y(1 - T_Y)) - L_Y I_r} \tag{1.46}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{L_Y}{-L_r((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{L_Y I_r}{L_r})} > 0 \tag{1.47}$$

Uma vez que

$$\begin{cases} L_Y > 0 & (1.48) \\ ((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{L_Y I_r}{L_r}) > 0 & (1.49) \\ -L_r > 0 & (1.50) \end{cases}$$

Se considerarmos que a política fiscal é expansionista, portanto, $G \uparrow$, então seu impacto sobre a taxa de juros é tal que $r \uparrow$, quando a política fiscal é contracionista, portanto, $G \downarrow$, então seu impacto sobre a taxa de juros é tal que $r \downarrow$

O impacto da política econômica monetária

$$\begin{bmatrix} & Y & r \\ F^1 & (1 - C_Y(1 - T_Y)) & -I_r \\ F^2 & -L_Y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial M} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial M} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & Y & r \\ F^1 & (1 - C_Y(1 - T_Y)) & -I_r \\ F^2 & -L_Y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -I_r \\ -1 & -L_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C_Y(1 - T_Y)) & -I_r \\ -L_Y & -L_r \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{-I_r}{-L_r((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{L_Y I_r}{L_r})} \tag{1.51}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{-I_r}{-L_r((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{L_Y I_r}{L_r})} > 0 \tag{1.52}$$

Se a política monetária for expansionita $M \uparrow$ então $Y \uparrow$.

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C_Y(1 - T_Y) & 0 \\ -L_Y & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C_Y(1 - T_Y)) & -I_r \\ -L_Y & -L_r \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1 - C_Y(1 - T_Y))}{-L_r((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{L_Y I_r}{L_r})} \tag{1.53}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1 - C_Y(1 - T_Y))}{-L_r((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{L_Y I_r}{L_r})} < 0 \tag{1.54}$$

1.3 EXEMPLO:MODELO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO LINEAR

$$\begin{cases} Y - C(Y-T) - I(r) - G = 0 & (1.55) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y,r) = 0 & (1.56) \end{cases}$$

Escrevendo as relações lineares para os componentes do modelo, temos

$$\begin{cases} C(Yd) = a + b.Y_d & (1.57) \\ Y_d = Y - T & (1.58) \\ T = -d + t.Y & (1.59) \\ I(r) = I_0 - g.r & (1.60) \\ L(y,r) = k.y - l.r & (1.61) \\ P = cte & (1.62) \end{cases}$$

Fazendo algumas substituições deste conjunto de relações no sistema de duas equações acima, obtemos

$$\begin{cases} Y = a + b(Y + d - tY) + I_0 - g_1 r + G_0 & (1.63) \\ \dfrac{M}{P} = k.y - l.r & (1.64) \\ P = cte & (1.65) \end{cases}$$

reorganizando as duas equações

$$\begin{cases} Y - bY + btY + a - bd - I_0 + g_1 r - G_0 = 0 & (1.66) \\ \dfrac{M}{P} - k.y + l.r = 0 & (1.67) \\ P = cte & (1.68) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(1-b(1-t))+a-bd-I_0+g_1r-G_0=0 & (1.69) \\ \dfrac{M}{P}-k.y+l.r=0 & (1.70) \\ P=cte & (1.71) \end{cases}$$

Com as variáveis endogenas, Y, r, e as variáveis exógenas, G, M, e, P=cte, podemos estudar o impacto, com a ajuda do teorema da função implícita, das políticas econômicas sobre as variávies endógenas, em torno do estado de equilíbrio, e, avaliar se são políticas efetivas nos sentido de levar o sistema para o estado de equilíbrio de pleno emprego. O equilíbrio de pleno emprego é o equilíbrio quando os preços do sistema econômico, são considerados livres para se ajustar. Neste caso o sistema econômico, na abordagem clássica, é considerado ser formado do mercado de bens e serviço, do mercado monetário, e, do mercado de trabalho, todos interpretados como mercados de competição perfeita.

1.3.1 Política fiscal, G, e seu impacto em Y e r

$$\begin{bmatrix} & Y & r \\ F^1 & (1-b(1-t) & g_1 \\ F^2 & -k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Y}{\partial G} \\ \dfrac{\partial r}{\partial G} \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & g_1 \\ 0 & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)) & g_1 \\ -k & l \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{l}{l(1-b(1-t)) + kg_1} \tag{1.72}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{((1-b(1-t)) + \frac{kg_1}{l})} > 0 \tag{1.73}$$

Uma vez que

$$((1-b(1-t)) + \frac{kg_1}{l}) > 0 \tag{1.74}$$

1.3.2 Política Monetária, M, e seu impacto em Y e r

A representação matricial desta política é dada pela relação

$$\begin{bmatrix} & Y & r \\ F^1 & (1-b(1-t) & g_1 \\ F^2 & -k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{P} \end{bmatrix}$$

Considere uma política monetária expansionista, isto é, $M \uparrow$. O impacto de desta política sobre as variável endógena, Y, pode ser obtida, fazendo

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & g_1 \\ -\frac{1}{P} & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)) & g_1 \\ -k & l \end{vmatrix}}$$

A relação matricial captura o mecanismo de transmissão da política monetária que envolve a combinação do mercado de produto, com a relação IS, com o mercado monetário, com a relação LM. A combinação dos dois mercados é dada pela curva da Demanda Agregada, AD que veremos mais tarde.

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{(\frac{1}{P})g_1}{l(1-b(1-t)) + kg_1} \tag{1.75}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{(\frac{1}{P})g_1}{l(1-b(1-t)) + kg_1} > 0 \tag{1.76}$$

Uma vez que

$$(1-b(1-t)) > 0 \tag{1.77}$$

e que

$$(l(1-b(1-t)) + kg_1) > 0 \tag{1.78}$$

Desta forma, se $M \uparrow$, então $Y \uparrow$. O impacto desta política monetária sobre a taxa de juros é capturada pela relação matricial

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)) & 0 \\ -k & -\frac{1}{P} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)) & g_1 \\ -k & l \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(\frac{1}{P})(1-b(1-t))}{l(1-b(1-t))+kg_1} \tag{1.79}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(\frac{1}{P})(1-b(1-t))}{l(1-b(1-t))+kg_1} < 0 \tag{1.80}$$

Uma vez que

$$(1-b(1-t)) > 0 \tag{1.81}$$

e que

$$(l(1-b(1-t))+kg_1) > 0 \tag{1.82}$$

Desta forma, se $M \uparrow$ então $r \downarrow$.

1.4 Construção da Curva AD

1.4.1 Construção da AD de modo formal

$$\begin{cases} Y - C(Y-T(Y)) - I(r) - G = 0 & (1.83) \\ \frac{M}{P} - L(Y,r) = 0 & (1.84) \end{cases}$$

Vamos considerar o preço, P, como uma variável exógena, e obter a inclinação da curva AD dada por

$$(\frac{\partial Y}{\partial P})_M \tag{1.85}$$

$$\begin{bmatrix} & Y & r \\ F^1 & (1-C_Y(1-T_Y)) & -I_r \\ F^2 & -L_Y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial P} \\ \frac{\partial r}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial P} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial P} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & Y & r \\ F^1 & (1-C_Y(1-T_Y)) & -I_r \\ F^2 & -L_Y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial P} \\ \frac{\partial r}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{-M}{P^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -I_r \\ \frac{M}{P^2} & -L_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C_Y(1-T_Y)) & -I_r \\ -L_Y & -L_r \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{I_r(\frac{M}{P^2})}{-L_r(1-C_Y(1-T_Y)) - L_Y I_r} \tag{1.86}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{I_r(\frac{M}{P^2})}{-L_r[((1-C_Y(1-T_Y)) + \frac{L_Y I_r}{L_r})]} \tag{1.87}$$

Como

$$\begin{cases} \frac{L_r}{I_r}((1-C_Y(1-T_Y)) + L_Y > 0 & (1.88) \\ \frac{M}{P^2} > 0 & (1.89) \end{cases}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{-(\frac{M}{P^2})}{\frac{L_r}{I_r}[((1 - C_Y(1 - T_Y)) + \frac{L_Y I_r}{L_r}]} < 0 \tag{1.90}$$

Desta forma, a relação $Y = Y(P)$ é uma relação de demanda formando, portanto, a demanda agregada do modelo keynesiano.

1.4.2 Construção da curva AD

Modelo keynesiano de curto prazo linear

Na construção da Curva AD, ou seja, da relação $Y = Y(P)$ do modelo keynesiano de curto prazo vamos inicialmente utilizar o modelo linear definido acima.

$$\begin{cases} Y - C(Y - T) - I(r) - G = 0 & (1.91) \\ \frac{M}{P} - L(Y, r) = 0 & (1.92) \\ P = cte & (1.93) \end{cases}$$

Escrevendo as relações lineares para os componentes do modelo, temos

$$\begin{cases} C(Yd) = a + b.Y_d & (1.94) \\ Y_d = Y - T & (1.95) \\ T = -d + t.Y & (1.96) \\ I(r) = I_0 - g.r & (1.97) \\ L(y,r) = k.y - l.r & (1.98) \\ P = cte & (1.99) \end{cases}$$

Fazendo algumas substituições deste conjunto de relações no sistema de duas equações acima, obtemos

$$\begin{cases} Y = a + b(Y + d - tY) + I_0 - g_1 r + G_0 & (1.100) \\ \dfrac{M}{P} = k.y - l.r & (1.101) \\ P = cte & (1.102) \end{cases}$$

reorganizando as duas equações

$$\begin{cases} Y - bY + btY - a - bd - I_0 + g_1 r - G_0 = 0 & (1.103) \\ \dfrac{M}{P} - k.y + l.r = 0 & (1.104) \\ P = cte & (1.105) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(1 - b(1-t)) = a + bd + I_0 - g_1 r + G_0 & (1.106) \\ \dfrac{M}{P} = k.y + l.r & (1.107) \\ P = cte & (1.108) \end{cases}$$

Da primeira equação escrevemos a equação IS,ou seja,

$$Y = \frac{1}{(1 - b(1-t))}[a + bd + I_0 + G_0 - g_1 r] \tag{1.109}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{(1 - b(1-t))} & (1.110) \\ DA_0 = a + bd + I_0 + G_0 & (1.111) \\ & (1.112) \end{cases}$$

Podemos reescrever a IS como

$$Y = \alpha DA_0 - \alpha g_1 r \tag{1.113}$$

ou ainda

$$r = \frac{DA_0}{g_1} - \frac{1}{\alpha g_1} Y \tag{1.114}$$

Na sequencia, construímos a função LM

$$Y = \frac{M}{kP} + \frac{l}{k} r \tag{1.115}$$

ou

$$r = \frac{k}{l} - \frac{M}{lP} \tag{1.116}$$

Podemos obter a função DA, que se encontra na literatura, eliminando a taxa de juros, r, de ambas as equações, IS, LM, o que nos dá

$$Y = \frac{l\alpha g_1}{(k\alpha g_1 + l)}[\frac{DA_0}{g_1} + \frac{M}{lP}] \tag{1.117}$$

Simplificando

$$Y = \frac{l\alpha}{k\alpha g_1 + l} DA_0 + \frac{\alpha g_1 M}{k\alpha g_1 + l}(\frac{1}{P}) \tag{1.118}$$

Fazendo

$$\beta = \frac{\alpha}{k\alpha g_1 + l} \tag{1.119}$$

reescrevemos a função Demanda Agregada, DA, como

$$Y = l\beta DA_0 + g_1\beta(\frac{M}{P}) \tag{1.120}$$

Podemos, agora, obter, a política fiscal,ou seja, o estudo do impacto de G em Y ou em r, a partir da função Demanda Agregada, que contem a combinação das funções IS e LM. Derivando Y relativamente a G da função Demanda Agregada,mas, mantendo M constante, obtemos

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = l\beta = l\frac{\alpha}{k\alpha g_1 + l} = \frac{l}{kg_1 + \frac{l}{\alpha}} \tag{1.121}$$

Se substituirmos α por seu valor definido anteriormente,e, poucas manipulações algébricas, o resultado que obtemos é o mesmo obtido acima pelo método da estática comparativa,ou seja,

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{((1 - b(1 - t)) + \frac{kg_1}{l})} > 0 \tag{1.122}$$

Desta forma, podemos observar que a representação matricial do modelo keynesiano obtido por meio do método da estática comparativa dá de forma direta o resultado do mecanismo de transmissão da política econômica em questão, no caso, a política fiscal, ou seja, se $G \uparrow$ então $Y \uparrow$.

1.5 A construção da curva AS

A curva AS é uma curva que é obtida no mercado de trabalho junto com a pressuposição de os agentes econômicos são racionais e que temos uma função de produção relacionando a produção com os fatores de produção.

1.5.1 O mercado de trabalho no modelo keynesiano

A construção da curva da demanda do trabalho

O objetivo é a construção da curva AS. Essa construção se dá no mercado de trabalho com a construção da função da demanda do trabalho e da função da oferta de trabalho e tem como pressuposto uma funçao de produção. A construção da função da demanda do trabalho no modelo keynesiano é obtida do estudo do comportamento das empresas num mercado em que há empresas monopolistas assim como empresas que se comportam como se estivesse em um mercado de competição perfeita.

Como os agentes econômicos são racionais, portanto maximizadoras, temos que as empresas buscam maximizar seus lucros. Deste comportamento, junto com a funão de produção, podemos extrair a função demanda por trabalho.

No caso de uma empresa que se comporta como em um mercado de competição perfeita, temos, com o preço do produto dado, e também dos insumos,

$$max_L PY(L, \bar{K}) - (wL + r\bar{k}) \tag{1.123}$$

$$\frac{W}{P} = \frac{\partial Y}{\partial L} = f(L) \tag{1.124}$$

Considerando uma empresa monopolista no mercado de trabalho temos que a empresa está em face de uma função demanda P(Y) e qua a condição de máximo se dá quando

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\partial C(Y)}{\partial L} \tag{1.125}$$

Desta forma, escrevemos

$$max_L R(Y) = max_L(P(Y(L, \bar{k}))Y(L, \bar{K}) \tag{1.126}$$

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\partial P}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial L}.Y + P(Y)\frac{\partial Y}{\partial L} \tag{1.127}$$

$$\frac{\partial R}{\partial L} = P(Y)(\frac{\partial P}{\partial Y}\frac{Y}{P} + 1)\frac{\partial Y}{\partial L} \tag{1.128}$$

$$\frac{\partial R}{\partial L} = P(Y)(1 + \frac{1}{\epsilon(Y)})\frac{\partial Y}{\partial L} \tag{1.129}$$

Como

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\partial C}{\partial L} = W \tag{1.130}$$

segue-se que

$$W = P(Y)(1 + \frac{1}{\epsilon(Y)})\frac{\partial Y}{\partial L} \tag{1.131}$$

$$\frac{W}{P} = (1 + \frac{1}{\epsilon(Y)})\frac{\partial Y}{\partial L} \tag{1.132}$$

Esta última equação mostra que, no caso de uma empresa monopolista, a função demanda é a mesma do mercado de competição perfeita, contudo, com um deslocamento proporcionado pelo componente envolvendo a elasticidade do mercado, que denominamos, de "markup"$= (1 + \frac{1}{\epsilon(Y)})$. Como $\frac{\partial Y}{\partial L} > 0$

uma vez que a produção aumenta com o aumento da mão de obra ainda que cada vez menos.

Desta forma, podemo escrever essa função como

$$\frac{W}{P} = f(L) \tag{1.133}$$

ou

$$W = Pf(L) \tag{1.134}$$

com $f'(L) < 0$, pois

$$f(L) \propto \frac{\partial Y}{\partial L} \tag{1.135}$$

então,

$$f'(L) \propto \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0 \tag{1.136}$$

Isto representa os retornos decrescente da mão de obra que é a propriedade da função produção.Temos assim uma função demanda, uma vez que $f'(L)$ representa a tangente à curva da função demanda.

Na sequência pode-se construir a curva da oferta de trabalho do modelo keynesiano no mercado de trabalho. A curva da oferta de trabalho decorre do agente indivíduo como agente racional escolhendo entre distribuir suas horas entre horas de trabalho e horas de lazer, levando em conta as flutuações do nível de preços da economia.

O indivíduo, como agente racional, gera expectativas de preços em função das flutuações no nível de preços.

1.5.2 A construção da curva da oferta do trabalho

A construção da curva da oferta de trabalho é estratégico para entender como nos deslocamos de uma concepção keynesiana de curto prazo para uma concepção de médio prazo envolvendo expectativas.

A curva da oferta é obtida a partir do estudo da conduta dos indivíduos como agentes racionais ofertantes de trabalho, e, portanto, tomando decisões entre oferta de trabalho ou lazer, ou descanso, D, dado os salarios e as expectativas de preços.

$$\begin{cases} max_L U(Y^e, D) & (1.137) \\ \text{s.a} \quad Y^e = \dfrac{W}{P^e}(T - D) & (1.138) \\ & (1.139) \end{cases}$$

onde[1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial Y^e} > 0 & (1.140) \\ \dfrac{\partial U}{\partial D} > 0 & (1.141) \\ & (1.142) \end{cases}$$

O resultado desta maximização é a curva da oferta de trabalho por parte do indivíduo que pode ser descrita como

$$\frac{W}{P^e} = w^e = g(L) \tag{1.143}$$

Como não poderia deixar de ser, para uma função oferta, devemos ter

$$\frac{\partial g(L)}{\partial L} > 0$$

[1]Ver Branson, p.116. A linha deste manual com respeito à algebrização do modelo keynesiano, é inspirada na proposta de Branson no livro Macroeconomic:Theory and Policy

, Podemos escrever também,a função oferta de trabalho como

$$W = P^e g(L) \tag{1.144}$$

No espaço (w, L), reescrevemos

$$w = \frac{W}{P} = \frac{P^e}{P} g(L) \tag{1.145}$$

Obtemos, desta forma, escrita no espaço (w, L) as duas funções do mercado de trabalho, as funções demanda e oferta,

$$\begin{cases} w_d = f(L) & (1.146) \\ w_o = \dfrac{P^e}{P} g(L) & (1.147) \\ w_d = w_o = w & (1.148) \\ f(L) = \dfrac{P^e}{P} g(L) & (1.149) \end{cases}$$

Portanto, igualando a oferta e a demanda de trabalho, como descrito abaixo, obtemos[2] as condições de equilíbrio do mercado de trabalho (L, w), dado o preço P, que se traduz na forma da curva AS, que é uma relação entre P e L ou entre P e Y, ou seja, $Y = Y(P)$, uma vez que $Y = Y(L)$.

$$f(L) = \frac{P^e}{P} g(L) \tag{1.150}$$

ou

$$Pf(L) = P^e g(L) \tag{1.151}$$

No entanto, fica claro que os efeitos dos movimentos no nível de preço no equilíbrio dado pelo nível do emprego e do produto (L, Y) dependem de como

[2] Ver Branson, p.119

as expectativas de preços reagem a movimentos no nível de preços[3]. Desta forma, é importante entender a relação $P^e = P^e(P)$ para entender os efeitos dos movimentos no nível de preço no equilíbrio do mercado de trabalho.A relação $P^e = P^e(P)$ envolve uma ampla gama de reações ou ajustes da expectativa de preço ao nível de preço ou seja, de P^e a P. Esta ampla gama vai desde uma ausência completa de relação até uma completa relação em que temos $P^e = P$

O caso de ausência total de relação ou de ajuste entre P^e e P é o caso do modelo de curto prazo ou de um modelo keynesiano extremo em que a oferta de trabalho depende apenas do salário nominal, $W = S(L)$. Nesta situação não há oportunidade[4] para a expectativa de preços, P^e, se ajustar. Por outro lado temos o caso em que temos um completo ajuste, ou seja, $P^e = P$, que é o caso do modelo de longo alcance ou o modelo do caso clássico extremo em que a oferta do trabalho depende apenas do salário real que leva, pelos fatos dos preços serem instantaneamente flexíveis, ao resultado de que o produto é uma curva vertical.

A realidade econômica, como diz Branson, em que ocorrem as flutuações no emprego e no produto (L, Y) numa situação de médio prazo (um ou dois anos), está entre essas duas situações extremas, de curto e longo prazo.

Seja a relação entre P^e com P, como faz Branson, dada por

$$\begin{cases} P^e = p(P) & (1.152) \\ 0 \leq p' \leq 1 & (1.153) \end{cases}$$

Com essa relação fica mais fácil ver a situação de ausência de ajuste, que é expressa matemáticamente por $p' = 0$. Aparece, com ela, o fenômeno da completa ilusão monetária. Essa situação corresponde a que P^e é constante

[3]Ver Branson, p.127

[4]Branson, p.127

enquanto P se altera. Neste caso, a função oferta acaba por depender apenas do salário nominal uma vez que P^e é constante. Este é o caso do modelo keynesiano extremo ou de curto prazo do qual se segue a rigidez do salário nominal. No curto prazo, não há tempo de obter informações sobre movimentos de preços para que os indivíduos possam ajustar suas expectativas de preço a essas flutuações.

Com essa relação fica mais fácil de ver também a situação do outro extremo, ou seja, do completo ajuste, portanto, quando $p' = 1$, ou seja, quando $P^e = P$. Neste caso, estamos diante de uma perfeita previsão por parte dos indivíduos como agentes racionais.

Fica fácil ver, da equação acima, que a oferta do trabalho depende apenas do salário real, ou seja, $w = \frac{W}{P} = g(L)$.Temos aqui o modelo clássico no qual os movimentos dos preços, decorrentes da dicotomia clássica, não afetam o emprego L. Trata-se da situação de longo prazo para economia, onde há muito tempo para a força de trabalho processar as informações sobre as flutuações no nível de preços[5].

1.5.3 A construção formal da cuva AS no modelo Keynesiano

Seja condição de equilíbrio entre a oferta de trabalho e a demanda de trabalho mo mercado de trabalho, em que o preço do trabalho ofertado, o salário real ofertado, e o preço do trabalhado demandado, o salário demandado, são iguais

$$Pf(L) = P^e g(L) \tag{1.154}$$

Pode-se derivar, desta relação de equilíbrio do mercado de trabalho, a curva AS do modelo keynesiano de curto prazo com completa ilusão moneaira ou seja, onde P^e é constante e independente de P. P^e não reage às flutuações

[5]Branson, p.128

de P, ou seja, $p' = 0$. Neste caso, a equação acima, nos dá uma relação entre L, que é o valor de equilíbrio dado pelo mercado de trabalho, e P. Com o recurso da função de produlçao $Y = Y(L)$, podemos obter a relação entre $Y = Y(P)$ que é a função da oferta agregada, AS. Essa função da oferta agregada pode ser combinada com a função da demanda agregada, AD, para determinar o valor de equilíbrio do par (Y, P).

$$\begin{cases} Y - C(Y - T) - I(r) - G = 0 & (1.155) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y, r) = 0 & (1.156) \\ Pf(L) = P^e g(L) & (1.157) \\ P^e = cte & (1.158) \end{cases}$$

As duas primeiras equações, a IS, e a LM, determinam a função da demanda agregada, AD, enquanto as duas últimas equações formam a função da oferta agregada, AS. Da combinação da função da demanda agregada AD e da função da oferta agregada AS para o modelo keynesiano de curto prazo com ilusão monetária, P^e =cte, obtemos o valor de equilíbrio da economia (P, Y), e, também, da variável, r.

Assim, o conjunto das duas equações, IS e LM determinam a função da demanda agregada, AD, dado que M, G são constantes, e Ye P são as variáveis.

$$\begin{cases} Y - C(Y - T) - I(r) - G = 0 & (1.159) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y, r) = 0 & (1.160) \\ & (1.161) \end{cases}$$

Enquanto as duas equações determinam a função da oferta agregada AS para o modelo keynesiano de curto prazo a ilusão monetária, P^e = cte.

$$\begin{cases} Pf(L) = P^e g(L) & (1.162) \\ P^e = cte & (1.163) \end{cases}$$

1.6 A CONSTRUÇÃO DA CURVA AS NA ABORDAGEM DE BLANCHARD

ABORDAGEM DOS NOVOS KEYNESIANOS:Determinação de preços e salários

O locus próprio da construção da curva da oferta agregada, AS, é o mercado de trabalho. No entanto, Blanchard por razões provavelmente didáticas, evita, fazer apelo às condições microeconômicas do mercado de trabalho, portanto, ele não constrói as curvas da demanda e oferta de trabalho a partir do pressuposto de que os agentes são racionais, ou seja de que os trabalhadores e as empresas são agentes racionais, como fizemos na seção anterior seguindo a análise de Bransom.

No entanto, a abordagem de Bransom contém todas as informações, ainda que de modo abstrato, que Blanchard vai desenvolver com sua construção das curvas da demanda e da oferta de trabalho que ele denomina de relaçoes de fixação de preço e de salário.

1.6.1 A RELAÇÃO DE FIXAÇÃO DE SALÁRIOS

Sem muitas detalhes sobre o mercado de trabalho onde se constróem as curvas da oferta e da demanda por trabalho, a partir das quais, buscamos as relações entre salário real, e, quantidade de trabalho oferta. Trata-se aqui de estudar o comportamento do trabalhador como um agente racional que

escolhe entre horas de trabalho e horas de lazer sob as condições do limite total de horas disponíveis.

Sem se preocupar em obter essa relação dos fundamentos da economia Blanchard propõe de modo direto a seguinte relação funcional na determinação dos salários

$$\begin{cases} W = P^e F(u,z) & (1.164) \\ \dfrac{\partial F(u,z)}{\partial u} < 0 & (1.165) \\ \dfrac{\partial F(u,z)}{\partial z} > 0 & (1.166) \\ & (1.167) \end{cases}$$

Ele apela para a intuição para defender que o salário tem essa relação funcional em que há uma função direta dos preços esperados P^e e inversa do desemprego.

Onde P^e é o nivel de preço esperado da economia. O nível de preço esperado é o nível de preços que interessa ao trabalhador quando das negociações para a fixação e estabelecimento do salário nominal. Como também há negociações e outras instituições sociais que interfere na determinação do salário nominal, este pode ser proposto como dependente, portanto, de três fatores, P^e, u, z.

No caso, a função $F(u,z)$ expressa a dependência do salário nominal tanto do desemprego, u, como de outros fatores que não o desemprego representado por z, como, por exemplo, salário desemprego. Quando aumenta o desemprego cai a capacidade de negociação dos trabalhadores, portanto, como mencionado, $\dfrac{\partial F}{\partial u} < 0$, enquanto, por outro lado, com o salário desemprego, aumenta o poder de negociação do trabalhador, desta forma, $\dfrac{\partial F}{\partial z} > 0$.

Essa relação de determinação do salário, poderia ser obtida, do pressuposto que o trabalhador enquanto agente econômico, é um agente racional,

portanto, ele toma a decisão de qual é a quantidade de horas de trabalho que oferta para um dado valor do salário nominal relativamente à alternativa da utilidade de ter maior lazer. Desta forma, o trabalhador busca maximizar, como agente racional, uma função utilidade $U(h, l)$ entre horas de trabalho, h, e, horas de lazer, sob a condição de que $h + l = H$ onde H é o número de horas totais disponíveis para serem distribuídas entre horas de trabalho, e, horas de lazer. Além disso, também tem a condição de que, ?????????

1.6.2 DETERMINAÇÃO DOS PREÇOS

Na parte da determinação dos preços Blanchard também propõe uma relação funcional. Contudo essa relação funcional poderia ser obtida de uma análise do comportamento racional do segundo agente que é a empresa. Assim, ponto de partida de Blanchard é que os preços dos produtos são estabelecidos pelos que produzem esses produtos, que são as firmas. As firmas estabelecem os preços dos produtos que produzem dependendo dos custos que desembolsam para produaí-los, se, eles estão numa estrutura de mercado que permitem que eles repassem esses custos para o consumidor antes do que deixem de produzí-los. Nesta linha de raciocínio, os custos de produção, dependem por sua vez, da natureza da função de produção, que descreve a tecnologia usada para converter os fatores de produção nos produtos, e dos preços desses fatores de produção.

Blanchard para simplificar o raciocinio da construçao da relação de determinação de preços assume que a função de produção é linear e dependente apenas de um fator de produção, no caso, o trabalho, dando origem à função de produção

$$Y = AN \tag{1.168}$$

A letra N é o número de empregos. Enquanto, a letra A significa a

produtividade do trabalho, o produto por trabalhador. Uma simplificação ainda maior é introduzida, considerando que $A = 1$. Portanto, a função de produção pode ser escrita como

$$Y = N \tag{1.169}$$

Assim temos que, implicitamente aplicando a condição que a firma é um agente racional, portanto, maximizador de lucro, chegamos à conclusão, que o custo de produzir uma unidade a mais de produto é o custo de empregar um outro trabalhador, neste caso, custo é o salário real, $\frac{W}{P}$. Como cada trabalhador produz uma unidade de produto, temos, no caso de competição perfeita, que $\frac{W}{P} = \frac{dY}{dN} = 1$, portanto, que $W = P$.

No entanto, no caso, de uma estrutura de mercado monopolista, essa relação, segundo Blacnhard, é dada por

$$P = (1 + \mu)W \tag{1.170}$$

onde μ é o "markup" do preço sobre o custo. É fácil de ver que numa estrutura de mercado de competição perfeita, $\mu = 0$.

Como mencionado, por razões talvez didáticas, Blanchard assume essas duas relações. No entanto, ele poderia partir de princípios mais básicos que constituem o raciocínio econômico. Ele poderia partir do pressuposto de que estamos trabalhando com um modelo de dois agentes econômicos, indivíduos e empresas, e que os agentes econômicos são racionais. Numa segunda etapa, ele pode pressupor que a empresa encontra-se num mercado de competição perfeita. Neste caso, ela é uma tomadora de preço. Como agente racional, a empresa busca maximizar seu lucro, portanto, maximiza $max_Y(P.Y - WN)$. Isto implica que, se lembrarmos que $Y = N$,

$$P.\frac{dY}{dN} = W \tag{1.171}$$

Portanto,

$$\frac{dY}{dN} = 1 = \frac{W}{P} \tag{1.172}$$

Portanto,

$$W = P \tag{1.173}$$

No segundo caso, em que a firma se encontra numa estrutura de mercado monopolísta, ou seja, que a firma se comporta como uma monopolista, ela continua racional, e, portanto, maximiza lucro, contudo, ela não é mais tomadora de preço mas determinadora de preço, contudo, sob a condição de se deparar com uma função de preço dependente da quantidade. desta forma, temos, lembrando que $Y = N$,

$$max_Y(P(Y).Y - WN) \tag{1.174}$$

Aplicando a condição de primeira ordem temos

$$\frac{dP(Y)}{dY}.Y + P(Y) - W = 0 \tag{1.175}$$

$$P(Y)[1 + \frac{dP(Y)}{dY}.\frac{Y}{P(Y)}] = W \tag{1.176}$$

$$P(Y)[1 + \frac{1}{\frac{dY}{dP(Y)}.\frac{P(Y)}{Y}}] = W \tag{1.177}$$

$$P(Y) = \frac{W}{[1 - |\frac{1}{\epsilon(Y)}|]} \tag{1.178}$$

Pois, como

$$|\epsilon(Y)| > 1, \tag{1.179}$$

portanto,

$$[1 - |\frac{1}{\epsilon(Y)}|] > 1 \tag{1.180}$$

Assim, a equação para o preço pode ser reescrita

$$P(Y) = (1 + \mu)W \tag{1.181}$$

Onde μ é denominado de "mark up". Portanto, essa é a origem da proposta de preço pela firma numa estrutura de competição monopolista na qual ela tem poder de mercado. É fácil observar que quando $\mu = 0$ temos o mercado de competição perfeita. $\mu = 0$ significa que a elasticidade $\epsilon(Y) \to \infty$ o que é compatível com o mercado de competição perfeita.

Podemos também observar que a estrutura de monopólio faz a curva de preço de oferta $P(Y)$ do mercado de competição perfeita deslocar pela quantidade dada pela quantidade $(1 + \mu)$.

Desta forma, tem-se uma proposta de duas relações funcionais. Uma proposta de relaçao funcional determinando o salário. Como mostramos, essa relação funcional seria proveniente da oferta de trabalho feita pelo trabalhador. A outra relação funcional definida como determinação dos preços. Trata-se de uma relação que estaria relacionado com a demanda feita por trabalho feita pela empresa. A combinação dessas duas relações funcionais que representam, na verdade, funções de oferta e de demanda por trabalho, produz a curva AS.

As consequências da construção da curva AS como combinação das duas relações funcionais

A primeira consequência da combinação dessas duas relações funcionais no mercado do trabalho é da existência de uma taxa natural de desemprego. Para obter esse resultado, Blanchard assume a situação em que $P^e = P$, que faz com que a relação funcional determinando o salário, acaba se tornando,

$$W = PF(u, z) \tag{1.182}$$

Portanto,

$$\frac{W}{P} = F(u, z) \tag{1.183}$$

Temos aqui uma relação inversa entre o salário real e o desemprego, com o salário real na parte vertical do gráfico e o desemprego no eixo horizonal que define uma curva com inclinação negativa.

Por outro lado, também temos a segunda relação funcional

$$\frac{P}{W} = 1 + \mu \tag{1.184}$$

ou

$$\frac{W}{P} = \frac{1}{1 + \mu} \tag{1.185}$$

Lembrando que $1 + \mu$ é constante, temos portanto, que decisões sobre o estabelecimento de preços pelas empresas acabam determinando o salário real. Desta forma, quanto fazemos a combinação das duas relações, que representam oferta e demanda no mercado de trabalho, e, portanto, define um estado de equilíbrio, da qual obtemos um especifico valor para o desemprego, simbolizado de u_n, e, denominado, de taxa de desemprego de equilíbrio, ou taxa natural de desemprego, para z dado.

$$F(u_n, z) = \frac{1}{1 + \mu} \tag{1.186}$$

Desta forma, a taxa de desemprego de equilíbrio é aquela para a qual o salário real é o mesmo no comportamento de oferta quanto no comportamento de demanda pelos agentes econômicos. Como podemos ver, a taxa de desemprego natural é uma taxa de desemprego que depende do ambiente social

e institucional representando por z, portanto, que não é propriamente uma taxa natural, mas, uma taxa relativa ao ambiente institucional, portanto, que seria mais adequada denominada de taxa estrutura de desemprego.

Como a definição de desemprego u é dado por $u = \frac{U}{L} = \frac{L-N}{L} = 1 - \frac{N}{L}$. Onde L é o número total da força de trabalho e N é o número de empregos, e $L = U + N$. Temos então uma relação dada por $u = 1 - \frac{N}{L}$ que é uma relação entre taxa de desemprego, u, e a taxa de emprego $\frac{N}{L}$. Assim, podemos estabelecer uma relação entre a taxa natural de desemprego e uma taxa natural de emprego.

$$F(u_n, z) = F(1 - \frac{N_n}{L}, z) = \frac{1}{1+\mu} \tag{1.187}$$

Da função de produção

$$Y = N \tag{1.188}$$

podemo então, reescrever

$$F(1 - \frac{Y_n}{L}, z) = \frac{1}{1+\mu} \tag{1.189}$$

Temos assim, também, um nível natural de produção, que é tanto maior quando menor é o taxa natural de desemprego, pois

$$u_n = 1 - \frac{N_n}{L} = 1 - \frac{Y_n}{L} \tag{1.190}$$

Desta forma, segundo as relações acima, e, assumindo que $P^e = P$, o equilíbrio no mercado de trabalho determina uma taxa natural de desemprego, assim como uma taxa natural de emprego, assim como um nível natural de produção.

Os resultados obtidos pelo raciocínio anterior decorrem dos pressupostos que foram feitos anteriormente, 1) que há equilíbrio no mercado de trabalho

e 2) de que $P^e = P$. Esse último pressuposto segundo Blanchard é um pressuposto que define o médio prazo, pois, no médio prazo não há razão para que as expectativas são sistematicamente errado.

Como vimos anteriormente, no modelo da economia keynesiano um importante pressuposto é de que estamos no curto prazo, e, no curto prazo, nível de preço pode resultar bem diferente do nível de preço esperado, que era considerado quando foram tomadas as decisões para estabelecer o salário, e, portanto, a taxa de desemprego pode ser diferente da taxa natural de desemprego.

1.6.3 A construção do modelo AS-AD por Blanchard

Começando pela construção da curva AS

A combinação das duas relações funcionais, ou seja, da relação

$$W = P^e F(u, z) \tag{1.191}$$

e, da relação

$$P = (1 + \mu)W \tag{1.192}$$

formando o conjunto

$$\begin{cases} W = P^e F(u, z) & (1.193) \\ P = (1 + \mu)W & (1.194) \\ & (1.195) \end{cases}$$

Temos já implicitamente a curva AS. Contudo, com algumas passagens algébricas construímos explicitamente a curva AS

$$P = P^e(1 + \mu)F(u, z) \tag{1.196}$$

Como já vimos, $u = 1 - \frac{N}{L} = 1 - \frac{Y}{L}$, portanto, finalmente, temos a função da oferta agregada, que é uma relação direta entre preço e a quantidade produzida indexada pelo P^e nível de preço esperado.

$$P = P^e(1+\mu)F(1-\frac{Y}{L}, z) \tag{1.197}$$

Da expressão acima podemos ver que as principais propriedades dessa função oferta agregada são:1)um aumento na produção produz um aumento no nível de preço dado o nível esperado de preço. Como se trata de uma oferta, poderíamos dizer que um aumento no nível de preço, dado o nível esperado de preço, leva a um aumento da produção.

Esse resultado, na verdade, como descreve Blanchard, depende de um mecanismos de transmissão que envolve, as seguintes etapas: 1.1)um aumento na produção leva a um aumento do emprego (resultado que decorre da função de produção). 1.2) Um aumento no emprego leva a uma diminuição do desemprego que leva a uma queda na taxa de desempŕego (este resultado, decorre das definições de emprego e desemprego, e, da taxa de desemprego). 1.3)Uma queda na taxa de desemprego leva a um aumento no salário nominal (decorre da primeira relação funcional). 1.4) Por sua vez, um aumento no salário nominal leva a um aumento nos preços estabelecidos pelas firmas, e, portanto, no nível de preço, como podemos ver pela segunda relação funcional.

2)A segunda propriedade é, que dado o desemprego, um aumento no nível de preço esperado leva, a um aumento no nível de preço atual. Não esquecendo que a curva é indexada pelo preço esperado.

Essa relaçao é bastante explícita, na função da oferta agregada, onde podemos ver que dobrando o nível de preço esperado, temos um nível de preço dobrado. Do mesmo modo como fizemos anteriormente, podemos verificar como que dobrando o nível de preço esperado temos um nível de preço dobrado. Por exemplo, se as firmas que estabelecem salários, esperam um

nível de preço mais alto, eles estabelecem um nível de salário nominal mais alto. E, se eles estabelecem um nível de salários nominais mais altos, então, há um aumento nos custos, o que leva a um aumento nos preços, e, portanto, num nível de preço mais alto.

A construção da curva AD

A curva da demanda agregada é obtida, como vimos, do modelo keynesiano, formado da curva IS e da Curva LM.

$$\begin{cases} Y - C(Y-T) - I(r) - G = 0 & (1.198) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y,r) = 0 & (1.199) \\ & (1.200) \end{cases}$$

Portanto, como se trata também de uma relação entre preço e quantidade produzida, podemos escrever, de modo sintético, o resultado da combinação da curva IS com a curva LM,

$$Y = Y(\frac{M}{P}, G, T) \tag{1.201}$$

Trata-se de uma curva de demanda poispode ser mostrado que representa uma relação inversa entre a quantidade demanda Y e o Preço P. Na verdade, podemos mostrar que $\dfrac{dY}{dP} < 0$, a partir das relações estabelecidas no modelo de Keynes descrito inicialmente. Também podemos mostrar que $\dfrac{dY}{dG} > 0$, assim como $\dfrac{dY}{d(M/P)} > 0$, e, que $\dfrac{dY}{dT} < 0$.

Portanto, temos agora, um sistema completo de análise econõmica forma da curva AS proveniente do mercado de trabalho, e, da curva AD proveniente da combinação do mercado de bens e serviços e do mercado monetário, ou seja,

$$\begin{cases} P = P^e(1+\mu)F(1-\dfrac{Y}{L}, z) \quad \text{a relação AS} & (1.202) \\ Y = Y(\dfrac{M}{P}, G, T) \quad \text{a relação AD} & (1.203) \\ & (1.204) \end{cases}$$

Desta forma, dado os valores de M, T, G, P^e, podemos determinar, os valores de equilíbrio de (Y, P).

Manter na lembrança que na hipótese de que $P = P^e$ definimos que $u = u_n$, e, portanto, que, com a ajuda da função de produção, que $Y = Y_n$.

Desta forma, não há qualquer razão para supor que no curto prazo,o equilíbrio (de curto prazo) gerado pela combinação da AD com a AS, onde $P \neq P^e$, a taxa de desemprego deveria ser igual com a taxa de desemprego natural assim como o nível de produção deveria coincidar com o nível de produção natural.

Desta forma, o médio prazo é definido pelo deslocamento da economia para uma situação em que o nível de preços atual da economia venha a coincidir com o nível de preços esperados, e, portanto, que a taxa de desemprego venha a coincidir com a taxa de desemprego natural, e, portanto, que o nível de produção venha também a coincidir com o nível de produção natural.

Segue portanto, que no curto prazo, a economia encontra-se num estado em que a taxa de desemprego esta abaixo da taxa de desemprego natural ou acima da taxa de desemprego natural.

1.6.4 O modelo de Blanchard das três equações para curto e médio prazo

Blanchard transforma a estrutura baśica formada das curvas AS e DA num modelo formado de três equações

A primeira etapa consiste em mostrar que a curva As pode ser interpretada como a curva de philips aumentada da inflação esperada.

Da curva AS à curva de Philips

Seja a curva AS

$$P = P^e(1+\mu)F(u,z) \tag{1.205}$$

Suponha uma versão linear da curva AS na qual se faz a seguinte hipótese

$$F(u,z) = 1 - \alpha u + z \tag{1.206}$$

Portanto,

$$P = P^e(1+\mu)(1-\alpha u + z) \tag{1.207}$$

Vamos indexar no tempo as variáveis

$$P_t = P_t^e(1+\mu)(1-\alpha u_t + z) \tag{1.208}$$

Vamos definir a inflação como

$$\pi_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1.209}$$

Vamos dividir ambos os lados da AS por P_{t-1}

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t^e}{P_{t-1}}(1+\mu)(1-\alpha u_t + z) \tag{1.210}$$

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 + 1 = (\frac{P_t^e}{P_{t-1}} - 1 + 1)(1+\mu)(1-\alpha u_t + z) \tag{1.211}$$

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + 1 = (\frac{P_t^e - P_{t-1}}{P_{t-1}} + 1)(1+\mu)(1-\alpha u_t + z) \tag{1.212}$$

Com a definição de inflação

$$\pi_t + 1 = (\pi_t^e + 1)(1 + \mu)(1 - \alpha u_t + z) \tag{1.213}$$

Como estamos lidando com valores pequenos para π_t, π_t^e, μ, z e u_t, o produto de valores pequenos é ainda menor e, portanto, pode ser descartado.

$$\pi_t + 1 = (\pi_t^e + \mu\pi_t^e + 1 + \mu)(1 - \alpha u_t + z) \tag{1.214}$$

$$\pi_t^e+1 = (\pi_t^e+\mu\pi_t^e+1+\mu)-(\pi_t^e\alpha.u_t+\mu.pi_t^e.\alpha.u_t+\alpha u_t+\mu.u_t)+z(\pi_t^e+\mu\pi_t^e+1+\mu) \tag{1.215}$$

$$\pi_t^e + 1 = (\pi_t^e + 1 + \mu) - \alpha.u_t + z \tag{1.216}$$

$$\pi_t = \pi_t^e + \mu + z - \alpha u_t \tag{1.217}$$

Essa é a equação de Philips aumentada com inflação esperada, a qual mostra que um aumento na taxa de inflação esperada leva a um aumento na taxa de inflação atual.

No caso em que $\pi_t^e = 0$ temos que

$$\pi_t = \mu + z - \alpha u_t \tag{1.218}$$

Essa é a curva de Philips original que ajustou, segundo Blanchard, aos dados obtidos por Phillips para o Reino unido, e, que Solow and Samuelson ajustou para os dados dos Estados Unidos. A leitura da curva de Phillips original diz que baixo desemprego leva a níveis de preços mais altos relativamente aos níveis de preços do ano anterior, ou seja, a uma inflação mais alta.

A curva da Phillips aumentada com expectativa da inflação foi uma transformação feita na curva de Phillips original para se ajustar a uma nova realidade econômica.

Podemos introduzir um mecanismo de formação de expectativa de modo simples com a seguinte relação

$$\pi_t^e = \theta.\pi_{t-1} \tag{1.219}$$

Onde θ é um fator de proporcionalidade descrevendo a a forma de revisão que se faz da expectativa.

Substituindo essa relação na curva de Phillips

$$\pi_t = \theta.\pi_{t-1} + \mu + z - \alpha.u_t \tag{1.220}$$

No caso em que $\theta = 0$ temos

$$\pi_t = (m + z) - \alpha.u_t \tag{1.221}$$

Mas podemos também ter que $\theta = 1$ ou seja que a inflação esperada se revela igual a do ano anterior,assim

$$\pi_t - \phi_{t-1} = (m + z) - \alpha.u_t \tag{1.222}$$

O resultado novo aqui é que. neste caso, a taxa de desemprego não afeta a taxa da inflação, mas, a mudança na taxa de inflação, que por analogia com a física, pode-se dizer, que a taxa de desemprego afeta a aceleração dos preços. Uma vez que a taxa da inflação é a variação nos preços, e, portanto, a variação na taxa da inflação é a aceleração dos preços, o que levou alguns a denominar a nova curva de phillips, a curva de phillips aumentada de expectativas, de curva de Phillips aceleracionista.

Fazendo uso das definições anteriores de taxa natural de desemprego, e, do fato, de que quando $P = P^e$, portanto, que $\pi_t = \pi_t^e$ temos que $u = u_n$, segue-se da curva de Phillips anterior que

$$0 = (m + z) - \alpha.u_n \tag{1.223}$$

E, portanto, que

Com ajuda da qual reescrevemos a curva de Phillips

$$\pi_t - pi_t^e = \alpha u_n - \alpha u_t \tag{1.225}$$

Ou seja,

$$\pi_t - pi_t^e = -\alpha(u_r - u_n) \tag{1.226}$$

Para os países em que a taxa de inflaçao esperada é aproximadamente a mesma do ano anterior, $\pi^e = \pi_{t-1}$, a curva de Phillips,

$$\pi_t - pi_{t-1} = -\alpha(u_r - u_n) \tag{1.227}$$

Desta forma, podemos interpretar a versão da curva de Phillips acima como dizendo que a taxa natural de desemprego é a taxa de desemprego que mantem a taxa de inflação constante.Segundo Blanchard, essa é a razao para que ela seja denominada de taxa de desemprego que não acelera a inflaçao, em ingles, recebe a sigla de NAIRU.

1.7 O modelo da econômica clássica: mercados em competição perfeita

O modelo clássico diferentemente do modelo keynesiano tem o mercado de trabalho como um de seus mercados, a hipótese de que os mercados são de competição perfeita, a de que o indivíduo é um agente racional, portanto, que os preços são flexíveis e se ajustam rapidamente, e, como consequência que a economia está sempre operando em pleno emprego, no seu estado econômico de produção potencial.Diferentementedo modelo keynesiano, não há rigidez salarial no modelo clássico. Desta forma, qualquer pertubação desta situação de equilíbrio de pleno emprego tende a fazer operar mecanismos da economia de mercado de tal modo a fazer que esta automaticamente retorno à situação de pleno emprego. O mercado é assim interpretado como tendo imbutido engrenagens de um mecanismo de feedback negativo, capaz de, uma vez pertubado, restaurar rapidamente, a situação de equilíbrio. A economia de mercado é formada de um mecanismo auto regulador. Esses pressupostos colocam como problema fundamental da economia, a ALOCAÇÃO EFICIENTE DE RECURSOS ESCASSOS ENTRE FINS ALTERNATIVOS E COMPETITIVOS, e, que este deve ser resolvido pela construção de mercados. A razão para que o mercado de trabalho assim como a função de produção sejam componentes essenciais do modelo clássico é que este tem entre suas teses principais a que toma a teoria do valor como meio de determinar os preços no mercado. Usando a função de produção podemos entender que o valor de um produto é determinado com base nos valores dos componentes da funçao de produção, ou seja, da tecnologia, do salário do trabalho, e, do preço dos itens de capital, os insumos, utilizado para produzir o produto. A teoria do valor tem origem nos trabalhos de Locke sobre Second Treatise of Government.Outro pressuposto fundamental do modelo clássico é de que o indivíduo é um agente racional e auto interessado. Pressuposto que vem do

estabelecimento, por Descartes, do fundamento ontológico da nova imagem do mundo, quando afirma que, penso, logo existo, portanto que o o indivíduo é um agente racional. Toda a nova imagem do mundo, inclusive a economia de mercado, é uma decorrencia desse princípio ontológico fundamental. Outro componente do modelo clássico é a lei de Say em que a produção ou a oferta determina a sua própria demanda. Daí ser a função de produção um componente importante do modelo. Isto significa que quando a economia produz uma determinada quantidade de produtos, ela,a economia, gera, ao mesmo tempo, a quantidade de renda, necessária, para a aquisição desta quantidade determinada de produtos.O processo que cria a produção é o mesmo processo que cria a renda suficiente para a aquisição dessa pŕodução. Esta ideia reforça a outra ideia de que, com os preços flexíveis, a economia sempre encontra-se em seu nível de pleno emprego. A curva da Oferta Agregada (AS) é sempre uma curva vertical no nível de pleno emprego ou no nível do produto potencial da economia. O aumento no preço do produto tem seu correspondente ou é compensado pelo aumento dos custos proveniente do aumento nos salário e dos insumos. Não há por esta via um incentivo ao aumento da produção, pois, não há uma defasagem entre o preço do produto e dos insumos. Sob essa condição, a produção permanece constante na forma de uma curva vertical. O modelo clássico também assume que a poupança é igual ao investimento. Mas, a tese principal deste modelo é que a economia está sempre, decorrente dos mercados operarem em competição perfeita, em pleno emprego. Os preços e salários se ajustam livremente de tal modo que a economia está sempre em pleno emprego, e, que, no mercado de trabalho, quem procura emprego, encontra, e, que todos os recursos estão sendo plenamente empregados, desta forma, fazendo com que a economia sempre se encontra no estado econômico de pleno emprego, ou em seu estado econômico de produto potencial. Nesta concepção da economia o indivíduo racional pode ser entendido como se comportando como consumidor e como

empresário.

Neste contexto, podemos também pensar que o consumidor poder poupar parte de sua renda, e, neste caso, não haveria suficiente para a aquisição de toda a produção. A economia clássica entendeu que havia outra igualdade importante, e que era entre a poupança S com o investimento, ou seja, S=I.A taxa de juros seria a espécie de preço capaz de estabelecer essa igualdade, $S(r) = I(r)$, que se daria também rapidamente, graça à tese geral da flexibilidade dos preços. A taxa de juros sendo determinada pela demanda e oferta de fundos disponíveis para esse fim. Há indivíduos deficitários, que são empresários buscando financiamento para investir em sua produção, que gastam mais do que ganham, e, estes são demandadores de fundos, e indivíduos superavitários, uma forma de empresário que tem como produto, dinheiro disponibilizado para ser emprestado, que ganham mais do que gastam, e, portanto, são ofertadores de fundos. A igualdade entre esses fundos é determinada pela taxa de juros que é o preço do dinheirodisponível para ser emprestado, a recompensa por disponibilizar dinheiro para ser emprestado, e tomado emprestado, o valor a ser pago para financiar o investimento.

Desta forma, podemos escrever os três primeiros componentes do modelo clássico, que são suficientes, considerando K =cte para determinar os valores de equilíbrio do mercado de trabalho, que são o salário real $(\frac{W}{P})^*$ assim como, a quantidade de trabalho, L^*, e, via a função de produção podemos determinar a produção de pleno emprego, Y^*.

$$\begin{cases} Y = F(L, \bar{K}) & (1.228) \\ (\frac{W}{P})^d = \frac{\partial F(L, \bar{K})}{\partial L} & (1.229) \\ (\frac{W}{P})^o = \frac{W}{P}(L) & (1.230) \\ (\frac{W}{P})^d = (\frac{W^o}{P}) & (1.231) \\ & (1.232) \end{cases}$$

O mercado de trabalho com a função de produção acabam por definir os valores das variáveis reais, $(\frac{W}{P})^*$, L^*, e, Y^*. O seguinte componente importante do modelo clássico é o mercado monetário definido por sua teoria da quantidade da moeda para a qual o preço nominal P é proporcional à quantidade da moeda M, uma vez assumidos que a velocidade da moeda é constante, no curto prazo, e o valor da produção de pleno emprego é conhecido a partir do mercado de trabalho e da função de produção da economia. Desta forma, conhecido a quantidade de moeda estabelecido pelo Banco Central fica determinado o valor do nível de preço da economia, a partir da equação da teoria da quantidade da moeda,

$$P = \frac{\bar{v}}{Y^*}M \tag{1.233}$$

Fazendo uso do valor do preço nominal da economia, com P^*,e também do salário real determinado no mercado de trabalho, $(\frac{W}{P})^*$,obtemos o valor do salário nominal, W.

$$W^* = (\frac{W}{P})^* P^* \tag{1.234}$$

Segue-se, desta forma, das duas equações a determinação dos valores das variáveis monetárias, P^* e W^*. Fica claro a separação em dois domínios o

modelo clássico: o domínio do mercado de trabalho no qual são determinados os valores das variáveis reais $(\frac{W}{P})^*$, L^*, e, Y^*, e o domínio definido pela teoria da quantidade da moeda, em que são definidos os valores da variáveis monetárias, P^* e W^*. Pode-se observar que as variáveis reais, como Y^*, determinam as variáveis monetárias, mas, as variáveis monetárias, não alteram os valores das variáveis reais, o que levou os economistas clássis dizerem que a moeda é neutra, não tendo condições de afetar as variáveis reais, e, conectado a esse resultado, a dicotomia clássica, com a separação do setor das variáveis reais, formado do mercado de trabalho, e o setor das variáveis monetárias, formado do mercado monetário.O setor real é fechado em si mesmo no sentido de que o número de variáveis é igual ao número de equações,conduzindo a determinar uma solução única para o sistema assumido certos valores como dados, o que não acontece com o setor monetário que precisa dos valores determinados no setor real para determinar suas variáveis monetárias, como por exemplo, o valor do produto ou da renda Y^*, o qual, com o valor da quantidade de moeda, e, o pressuposto da constância da velocidade de circulação de moeda, permitem determinar o valor da variável monetária, nível de preço da economia, que, por sua vez, ajuda a determinar a outra variável monetária, ou seja, o salário nominal W.Mas, podemos notar que as variáveis nominais, determinada no setor monetário, não tem como influenciar as variáveis reais uma vez que o setor real é fechado e autosuficiente com o número de variáveis igual ao número de equações.

Para tornar o modelo clássico um pouco mais complexo e mais completo adiciona-se o mercado do produto através dos conceitos de poupança e investimento.

$$\begin{cases} S = Y - C & (1.235) \\ S = S(r) & (1.236) \\ I = I(r) & (1.237) \\ I = S & (1.238) \\ & (1.239) \end{cases}$$

Combinando este mercado, mercado do produto, com o mercado de trabalho podemos determinar um conjunto ampliado de variáveis reais como $(\frac{W}{P})^*$,L^*, Y^*,S^*, I^*,r^*, C^*. Devemos atentar para o fato que o juros é o juros real.

Chapter 2

MACROECONOMIA DA ECONOMIA ABERTA:MODELO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO APLICADA À ECONOMIA ABERTA

O objetivo da macroeconomia keynesiana aberta é o estudo e análise do impacto da política fiscal e monetária na economia para regimes diferentes de câmbio e regimes diferentes de mobilidade de capital. A aplicação da macroeconomia keynesiana para uma economia aberta foi feita pelo modelo de Fleming-Mundel.

2.1 REGIME DE CÂMBIO

1. Dois tipos de regimes de câmbio: câmbio fixo e câmbio flutuante

2. Definição de câmbio: $\epsilon = \dfrac{EP^*}{P}$

3. Definição: a taxa de câmbio E é expressa pelo número de unidades de uma moeda, ou da moeda nacional, em relação a unidade da outra moeda, ou da moeda internacional.

4. Como estamos trabalhando no curto prazo assumimos que ambos os preços são fixos, e, igual a 1. $P = P^* = 1$

5. Regime de cambio fixo: E =cte, portanto, ϵ =cte.

A taxa de câmbio fixa funciona como um instrumento de política econômica. Como não poderia deixar de ser, no caso do câmbio fixo, o governo fixa o valor da moeda nacional em relação a uma outra moeda assumida como moeda de referência. Neste caso, a quantidade de moeda, M, é determinada pelo sistema de equações, como uma quantidade endógena que deverá se alterar para manter a câmbio fixo.

MODELO TEÓRICO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO

$$\begin{cases} Y - C(Y - T(Y)) - I(r) - G - X(\epsilon, Y) = 0 & (2.1) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y, r) = 0 & (2.2) \\ B - X(\epsilon, Y) - F(r - r*) = 0 & (2.3) \\ P = cte & (2.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_r > 0 & (2.5) \\ L_r < 0 & (2.6) \\ L_y > 0 & (2.7) \\ X_y < 0 & (2.8) \\ I_r < 0 & (2.9) \\ T_y = T' > 0 & (2.10) \\ C_y = C' > 0 & (2.11) \\ X_\epsilon > 0 & (2.12) \end{cases}$$

A relação $X_\epsilon > 0$ mostra que a condição de Marshal-Lener é aceita e portanto que a depreciação da moeda favorece a balança comercial dado que ceteris paribus. Voltaremos à condição de Marshall-Lener mais tarde. Teorema da função implicita aplicado ao modelo keynesiano de curto prazo para a economia aberta:abordagem da estatica comparativa para analise do impacto da política fiscal e monetária.

Variáveis exógenas:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Variáveis endógenas:

$$Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

$$\begin{cases} F^1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 & (2.13) \\ F^2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 & (2.14) \\ \ldots & (2.15) \\ F^n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 & (2.16) \end{cases}$$

Preenchidos os requisitos do teorema da função implicita, podemos resolver a equação acima para uma vizinhança do ponto de equilíbrio, e, então estudar em torno desse ponto por meio do método da estática comparativa uma política econômica (fiscal e monetária)

$$(y_{10}, y_{20}, \ldots, x_{10}, \ldots, x_{m0})$$

Obtem-se

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & (2.17) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & (2.18) \\ \quad \ldots & (2.19) \\ y_n = y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & (2.20) \end{cases}$$

A representacao matricial para a abordagem da estática comparativa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\partial F^1}{\partial x_1} \\ \frac{-\partial F^2}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{-\partial F^n}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

2.2 REGIME DE CÂMBIO FIXO

No câmbio fixo introduzimos dois itens adicionais aos anteriormente mencionados, a saber

1. Dois tipos de regimes de câmbio: câmbio fixo e câmbio flutuante

2. Definição de câmbio: $\epsilon = \dfrac{EP^*}{P}$

3. Definição: a taxa de câmbio E é expressa pelo número de unidades de uma moeda, ou da moeda nacional, em relação a unidade da outra moeda, ou da moeda internacional.

4. Como estamos trabalhando no curto prazo assumimos que ambos os preços são fixos, e, igual a 1. $P = P^* = 1$

5. Regime de cambio fixo: E =cte, portanto, ϵ =cte.

6. Princípio a ser aplicado: Ajustar oferta de moeda de tal modo a fazer o valor de equilíbrio da taxa de câmbio ser igual à taxa de câmbio fixa.

O modelo keynesiano para economia aberta: modelo de Mundell-Fleming

O modelo de Mundel-Fleming combina a função da demanda agregada, DA, descritas pelas duas equações acima 2.1 e 2.2 com a equação da balança de pagamentos,B, 2.3.

Fazendo $y_1 = Y$,$y_2 = r$, $y_3 = M$ ou $y_4 = B$, $x_1 = G$, podemos construir a representação matricial do impacto das variáveis exógenas, no caso, G, para uma política fiscal, que também poderia ser T, sobre as variáveis endógenas que são a renda, Y, a taxa de juros r, e a balança de pagamentos, B.

Como estamos trabalhando com câmbio fixo, sabemos que a quantidade de moeda é uma variável endógena determinada pelo sistema para manter o câmbio fixo. De qualquer modo, podemos simular contrafactualmente, o que cconteceria com a balança de pagamento, aumentar ou diminuir, e, portanto,o que aconteceria, contrafactualmente, com a taxa de câmbio, mas, que não acontece, pois, será mantida constante, definido como um regime de câmbio fixo, por meio da alteração na quantidade da moeda, M que

é determinada pelo sistema de equações representando a teoria keynesiana aplicada à economia aberta na circunstância de curto prazo.

$$\begin{bmatrix} & Y & & r & B & M \\ F^1 & (1-c'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 & 0 \\ F^2 & -L_y & -L_r & 0 & 1 \\ F^3 & -X_y & -F_r & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial B}{\partial G} \\ \frac{\partial M}{\partial G} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-\partial F^1}{\partial G} \\ \frac{-\partial F^2}{\partial G} \\ \frac{-\partial F^3}{\partial G} \end{bmatrix}$$

Da qual segue-se que,

$$\begin{bmatrix} & Y & & r & B & M \\ F^1 & (1-c'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 & 0 \\ F^2 & -L_y & -L_r & 0 & 1 \\ F^3 & -X_y & -F_r & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial B}{\partial G} \\ \frac{\partial M}{\partial G} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hipoteses:

1. Como o Estado com respeito ao qual se analisa a política econômica é considerado como tendo uma economia aberta pequena relativamente ao resto do mundo, podemos considerar as variáveis descrevendo o resto do mundo como constantes. Y^*, P^*, r^* são dados,

2. Como estamos trabalhando no curto prazo P =cte. Para facilitar fazemos $P = P^* = 1$,

3. Estamos trabalhando no espaço (r, Y)
4. Definição de câmbio:taxa de câmbio real $\epsilon = \dfrac{EP^*}{P}$
5. Definição: a taxa de câmbio nominal E é expressa pelo número de unidades de uma moeda, por exemplo, moeda nacional, em relação a unidade da outra moeda, moeda estrangeira.
6. Regime de cambio fixo: $E = cte$, portanto, $\epsilon = cte$.
7. Não esquecer que $IS(\epsilon, G)$. (ϵ, G) duas variáveis que definem a interseção da curva IS.
8. Não esquecer que $LM(M)$ onde M é o que define a intersecção da curva LM
9. Não esquecer que $B(\epsilon)$ é o quê define a intersecção da curva B

Regime de cambio fixo deve ser combinado com regimes formado de graus diferentes de mobilidade de capital.
De modo didático,a partir da equação de balança de pagamentos no modelo linear, podemos entender que há três possibilidades para mobilidade do capital: imobilidade, mobilidade imperfeita, e, mobilidade perfeita. Balança de pagamentos é a soma da conta corrente(reduzido a conta comercial) e conta capital

$$B = X(\epsilon, Y) + F(r - r^*) \tag{2.21}$$

Modelo linear de exportação, dependência da taxa de câmbio

$$EX = EX_0 + hE \tag{2.22}$$

Modelo Linear de importação, dependência da produção

$$IM = IM_0 + mY \tag{2.23}$$

Modelo linear da balança comercial líquida

$$EX - IM = (EX_0 + hE) - (IM_0 + mY) \tag{2.24}$$

Modelo linear da conta capital

$$F(r) = -f_0 + f(r - r^*) \tag{2.25}$$

Modelo linear para a balança de pagamento

$$B = X(\epsilon, Y) + F(r) = (EX_0 + hE) - (IM_0 + mY) - f_0 + f(r - r^*) \tag{2.26}$$

Modelo linear para a balança comercial

$$X(\epsilon, Y) = EX - IM = (EX_0 + hE) - (IM_0 + mY) \tag{2.27}$$

Portanto, $E \uparrow = \epsilon$ implica que $X(\epsilon, Y) \uparrow$ ou

$$\frac{\partial X}{\partial E} = X_\epsilon > 0$$

e, dado que $Y \uparrow$ implica que $X(\epsilon, y) \downarrow$ ou $\dfrac{\partial X}{\partial Y} = X_Y < 0$

Da balança de pagamentos podemos escrever

$$r = \frac{B - EX_0 + IM_0 + f_0}{f} + r^* - \frac{h}{f}E + \frac{m}{f}Y \tag{2.28}$$

Se considerarmos que trabalhamos no espaço (r,Y), então a inclinação da curva da balança de pagamentos é dado por

$$\frac{dr}{dy}_B = -\frac{X_Y}{F_r} = \frac{m}{f} \tag{2.29}$$

1. Fixando o câmbio, portanto, $E = \epsilon$ =cte, podemos observar que a intersecção da curva da balança de pagamentos, ($B(\epsilon)$ encontra-se determinada e fixa neste regime de câmbio fixo. As mudanças em (r, Y) se dão em cima da curva.

2. A inclinação da curva da Balança de Pagamentos que está no domínio $0 < F_r < \infty$ define a mobilidade imperfeita do capital.

3. Assuminos que as três equações do modelo keynesiano definem um ponto de equilíbrio(Y_0, r_0, ϵ_0). Desta forma, qualquer ponto acima da curva ou reta da balança de pagamentos faz com que temos uma balança de pagamentos superavitárioa e qualquer ponto abaixo da curva ou reta da balança de pagemtos faz com que temos uma balança de pagamentos deficitária.

4. Uma balança de pagamentos superavitaria, portanto, com excesso de divísa estrangeiro, faz pressão para a valorização da moeda, e, portanto, do câmbio. Consequência, no regime de câmbio fixo o governo deve intervir, no mercado de divisas, comprando divisa estrangeira e vendendo moeda doméstica ou nacional.

5. Uma balança de pagamento deficitária, portanto, com excesso de moeda doméstica, faz pressão para desvalorização do câmbio. Consequência, no regime de câmbio fixo, o governo deve intervir, no mercado de divisas, comprando moeda doméstica e vendendo moeda estrangeira.

6. Num regime de taxas de câmbio fixas o banco central intervem no mercado de divisas comprando ou vendendo reservas na defesa do câmbio fixo.

No que diz respeito à inclinação da curva podemos também considerar os dois casos extremos. $F_r = f = 0$ ou $F_r \to \infty$. Se $F_r = f = 0$ então temos

o caso da imobilidade do capital. E, se $F_r \to \infty$ então temos a mobilidade perfeita do capital.

Considere, como exemplo, o caso da imobilidade, ou seja, $F_r = f = 0$. Esta condição gera a seguinte relação para a curva da balança de pagamentos

$$B = X(\epsilon, Y) + F(r) = (EX_0 + hE) - (IM_0 + mY) - f_0 \tag{2.30}$$

Neste caso, a curva da balança de pagamentos no plano (r, Y) é uma reta perpendicular num certo valor de Y que se altera paralelamente dependendo do valor da taxa de câmbio ϵ.

Considere agora o segundo caso extremo, em que temos a mobilidade perfeita de capital, portanto, que $F_r \to \infty$. Essa condição faz com que a curva da balança de pagamentos, descrita acima, torna-se

$$r = r^* \tag{2.31}$$

Neste caso a curva da balança de pagamentos é uma reta horizontal com valor $r = r^*$. Desta forma, temos três possibilidades da mobilidade do capital, que devem ser combinadas com cada regime de câmbio. Desarte, quando se discute a avaliação de uma política econômica, essa avaliação só faz sentido se especificarmos em qual contexto, dos seis possíveis contextos, a política econômica está sendo implementada. Resumindo as três possibilidades de mobilidade do capital, temos:

1. imobilidade do capital $F_r = 0$
2. mobilidade perfeita do capital $F_r \to \infty$
3. mobilidade imperfeita do capital $0 < F_r < \infty$

2.2.1 MOBILIDADE IMPERFEITA DO CAPITAL

Neste contexto estamos estudando a teoria keynesiano de curto prazo para economia aberta com câmbio fixo e mobilidade imperfeita do capital caso em que $0 < F_r < \infty$

Abordagem de estática comparativa: análise da política fiscal

Hipótese:Considere um politica fiscal expansionista:$G_0 \to G_1 > G_0$

Qual o impacto da política fiscal expansionista, $G_1 > G_0$, sobre a balança de pagamentos B?

ESTRUTURA E RELAÇÕES PARA A ANÁLISE DA POLÍTICA ECONÔMICA

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial G} \leq 0 & (2.32) \\ \text{ou} & \\ \dfrac{\partial B}{\partial G} \geq 0 & (2.33) \end{cases}$$

Aplicação do teorema da função implícita: relação entre as derivadas das variáveis exógenas e endógenas que representam o impacto das políticas fiscais e monetárias.

Análise do impacto teórico da política fiscal expansionista na balança de pagamentos.

$$\begin{bmatrix} & Y & r & B \\ F^1 & (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 0 \\ F^2 & -L_y & -L_r & 0 \\ F^3 & -X_y & -F_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial B}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As variáveis endogenas: Y, r, B, M A variável exógena: G.

Regra de Cramer para a solução na representação matricial da equação acima:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 1 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 1 \end{vmatrix}}$$

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{-L_r((1-C'(1-T')-X_y) + \frac{L_y I_r}{L_r})} \tag{2.34}$$

Duas possibilidades:

O impacto da política fiscal expansionista $G \uparrow$ é de produzir uma balança de pagamentos superavitária

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{-L_r((1-C'(1-T')-X_y) + \frac{L_y I_r}{L_r})} > 0 \tag{2.35}$$

ou o impacto da política fiscal expansionista $G \uparrow$ é o de produzir uma balança de pagamentos deficitária.

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{-L_r((1-C'(1-T')-X_y) + \frac{L_y I_r}{L_r})} < 0 \tag{2.36}$$

Como veremos essas duas situações dependem da relação de inclinação das curvas da LM e da Balança de pagamentos.

A primeira possibilidade, que é da balança de pagamentos superavitária ocorre quando

$$L_Y F_r - X_Y L_r > 0 \tag{2.37}$$

Sabendo que, a partir da equação LM, temos

$$L_Y dY + L_r dr = 0 \tag{2.38}$$

Portanto, a inclinação da curva da curva LM é dada por

$$(\frac{dr}{dY})_M = -\frac{L_Y}{L_r} \tag{2.39}$$

e também, da balança de pagamentos

$$X_Y dy + F_r dr = 0 \tag{2.40}$$

Portanto, a inclinação da curva da balança de pagamento é dada por

$$(\frac{dr}{dY})_B = -\frac{X_Y}{F_r} \tag{2.41}$$

Voltando à relação acima podemos reescrever como

$$-F_r L_r(\frac{X_Y}{F_r} - \frac{L_Y}{L_r}) > 0 \tag{2.42}$$

Substituindo as inclinações anteriores, obtemos

$$-F_r L_r((-\frac{dr}{dY})_B - (-\frac{dr}{dY})_M) > 0 \tag{2.43}$$

$$-F_r L_r((\frac{dr}{dY})_M - (\frac{dr}{dY})_B) > 0 \tag{2.44}$$

Portanto, concluímos que, neste caso de uma balança de pagamentos superavitário devemos ter que a inclinação da curva da LM deve ser maior do que a inclinação da curva da balança de pagamentos

$$(\frac{dr}{dY})_M > (\frac{dr}{dY})_B \tag{2.45}$$

A balança de pagamentos superavitária significa que há mais oferta de moeda estrangeira do que moeda doméstica, portanto, há pressão para valorizar o câmbio. Neste caso, o BC entra comprando moeda estrangeira e vendendo moeda doméstica para manter o câmbio fixo. Desta forma, aumenta o estoque de divisas. Esse caso pode ser exemplificado com o arranjo das políticas econômicas da China que adota um regime de campo fixo, e, acumulou um formidável estoque de dividas da ordem de três trilhoes de dólares.

Mecanismos de transmissão da política fiscal expansionista $G \uparrow$: $G \uparrow \rightarrow Y \uparrow$ e como, inicialmente, $M =$cte $\rightarrow r \uparrow$ e, como, a inclinação da curva LM é maior do que a inclinação da curva da balança de pagamentos, temos $B \uparrow$

E, vice versa, no caso de uma balança de pagamentos deficitário, ou seja,

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{-L_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{L_y I_r}{L_r})} < 0 \tag{2.46}$$

Passando pelos mesmos passos anteriores chegamos à conclusão de que

$$(\frac{dr}{dY})_B > (\frac{dr}{dY})_M \tag{2.47}$$

Portanto, que, neste caso de uma balança de pagamento deficitário, a inclinação da curva da balança de pagamentos é maior do que a inclinação da curva da LM. Como se trata de um balança de pagamento deficitário, isto significa que existe mais oferta de moeda doméstica do que moeda estrangeira, portanto, que há pressão para desvalorizar o câmbio. Neste caso, o BC para manter o câmbio fixo, entra comprando moeda doméstica $M \downarrow$) e vendendo moeda estrangeira, portanto, diminuindo o estoque de reservas de dividas.

1. 1)Para manter um taxa de câmbio fixo o Banco Central necessita de um mecanismo automático de intervenção no mercado de divisas para comprar ou vender moeda doméstica trocando por moeda estrangeira.

2. 2)O Banco central necessita um estoque de reserva de moeda estrangeira para garantir o bom funcionamento do regime de câmbio fixo.

3. 3)O parâmetro de intervenção é o excesso de demanda ou de oferta por moeda estrangeira que ocorre ao longo do tempo em determinados períodos ou, de outra forma, uma Balança de Pagamento Deficitária ou uma Balança de Pagamentos Superavitária.

4. 4)No caso de Balança de Pagamento superavitária o Banco Central entra comprando moeda estrangeria e vendendo moeda doméstica para evitar a pressão para a valorização do câmbio.

5. 5) No caso de Balança de Pagamento Deficitária o Banco Central entra vendendo moeda estrangeira e comprando moeda doméstica ou nacional. No primeiro caso aumenta o estoque de reservas de moeda estrangeira. No segundo caso, diminui o estoque de reserva de divisas estrangeiras

6. 6) Em geral, o excesso de demanda em um período é compessado com o excesso de oferta em outro período, mantendo-se o estoque de divisas estrangeiras relativamente em equilíbrio.

7. 7)Assim, há um mecanismo automático que dá sustentação à taxa de câmbio fixa: a intervenção do BC em uma operação de mercado aberto que conta com dois componentes:

   o BC banco central intervem no mercado de moedas estrangeiras vendendo ou comprando moeda estrangeira para manter a taxa de câmbio fixa.

   2)O BC perde capacidade de fazer política monetária uma vez que esta está atrelada à manutenção do câmbio fixo.

Análise do impacto da política fiscal: Suponha uma política fiscal expansionária

$$\begin{bmatrix} & Y & r & M \\ F^1 & (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ F^2 & -L_y & -L_r & 1 \\ F^3 & -X_y & -F_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial M}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sob o impacto da politica fiscal expansionista $G \uparrow$ qual deve ser a mudança na oferta monetária M ($M \uparrow$ ou $M \downarrow$) para manter a taxa de câmbio fixa sob impacto da alteração da balança de pagamento, ou seja, se a balança é superavitária $B > 0$ ou se a balança é deficitária $B < 0$? A alteração de M quando $G \uparrow$ seria dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 1 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 1 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r(1-C'(1-T')-X_y) + X_y I_r} \tag{2.48}$$

Temos duas possibilidades para M do mesmo modo que para B sob o impacto de $G \uparrow$:

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r((1-C'(1-T')-X_y) + \frac{X_y I_r}{F_r})} > 0 \tag{2.49}$$

o que significa que

$$L_Y F_r - X_Y L_r > 0 \tag{2.50}$$

Portanto, temos o caso da Balança de Pagamentos superavitários, $B > 0$. Para manter o câmbio fixo, o governo deve intervir para aumentar a quantidade de moeda doméstica no mercado de dividas, o que ele faz comprando divisas internacionais e vendendo moeda doméstica, ou seja $M \uparrow$, e, neste caso, aumenta o estoque de reservas de divisas.

ou, no caso para $B < 0$, temos que, também

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \dfrac{X_y I_r}{F_r})} < 0 \tag{2.51}$$

Como o denominador é positivo, resta que, o numerador seja negativo,

$$L_Y F_r - X_Y L_r < 0 \tag{2.52}$$

Portanto, no caso da balança de pagamentos deficitária, $B < 0$, o governo deve intervir para diminuir a quantidade de moeda doméstica no mercado de divisas. Ele faz vendendo divisas internacionais e comprando moeda doméstica, ou seja, $M \downarrow$. Neste caso, há uma diminuição das reservas de divisas.

O impacto da política fiscal expansionista ($G \uparrow$) nas variáveis Y e r é representado por:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I_r & 0 \\ 0 & -L_r & 1 \\ 0 & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 1 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{F_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{F_r}{F_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{X_y I_r}{F_r})} \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{X_y I_r}{F_r})} > 0 \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T) - X_y) & 1 & 0 \\ -L_y & 0 & 1 \\ -X_y & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 1 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-X_y}{F_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{X_y I_r}{F_r})} > 0 \tag{2.56}$$

Desta forma a política fiscal é efetiva em fazer $Y \uparrow$ quando $G \uparrow$. Portanto, a política fiscal expansionista é efetiva em fazer a economia aproximar-se do equilíbrio de pleno emprego.

MOBILIDADE IMPERFEITA DE CAPITAL : $0 < F_r < \infty$

A análise do impacto dA POLÍTICA FISCAL EXPANSIONISTA ($G \uparrow$ sobre B) é dada por

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{-L_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{L_y I_r}{L_r})} \tag{2.57}$$

No caso de uma política fiscal expansionista ($G \uparrow$) a curva IS se desloca para a direita e $Y \uparrow$ e, pela LM, com M fixo provisoriamente, $r \uparrow$. Portanto, a balança de pagamentos, B, pode ser,

1) $B > 0$ quando

$$L_y F_r - X_Y L_r = -F_r L_r(\frac{X_Y}{F_r} - \frac{L_Y}{L_r}) > 0 \tag{2.58}$$

Portanto,

$$(-(\frac{dr}{dY})_B - (-\frac{dr}{dY})_M) = (\frac{dr}{dY})_M - (\frac{dr}{dY})_B > 0 \tag{2.59}$$

Na linguagem de gráfico, quando a inclinação da curva LM é maior que a inclinação da curva BP.

2) $B < 0$

quando

$$L_y L_r - X_y F_r < 0 \tag{2.60}$$

Portanto,

$$(\frac{dr}{dY})_B > (\frac{dr}{dY})_M \tag{2.61}$$

Na linguagem de gráfico significa que, isto ocorre quando a inclinação da curva LM é menor que a inclinação da curva BP.

No primeiro caso ($B > 0$), a balança de pagamentos é superavitária. Portanto, há pressão para a valorização da taxa de câmbio. Há excesso de oferta de moeda estrangeira.

A combinação da relação dada por

$$L_y F_r - X_y L_r > 0 \tag{2.62}$$

com a relação dada por

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} \tag{2.63}$$

Portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} > 0 \tag{2.64}$$

Assim, podemos ver claramento que o mecanismo, automático, de sustentação da taxa de câmbio fixo deve aumentar a oferta monetária, ou seja, $M \uparrow$ como haviamos concluído por uma análise qualitativa acima.

O mecanismo opera pela intervenção do Autoridade Monetária (Banco Central) no mercado de câmbio. O BC compra moeda estrangeira com moeda doméstica aumentando a oferta monetária.

O impacto da política fiscal expansionista é dado por

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{(1 - C'(1 - T') - X_y) + \dfrac{X_y I_r}{F_r}} \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} > 0 \tag{2.66}$$

Desta forma a política fiscal é efetiva em fazer $Y \uparrow$ quando $G \uparrow$.

No caso da taxa de juros, podemos calcular, do mesmo modo

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-X_y}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} > 0 \tag{2.67}$$

Como o denominador é positivo, e também o numerador, temos que no caso de uma política fiscal expansiva, a taxa de juros também aumenta.

Também no segundo caso $B < 0$, da combinação das duas relações anteriores

$$L_y F_r - X_y L_r < 0 \tag{2.68}$$

e, da

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} \tag{2.69}$$

Portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} < 0 \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial M}{\partial G} < 0 \tag{2.71}$$

Assim, podemos ver claramento que o mecanismo, automático, de sustentação da taxa de câmbio fixo deve diminuir a oferta monetária, ou seja, $M \downarrow$ como haviamos concluído por uma análise qualitativa acima.

O mecanismo opera pela intervenção do Autoridade Monetária (Banco Central) no mercado de câmbio. O BC vende moeda estrangeira comprando moeda doméstica diminuindo as reservas de divisas.

O impacto da política fiscal expansionista é, no caso da $B < 0$ também efetiva, mas, menos.

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{(1 - C'(1 - T') - X_y) + \dfrac{X_y I_r}{F_r}} \tag{2.72}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} > 0 \tag{2.73}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-X_y}{F_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \dfrac{X_y I_r}{F_r})} > 0 \tag{2.74}$$

A política monetária expansionista, $M \uparrow$ (que desloca a curva da LM para baixo), é efetiva?

IMOBILIDADE DO CAPITAL:

$$F_r = f = 0$$

Considere uma política fiscal expansionista. É ela efetiva na condição da imobilidade do capital, ou seja,

$$\frac{\partial Y}{\partial G} > 0 \tag{2.75}$$

A análise da relação

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{-L_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{L_y I_r}{L_r})} \tag{2.76}$$

para

$$F_r = 0$$

, como o denominador é positivo, implica, que a balança de pagamentos é deficitária.

$$\frac{\partial B}{\partial G} < 0 \tag{2.77}$$

pois,

$$X_y < 0$$

e

$$L_r < 0$$

.

Não há conta capital ($f = 0$), apenas balança comercial, que é deficitária. Portanto, há demanda por moeda estrangeira para efetuar a importação. Neste caso, há pressão para a desvalorização da taxa de câmbio.

Fazendo uso das condições

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} \tag{2.78}$$

e de que

$$F_r = 0$$

,

$$X_y < 0$$

,

$$L_r < 0$$

,e, também, de que o denominador é positivo, temos

$$\frac{\partial M}{\partial G} < 0 \tag{2.79}$$

A oferta monetária deve se contrair. A sustentação da taxa de câmbio fixo é feita pela intervenção da autoridade monetária, o Banco Central, no mercado de câmbio. Ele vende moeda estrangeira por moeda doméstica. Portanto a oferta monetária se contrai, ou seja, $M \downarrow$.Há diminuição das reservas de divisas.

Fazendo

$$F_r = 0$$

na relação

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{F_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} \tag{2.80}$$

segue-se que

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = 0 \tag{2.81}$$

Portanto, a política fiscal expansionista não é efetiva sob a condição de imobilidade do capital.

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-X_y}{F_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{X_y I_r}{F_r})} > 0 \tag{2.82}$$

Que é igual a

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-X_y}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} > 0 \tag{2.83}$$

Portanto, como $F_r = 0$ temos, finalmente,

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-X_y}{X_y I_r} > 0 \tag{2.84}$$

Assim como o denominador e numerador são positivos a taxa de juros aumenta

A política monetária é efetiva?

MOBILIDADE PERFEITA DE CAPITAL:

$$F_r \to \infty$$

Como consequência dessa hipótese, segue-se que $r = r*$, portanto, que a inclinação da curva da BP é nula, e, assim, a curva de PB é horizontal.

A política fiscal expansionista é efetiva?

Pode-se notar, pela aplicação desta condição de mobilidade perfeita de capital na relação abaixo, que uma política fiscal expansionista, $G \uparrow$ (deslocando a curva IS para a direita)

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{-L_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{L_y I_r}{L_r})} \tag{2.85}$$

faz com que a balança de pagamentos seja superavitaria, pois, a inclinação da LM é maior que a inclinação da BP (que é zero), ou seja, dado que

$$L_y F_r - X_y L_r > 0 \tag{2.86}$$

Com o uso dos recursos anteriores, podemos escrever a relação acima como

Decorre desse fato que o mecanismo, BC, de sustentação do cambio fixo deve aumentar a oferta monetária, pois, sob as mesmas condições, a relação abaixo,

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{L_y F_r - X_y L_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} \tag{2.87}$$

Colocando F_r em evidência

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{-F_r L_r(\frac{X_y}{F_r} - \frac{L_y}{L_r})}{F_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{X_y I_r}{F_r})} \tag{2.88}$$

Simplificando

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{-L_r(\frac{X_y}{F_r} - \frac{L_y}{L_r})}{((1 - C'(1 - T') - X_y) + \frac{X_y I_r}{F_r})} \tag{2.89}$$

Simplificando e fazendo

$$F_r \to \infty$$

obtemos

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{-L_r(-\frac{L_y}{L_r})}{(1 - C'(1 - T') - X_y)} \tag{2.90}$$

Como o denominador é positivo e o numerador também, pois, como podemos observar,

$$-\frac{L_y}{L_r} = (\frac{dr}{dy})_M > 0 \tag{2.91}$$

Segue portanto

$$\frac{\partial M}{\partial G} > 0 \tag{2.92}$$

Portanto, no caso da política fiscal expansionista, $G \uparrow$ o mecanismo é de intervenção no mercado de câmbio comprando moeda estrangeira, para evitar a valorização da taxa de câmbio, em troca de venda de moeda doméstica produzindo uma expansão da oferta monetária, $M \uparrow$ e aumento as reservas de divisa.

A política fiscal expansionista, $G \uparrow$ nestas condições, implica que

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{F_r}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} \tag{2.93}$$

Simplifcando, obtemos

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{F_r}{F_r((1 - C'(1 - T') - X_y) + \dfrac{X_y I_r}{F_r})} \tag{2.94}$$

Simplificando ainda mais

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{((1 - C'(1 - T') - X_y) + \dfrac{X_y I_r}{F_r})} \tag{2.95}$$

ou seja, dado que

$$F_r \to \infty$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{(1 - C'(1 - T') - X_y)} > 0$$

Portanto, a política fiscal expansionista é efetiva.

Para a taxa de juros, como temos,

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-X_y}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} \tag{2.96}$$

Portanto, para

$$F_r \to \infty$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-X_y}{F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r} = 0 \tag{2.97}$$

Chapter 3

REGIME DE CÂMBIO FLUTUANTE

MODELO TEÓRICO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO

$$\begin{cases} Y - C(Y - T(Y)) - I(r) - G - X(\epsilon, Y) = 0 & (3.1) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y, r) = 0 & (3.2) \\ B - X(\epsilon, Y) - F(r - r*) = 0 & (3.3) \\ P = cte & (3.4) \\ & (3.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_r > 0 & (3.6) \\ L_r < 0 & (3.7) \\ L_y > 0 & (3.8) \\ X_y < 0 & (3.9) \\ I_r < 0 & (3.10) \\ T_y = T' > 0 & (3.11) \\ C_y = C' > 0 & (3.12) \\ X_\epsilon > 0 & (3.13) \end{cases}$$

Como sabemos o regime de câmbio pode ser combinado com três possíveis regime de mobilidade de capital: o regime de mobilidade imperfeita ou parcial ou de controle relativo de capital, o regime de imobilidade de capital ou de controle absoluto de capital, e, o regime de mobilidade perfeita de capital

3.1 MOBILIDADE DE CAPITAL: MOBILIDADE IMPERFEITA

Análise do impacto da política monetária:

$$\begin{bmatrix} & Y & r & \epsilon & B \\ F^1 & (1-c'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon & 0 \\ F^2 & -L_y & -L_r & 0 & 0 \\ F^3 & -X_y & -F_r & -X_\epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial M} \\ \frac{\partial B}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hipoteses:

1. Economia aberta pequena: Y^*, P^*, r^* são dados,
2. $P = P* = 1$,

3. Regime de cambio flutuante

As variáveis endogenas: Y, r, ϵ. A variável exógena: G, M

Regime de cambio flexivel deve ser combinado com regimes formados de graus diferentes de mobilidade de capital

1. imobilidade do capital $F_r = 0$
2. mobilidade perfeita do capital $F_r \to \infty$
3. mobilidade imperfeita do capital $0 < F_r < \infty$

Abordagem de estática comparativa: análise da política fiscal e monetária.

3.1.1 Considere um politica monetária expansionista: $M_0 \to M_1 > M_0$

Qual seria o impacto da política monetária expansionista, $M_1 > M_0$, sobre a balança de pagamentos B (Lembre-se que ela é zero, contudo, podemos pensar de modo contrafactual)?

$$\begin{bmatrix} & Y & r & B \\ F^1 & (1-c'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ F^2 & -L_y & -L_r & 0 \\ F^3 & -X_y & -F_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial B}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As variáveis endogenas: Y, r, B (provisória). A variável exógena (provisória): M.

Regra de Cramer para a solução na representação matricial da equação acima:

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & -1 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 1 \end{vmatrix}}$$

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-[F_r(1-C'(1-T')-X_y)+I_rX_y]}{-L_r(1-C'(1-T')-X_y)-I_rL_y} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.15}$$

Mecanismo de transmissão da política monetária expansionista:

Se $M \uparrow$ então, pela LM, $r \downarrow$, a conta capital $\downarrow$, e, pela IS, $Y \uparrow$, portanto, a conta comercial também $\downarrow$ implicando que a balança pagamentos seria deficitária.

Isto significa, portanto, que haveria demanda por moeda estrangeira no mercado de divisas. Se houvesse tal demanda por moeda estrangeira no mercado de divisas, e, não se realizando tal transação, então haveria pressão para que a moeda doméstica se depreciasse ou $\epsilon \uparrow$, o que é a mesma coisa, que a moeda estrangeira se apreciasse relativamente à moeda doméstica. Como a taxa de câmbio, que é o número de unidades de moeda doméstica para uma unidade de moeda estrangeira, é determinada pelo mercado de divisas, então, como mencionado, a taxa de câmbio se depreciaria, o que significa que E, e,

portanto, ϵ aumentaria em termos de unidades monetárias por uma unidade de moeda estrangeira.

De modo formal, a interação entre os mercados de bens e serviços, do mercado monetária, do setor externo, e, do mercado de moedas, determina, neste caso, o valor da taxa de câmbio, de tal modo que a balança de pagamentos se anulasse. Essa interação entre os mercados pode ser expresso como

$$\begin{bmatrix} - & Y & r & \epsilon \\ F^1 & (1-c'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ F^2 & -L_y & -L_r & 0 \\ F^3 & -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & -1 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{-Fr(1-C'(1-T')-X_y)-X_yI_r}{[-X_\epsilon(F_rL_y)-L_rX_y)-X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')-X_y)])} \tag{3.16}$$

Fazendo

$$D = -X_\epsilon F_r[L_y(1-\frac{I_r}{F_r})-\frac{L_r}{F_r}(1-C'(1-T'))] < 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{-Fr(1-C'(1-T')-X_y)-X_yI_r}{-X_\epsilon F_r[L_y(1-\frac{I_r}{F_r})-\frac{L_r}{F_r}(1-C'(1-T'))]} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{Fr(1 - C'(1 - T') - X_y) + X_y I_r}{X_\epsilon F_r[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} > 0 \tag{3.20}$$

Portanto, mostramos que, no caso da política monetária expansionista, $M \uparrow$ a taxa de câmbio tem que depreciar $\epsilon \uparrow$ para manter a balança de pagamentos zerada (no novo ponto de equilíbrio).

Mecanismo de transmissão $M \uparrow$, portanto, $r \downarrow$, $I(Y, r) \uparrow$, $Y \uparrow$, portanto, $F(r) \downarrow$ e $X(\epsilon, Y) \downarrow$. Vamos mostrar que $Y \uparrow$ assim como $r \downarrow$.

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -I_r & -X_\epsilon \\ -1 & -L_r & 0 \\ 0 & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{[X_\epsilon I_r - F_r X_\epsilon]}{[-X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y)])} \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{(-I_r + F_r)}{F_r[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & 0 & -X_\epsilon \\ -L_y & -1 & 0 \\ -X_y & 0 & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-1[(-X_\epsilon)(1-C'(1-T')-X_y) - X_y X_\epsilon]}{[-X_\epsilon(F_r L_y) - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')-X_y)])} \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1-C'(1-T'))}{F_r[L_y(1-\frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1-C'(1-T'))]} \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.26}$$

3.1.2 Análise do impacto de uma política fiscal expansionista: $G_0 \to G_1 > G_0$

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 1 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 1 \end{vmatrix}}$$

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{F_r L_y - X_y I_r}{-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y) - I_r L_y} \tag{3.27}$$

Temos duas possibilidade. A primeira

$$F_r L_y - X_Y I_r = -F_r L_r(\frac{X_Y}{F_r} - \frac{L_Y}{L_r}) > 0 \tag{3.28}$$

Mas, como,

$$(\frac{dr}{dy})_M = -\frac{L_Y}{L_r} \tag{3.29}$$

e

$$(\frac{dr}{dy})_B = -\frac{X_Y}{F_r} \tag{3.30}$$

Segue-se que

$$(\frac{dr}{dy})_M > (\frac{dr}{dy})_B \tag{3.31}$$

Portanto, neste caso,

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.32}$$

Mecanismo de transmissão da política fiscal expansionista:

Se $G \uparrow$ então, pela IS, $Y \uparrow$, a conta comercial é deficitária,e, pela LM, como M é fixo, $r \uparrow$, portanto, a conta capital é superavitária. Neste caso, se o câmbio fosse fixo, o valor da balança de pagamentos depende de qual dessas contas é maior, no caso, a conta capital, pois sabemos que B é superavitária.

Mas, nos estamos num regime de câmbio flutuante, portanto, haverá pressão para a moeda doméstica se apreciar, ou seja, o cambío $\downarrow$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 1 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{F_r L_y - L_r X_y}{[-X_\epsilon (F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon (-L_r (1 - C'(1 - T') - X_y)])} \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{-(F_r L_y - X_y I_r)}{X_\epsilon F_r [L_y (1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.34}$$

Mas, estamos lidando com o caso em que, se o câmbio fosse fixo, B seria superavitária, ou seja $B > 0$, como afirmado acima, desta forma,

$$F_r L_y - X_Y I_r = -F_r L_r (\frac{X_Y}{F_r} - \frac{L_Y}{L_r}) > 0 \tag{3.35}$$

Portanto, como vimos,

$$(\frac{dr}{dy})_M > (\frac{dr}{dy})_B \tag{3.36}$$

mas, neste caso,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{-(F_r L_y - X_y I_r)}{X_\epsilon F_r [L_y (1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} < 0 \tag{3.37}$$

Uma vez que

$$X_\epsilon F_r [L_y (1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))] > 0 \tag{3.38}$$

e

$$-(F_r L_y - X_y I_r) < 0 \tag{3.39}$$

Portanto, de modo sintético,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} < 0 \tag{3.40}$$

Neste caso, concluimos, pelo raciocínio algébrico, o que já tinhamos feito pelo raciocínio econômico, que a moeda nacional deve ser apreciada,pois, deve cair o número de moedas doméstica por uma unidade de moeda estrangeira.

Vamos analisar agora, as consequências da política fiscal expansionista, $G\uparrow$, sobre as vairáveis Y e r, que,pelo racioncínio econômico, concluímos que ambas crescem.

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I_r & -X_\epsilon \\ 0 & -L_r & 0 \\ 0 & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{X_\epsilon L_r}{[-X_\epsilon(F_r L_y - X_y L_r) - X_\epsilon(-L_r(1-C`(1-T')-X_y)])} \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{-L_r}{F_r[L_y(1-\frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1-C'(1-T'))]} \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.43}$$

Temos assim a confirmação do raciocínio econômico para o impacto sobre $Y\uparrow$ mostrando que se trata de uma política efetiva.

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & 1 & -X_\epsilon \\ -L_y & 0 & 0 \\ -X_y & 0 & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-1[X_\epsilon L_y]}{[-X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')-X_y)])} \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{L_y}{F_r[L_y(1-\frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1-C'(1-T'))]} \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.46}$$

3.2 IMOBILIDADE DO CAPITAL

Imobilidade do capital $\rightarrow F_r = f = 0$

Análise da política monetária expansionista: $M_0 \rightarrow M_1 > M_0$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & -1 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-[F_r(1 - C'(1 - T') - X_y) + I_r X_y]}{-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y) - I_r L_y} \tag{3.47}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-[I_r X_y]}{-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y) - I_r L_y} \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.49}$$

Desta forma, sob uma política monetária expansionista, seria produzida uma balança de pagamnentos deficitária, fenômeno econômico que, contudo, não ocorre, pela adoção do regime de câmbio fluturante. O regime de câmbio flutuante garante, automaticamente, a balança de pagamentos zero, ou seja, a equivalência, a menos de um sinal, entre o conta comericial e a conta capital. Essa situação ocorre pela, no caso, depreciação da moeda doméstica, ou seja, para $\epsilon \uparrow$.

O câmbio se ajusta automaticamente no mercado de divisas, ou seja, tem seu preço definido pelo mecanismo da oferta e demanda da moeda, da seguinte maneira,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & -1 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{Fr(1 - C'(1 - T') - X_y) - X_y I_r}{[-X_\epsilon(F_r L_y) - X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y)])} \tag{3.50}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{X_y I_r}{[X_\epsilon(1-(-L_r(1-C'(1-T')-X_y)))]} \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.52}$$

Quando de uma balança de pagamentos negativa contrafactual, temos uma pressão para a depreciação da moeda doméstica, $\epsilon \uparrow$ que no câmbio flutuante vai ocorrer para zerar a balança de pagamentos.

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -I_r & -X_\epsilon \\ -1 & -L_r & 0 \\ 0 & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

Vamos verificar agora, se a política monetária expansionista é efetiva. Para isso calculamos

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{X_\epsilon I_r - X_\epsilon F_r}{[-X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1-C`(1-T')-X_y)])} \tag{3.53}$$

Fazendo $F_r = f = 0$ na equação, obtemos

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{-I_r}{(-L_r(1-C'(1-T')))} \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.55}$$

Portanto, quando $M \uparrow$ então $Y \uparrow$, e, assim, temos uma política efetiva.

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & 0 & -X_\epsilon \\ -L_y & -1 & 0 \\ -X_y & 0 & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-1[(-X_\epsilon)(1-C'(1-T')-X_y)-X_yX_\epsilon]}{[-X_\epsilon(F_rL_y-L_rX_y)-X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')-X_y)])} \tag{3.56}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-1[(-X_\epsilon)(1-C'(1-T')-X_y)-X_yX_\epsilon]}{[-X_\epsilon(-L_rX_y)-X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')-X_y))]} \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1-C'(1-T'))}{[-L_r(1-C'(1-T'))]} \tag{3.58}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.59}$$

3.2.1 Análise do impacto de uma política fiscal expansionista: $G_0 \rightarrow G_1 > G_0$

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 1 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 1 \end{vmatrix}}$$

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{F_r L_y - X_y I_r}{-L_r(1-C'(1-T')-X_y) - I_r L_y} \tag{3.60}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{-X_y I_r}{-L_r(1-C'(1-T')-X_y) - I_r L_y} \tag{3.61}$$

Isto significa que

$$(\frac{dr}{dY})_B > (\frac{dr}{dY})_M \tag{3.62}$$

ou seja, que,

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.63}$$

Mecanismo de transmissão da política fiscal expansionista:

Se $G \uparrow$ então, pela IS, $Y \uparrow$, conta comercial é negativa ou deficitária, pela LM, $r \uparrow$, portanto, a conta capital é superavitária. Neste caso, Se o regime de câmbio fosse o fixo, então, a da balança de pagamentos seria deficitária, e, haveria pressão para a depreciação da moeda, como vimos acima.Contudo, como o regime de câmbio é flutuante, é exatamente isso que ocorre, ou seja, o câmbio deprecia $\epsilon \uparrow$ para zerar a balança de pagamentos.

A confirmação desse resultado para o câmbio pode ser visto na análise abaixo, da variação da taxa de câmbio provocada pela política fiscal ex-

pansionista $G \uparrow$. Como estamos no caso de imobilidade de capital, então, verificou-se que a inclinação da curva BP, que é vertical com inclinação infinita, é maior do que a inclinação da curva LM. Desta forma, a balança de pagamentos seria deficitária, como mostrou a análise algébrica acima, e, portanto, que deve haver, por análise econômica, uma depreciação da taxa de cambio, o que mostra a análise abaixo, sob a condição de que a inclinação da balança de pagamentos é maior do que a inclinação da curva LM.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 1 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{(F_r L_y - X_y L_r)}{-X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y))} \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{(F_r L_y - X_y L_r)}{-X_\epsilon F_r[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.65}$$

Como o determinante da regra de cramer vai se manter para toda a análise do impacto da política fiscal expansionista vamos calcular de início, podemos identificá-lo como D

$$D = -X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y)) \tag{3.66}$$

Fazendo $F_r = f = 0$ Obtemos

$$DD = -X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T'))) < 0 \tag{3.67}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{-X_y L_r}{DD} \tag{3.68}$$

Onde sabemos que, do fato que $F_r = 0$

$$(\frac{dr}{dY})_B > (\frac{dr}{dY})_M \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{(-X_y I_r)}{DD} \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{-}{-} > 0 \tag{3.71}$$

Neste caso, $G \uparrow$ a taxa de campo deve ser depreciada, $\epsilon \uparrow$, ou seja, deve aumentar o número de unidades de moedas doméstica por uma unidade de moeda estrangeira, como foi prevista pela análise econômica.

Analisando, agora, o impacto nas variáveis endógenas Y, e r, observamos que,

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I_r & -X_\epsilon \\ 0 & -L_r & 0 \\ 0 & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{X_\epsilon L_r}{D} \tag{3.72}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{X_\epsilon L_r}{-X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T'))} \tag{3.73}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{-L_r}{(-L_r(1-C'(1-T')))} \tag{3.74}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.75}$$

A política fiscal é efetiva ainda que falta avaliar a relação quantitativa do impacto.

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & 1 & -X_\epsilon \\ -L_y & 0 & 0 \\ -X_y & 0 & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-1[X_\epsilon L_y]}{[-X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')-X_y)])} \tag{3.76}$$

Novamente, fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial_r}{\partial G} = \frac{(-1)X_\epsilon L_y}{D} = \frac{-X_\epsilon L_y}{-X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')))} = \frac{L_y}{(-L_r(1-C'(1-T')))} \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.78}$$

MOBILIDADE PERFEITA DO CAPITAL, $F_r = f \to \infty$

Neste caso, como já vimos, a inclinação da curva da balança de pagamentos é nula uma vez que a inclinação da curva da balança é dada pela relação $\frac{X_Y}{F_r}$ e isto implica, como tambémjá vimos que a balança de pagamentos é superavitária quando contrafactualmente está em desequilíbrio. A análise econômica aponta que haverá pressão para a apreciação da taxa de câmbio. Como estamos num regime de câmbio flutuante, isso é o que vai acontecer, o câmbio se altera, apreciando a fim de zerar a balança de pagamentos.

$$\begin{bmatrix} - & Y & r & \epsilon \\ F^1 & (1-c'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ F^2 & -L_y & -L_r & 0 \\ F^3 & -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & -1 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

Vamos arrumar algebricamente o numerador e denominador de tal modo a fazer uso da condição da mobilidade perfeita do capital. Desta forma, segue-se que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{F_r(1-C'(1-T')-X_y)-X_yI_r}{[-X_\epsilon(F_rL_y)-I_rL_y)-X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')-X_y)])} \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{F_r[(1-C'(1-T')-X_y)-\frac{X_yI_r}{F_r}]}{-X_\epsilon F_r[L_y(1-\frac{I_r}{F_r})-\frac{L_r}{F_r}(1-C'(1-T'))]} \tag{3.80}$$

Simplificando

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{[(1 - C'(1 - T') - X_y) - \dfrac{X_y I_r}{F_r}]}{-X_\epsilon[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.81}$$

Fazendo $F_r = f \to \infty$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{(1 - C'(1 - T') - X_y)}{-X_\epsilon L_y} \tag{3.82}$$

Portanto, pela análise dos sinais dos componentes da relação algébrica otemos,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} > 0 \tag{3.83}$$

Ou seja, confirmando a análise econômica, a taxa de câmbio deve se apreciar, isto é , se$M \uparrow$ então, $\epsilon \uparrow$.

Estudando agora o impacto da política econômica monetária expansionista $M \uparrow$ sobre as variáveis endógenas Y e r.

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1 & -I_r & 0 \\ 0 & -L_r & -1 \\ 0 & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{[X_\epsilon I_r - F_r X_\epsilon]}{[-X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y)])} \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{(-I_r + F_r)}{F_r[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.85}$$

Preparando algebricamente o numerador e denominador para usar a condição de mobilidade perfeita obtemos

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{1 - \frac{I_r}{F_r}}{[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.86}$$

Aplicando a condição da mobilidade perfeita, obtemos

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{1}{L_y} \tag{3.87}$$

Portanto, a política econômica de $M \uparrow$ é efetiva.

Analisando agora o impacto sobre a taxa de juros, temos

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & 0 & -X_\epsilon \\ -L_y & -1 & 0 \\ -X_y & 0 & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-1[(-X_\epsilon)(1 - C'(1 - T') - X_y) - X_y X_\epsilon]}{[-X_\epsilon(F_r L_y) - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y)])} \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1 - C'(1 - T'))}{F_r[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.89}$$

Aplicando a condição da mobilidade perfeita, $F_r = f \to \infty$, obtemos,

$$\frac{\partial r}{\partial M} = 0 \tag{3.90}$$

3.2.2 Análise do impacto de uma política fiscal expansionista: $G_0 \to G_1 > G_0$

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 1 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 0 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 1 \end{vmatrix}}$$

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{F_r L_y - X_y L_r}{-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y) - I_r L_y} \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{F_r[L_y - \frac{X_y I_r}{F_r}]}{-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y) - I_r L_y} \tag{3.92}$$

Como se pode ver, temos um problema algébrico ainda não solucionado, mas cuja interpretação é que a inclinação da curva da balança de pagamentos é nula e portanto sempre menor que a inclinação da curva da LM.Pela análise econômica sabemos que a balança de pagamento, neste caso, é superavitária produzindo uma pressão para a valorização da taxa de câmbio, que é o que acontece, devido estarmos num regime de câmbio flutuante.

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.93}$$

Mecanismo de transmissão da política fiscal expansionista, ceteris paribus ou seja $M = cte$,e, com $r = r*$, pois, $F_r \to \infty$.

Mas, se $r = r*$ e, como temos uma política fiscal expansionista, então, $M = cte$ (ceteris paribus),e, assim, pela LM, $Y = cte$.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & 1 \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - C'(1 - T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{F_r L_y - L_r X_y}{[-X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1 - C'(1 - T') - X_y)])} \tag{3.94}$$

Preparando o numerador e denominador para aplicar a condição de mobilidade perfeita, obtemos

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{-(F_r L_y - X_y I_r)}{X_\epsilon F_r[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.95}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{F_r[L_y - \dfrac{X_y I_r}{F_r})}{-X_\epsilon F_r[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.96}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{[L_y - \dfrac{X_y I_r}{F_r}}{-X_\epsilon[L_y(1 - \frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1 - C'(1 - T'))]} \tag{3.97}$$

Aplicando a condição de mobilidade perfeita, $F_r = f \to \infty$ obtemos

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{L_y}{-X_\epsilon L_y} = \frac{-1}{X_y} \tag{3.98}$$

Neste caso, a moeda nacional deve ser apreciada,uma vez qaue diminui o número de moedas doméstica por uma unidade de moeda estrangeira.

Fazendo agora a análise do impacto da política fiscal expansionista sobre as variáveis endógenas eY, e, r, temos

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I_r & -X_\epsilon \\ 0 & -L_r & 0 \\ 0 & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{X_\epsilon L_r}{[-X_\epsilon(F_r L_y - X_y L_r) - X_\epsilon(-L_r(1-C`(1-T')-X_y)])} \tag{3.99}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{-L_r}{F_r[L_y(1-\frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1-C'(1-T'))]} \tag{3.100}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = 0 \tag{3.101}$$

Portanto, concluímos que a política fiscal expansionista $G \uparrow$ num regime de câmbio flutuante com mobilidade perfeita, não é efetiva, e, portanto,não deve ser aplicada.

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & 1 & -X_\epsilon \\ -L_y & 0 & 0 \\ -X_y & 0 & -X_\epsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-C'(1-T')-X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ -L_y & -L_r & 0 \\ -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-1[X_\epsilon L_y]}{[-X_\epsilon(F_r L_y - L_r X_y) - X_\epsilon(-L_r(1-C'(1-T')-X_y)])} \tag{3.102}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{L_y}{F_r[L_y(1-\frac{I_r}{F_r}) - \frac{L_r}{F_r}(1-C'(1-T'))]} \tag{3.103}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = 0 \tag{3.104}$$

MODELO KEYNESIANO DE CURTO PRAZO LINEAR

$$\begin{cases} Y - C(Y-T) - I(r) - G - X(\epsilon, Y) = 0 & (3.105) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y,r) = 0 & (3.106) \\ B - X(\epsilon, Y) - F(r - r*) = 0 & (3.107) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(Yd) = a + b.Y_d & (3.108) \\ Y_d = Y - T & (3.109) \\ T = -d + t.Y & (3.110) \\ I(r) = I_0 - g.r & (3.111) \\ X(\epsilon, Y) = EX_0 + h.E - IM_0 - mY & (3.112) \\ L(y, r) = k.y - l.r & (3.113) \\ F(r - r*) = -FF_0 + f(r - r*) & (3.114) \end{cases}$$

3.3 REGIME DE CÂMBIO FIXO: $E = \epsilon = cte$ ou $X_\epsilon = 0$

3.3.1 Mobilidade imperfeita de capital: $0 < F_r = f < \infty$

Neste caso, $E = cte$.

$$\begin{bmatrix} & Y & r & B \\ F^1 & (1 - b(1-t) + m) & g & 0 \\ F^2 & -k & l & 0 \\ F^3 & m & -f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial B}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As variáveis endogenas: Y, r, B. A variável exógena: G

Regra de Cramer para a solução na representação matricial da equação acima:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 1 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 1 \end{vmatrix}}$$

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{k.f - m.l}{l((1-b(1-t)+m) + \frac{k.g}{l})} \tag{3.115}$$

Mecanismo automático que dá sustentação à taxa de câmbio fixa é a oferta monetária M.

Análise do impacto da política fiscal:Suponha uma política fiscal expansionária

Neste caso, a balança de pagamento, como vimos acima, é dado por

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{k.f - m.l}{l((1-b(1-t)+m) + \frac{k.g}{l})} \tag{3.116}$$

A política fiscal expansionista produziria uma balança de pagamentos superavitaria no caso em que $\frac{k}{l} > \frac{m}{f}$ e uma balança de pagamentos deficitária no caso em que $\frac{k}{l} < \frac{m}{f}$. Como a oferta monetária se altera para garantir uma balança de pagamentos de equilíbrio então, no caso, desta ser superavitária, a oferta monetária seria expansionista. A balança superavitária pressionaria a valorização do câmbio. A operação de intervenção do BC no mercado de moedas se daria pela compra moeda estrangeira, trocando-a por moeda doméstica, e, portanto, aumentaria a oferta monetária.

A estrutura proveniente do modelo keynesiano de curto prazo para uma política fiscal expansionista é dado por,

$$\begin{bmatrix} & Y & r & M \\ F^1 & (1-b.(1-t)+m) & g & 0 \\ F^2 & -k & l & -1 \\ F^3 & m & -f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial M}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A mudança na oferta monetária M ($M \uparrow$ ou $M \downarrow$) para manter a taxa de câmbio fixo sob impacto de $B > 0$ ou $B < 0$ é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 1 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{kf - ml}{f(1-b(1-t)+m) + mg} \tag{3.117}$$

A relação acima nos mostra que a expansão monetária, $M \uparrow$ é consequência da

1. $\frac{k}{l} > \frac{m}{f}$ (inclinação da LM maior do que inclinação da BP) que é a mesma condição para $BP >$ ou superavitária

2. política fiscal expansionária, $G \uparrow$

A avaliação do impacto da política fiscal expansionista ($G \uparrow$) é representado por:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & g & 0 \\ 0 & l & 1 \\ 0 & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{f}{f(1-b(1-t)+m)+mg} \tag{3.118}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{f}{f((1-b(1-t)+m)+\frac{mg}{f})} \tag{3.119}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{((1-b(1-t)+m)+\frac{mg}{f})} > 0 \tag{3.120}$$

Como é facilmente notado por uma avaliação dos sinais do denominador e numerador, que podem ser obtidos conhecendo os sinais dos coeficientes nas funções IS, LM e BP que, no nosso caso, são todos positivos, no caso de uma política fiscal expansionista, $G \uparrow$, há um aumento do $Y \uparrow$. Portanto,a política fiscal expansionista é efetiva, no quadro teórico adota, no que diz respeito ao aumento do produto da economia.

Desta forma, a política fiscal pode ser utilizada para fazer com que a economia se mova de um estado em equilíbrio, ainda que não em equilíbrio de pleno emprego, para o estado de equilíbrio de pleno emprego.

O impacto da política fiscal expansionista na taxa de juros pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{m}{f(1-b(1-t)+m)+mg} = \frac{m}{f(1-b(1-t)+\frac{mg}{f})} > 0 \qquad (3.121)$$

Assim, enquanto o impacto da política fiscal expansionista faz aumentar a produção favorecendo uma balança de pagamentos deficitária, o aumento da taxa de juros, por outro lado, favorece a atração de capitais. O fator predominante depende da relação entre a inclinação da curva LM relativamente à inclinação da BP.

3.3.2 Imobilidade do capital $= F_r = f = 0$

Neste caso, $E = cte$.

$$\begin{bmatrix} & Y & r & B \\ F^1 & (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ F^2 & -k & l & 0 \\ F^3 & m & -f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial B}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para avaliar o impacto de uma política fiscal expansionista sobre o câmbio, considere inicialmente: As variáveis endogenas: Y, r, B e a variável exógena: G

Regra de Cramer para a solução na representação matricial da equação acima:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 1 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 1 \end{vmatrix}}$$

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{k.f - m.l}{l((1-b(1-t)+m) + \frac{k.g}{l})} \tag{3.122}$$

Mecanismo automático que dá sustentação à taxa de câmbio fixa é a oferta monetária M.

Análise do impacto da política fiscal:Suponha uma política fiscal expansionária

Neste caso, a balança de pagamento, como vimos acima, é dado por

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{k.f - m.l}{l((1-b(1-t)+m) + \frac{k.g}{l})} \tag{3.123}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{-m.l}{l((1-b(1-t)+m) + \frac{k.g}{l})} \tag{3.124}$$

Portanto,

$$\frac{\partial B}{\partial G} < 0 \tag{3.125}$$

A política fiscal expansionista, no caso de imobilidade perfeita do capital, produziria uma balança de pagamentos deficitária uma vez que, neste caso, prevalece a relação $\frac{k}{l} < \frac{m}{f}$ dado que a inclinação da balança de pagamentos é infinita. No caso da balança deficitária haveria demanda por moeda estrangeira no mercado de moedas,e portanto, pressão, para desvalorização do câmbio. Assim, a oferta monetária se altera, contraindo, para garantir uma balança de pagamentos de equilíbrio. A operação automática de intervenção do BC no mercado de moedas se daria pela venda de moeda estrangeira, trocando-a por moeda doméstica, e, portanto,diminuindo a oferta monetária.

A estrutura proveniente do modelo keynesiano de curto prazo para uma política fiscal expansionista é dado por,

$$\begin{bmatrix} & Y & r & M \\ F^1 & (1-b.(1-t)+m) & g & 0 \\ F^2 & -k & l & -1 \\ F^3 & m & -f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial M}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A mudança na oferta monetária M ($M \uparrow$ ou $M \downarrow$) para manter a taxa de câmbio fixo sob impacto de $B > 0$ ou $B < 0$ é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 1 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{kf - ml}{f(1-b(1-t)+m) + mg} \tag{3.126}$$

Fazendo $F_r = f = 0$ equação acima, obtemos,

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{-ml}{f(1-b(1-t)+m) + mg} \tag{3.127}$$

Portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial G} < 0 \tag{3.128}$$

A relação acima nos mostra que a contração monetária, $M \downarrow$ é consequência da

1. $\frac{k}{l} < \frac{m}{f}$ (inclinação da BP, por ser ∞ é maior do que inclinação da LM) que é a mesma condição para $BP < 0$ ou deficitária

2. política fiscal expansionária, $G \uparrow$

A avaliação da efetividade do impacto da política fiscal expansionista ($G \uparrow$) é representado por:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & g & 0 \\ 0 & l & 1 \\ 0 & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{f}{[f(1-b(1-t)+m)+mg]} \tag{3.129}$$

Fazendo $F_r = f = 0$ na equação anterior,

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{0}{mg} = 0 \tag{3.130}$$

A política fiscal expansionista não é efetiva, no quadro teórico adotado da imobilidade perfeita, no que diz respeito a fazer aumenter o produto da economia. A produção não se altera.

Desta forma, a política fiscal não deve ser utilizada para fazer com que a economia se mova de um estado em equilíbrio, ainda que não em equilíbrio de pleno emprego, para o estado de equilíbrio de pleno emprego.

O impacto da política fiscal expansionista na taxa de juros pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{m}{f(1-b(1-t)+m)+mg} = \tag{3.131}$$

Fazendo $F_r = f = 0$ na equação anterior

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{m}{mg} = \frac{1}{g} > 0 \tag{3.132}$$

Isto significa que houve, pela queação LM, uma contração na oferta monetária,dado que o valor de Y é fixo. A contração na oferta monetária decorrer que o BC entra no mercado de moedas vendendo moeda estrangeira e recebendo moeda doméstica, portanto, enxugando o mercado de moedas de moeda doméstica. Dizer que a balança de pagamentos é deficitária é dizer que há demanda por moeda estrangeira, e, portanto, pressão para desvalorização da moeda doméstica ou valorização da moeda estrangeira.

$$\begin{cases} Y - C(Y-T) - I(r) - G - X(\epsilon, Y) = 0 & (3.133) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y,r) = 0 & (3.134) \\ B - X(\epsilon, Y) - F(r - r*) = 0 & (3.135) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(Yd) = a + b.Y_d & (3.136) \\ Y_d = Y - T & (3.137) \\ T = -d + t.Y & (3.138) \\ I(r) = I_0 - g.r & (3.139) \\ X(\epsilon, Y) = EX_0 + h.E - IM_0 - mY & (3.140) \\ L(y, r) = k.y - l.r & (3.141) \\ F(r - r*) = -FF_0 + f(r - r*) & (3.142) \end{cases}$$

3.3.3 Mobilidade perfeita de capital: $F_r = f \to \infty$

Neste caso, $E = cte$.

$$\begin{bmatrix} & Y & r & B \\ F^1 & (1 - b(1-t) + m) & g & 0 \\ F^2 & -k & l & 0 \\ F^3 & m & -f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial B}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As variáveis endógenas: Y, r, B. A variável exógena: G

Regra de Cramer para a solução na representação matricial da equação acima:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - b(1-t) + m) & g & 1 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - b(1-t) + m) & g & 0 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 1 \end{vmatrix}}$$

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{k.f - m.l}{l((1 - b(1-t) + m) + \frac{k.g}{l})} \tag{3.143}$$

Mecanismo automático que dá sustentação à taxa de câmbio fixa é a oferta monetária M.

Análise do impacto da política fiscal:Suponha uma política fiscal expansionária

Neste caso, a balança de pagamento, como vimos acima, é dado por

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{k.f - m.l}{l((1 - b(1-t) + m) + \frac{k.g}{l})} \tag{3.144}$$

Hipóteses $F_r = f \to \infty$.

O presuposto de que $f \to \infty$ implica que a inclinação da curva BP no plano rY é nula, e, portanto, a BP É horizontal em r=r*. Da condição acima $\frac{k}{l} > \frac{m}{f}$ faz com que $BP > 0$. Da política fiscal expansionista, $M \uparrow$, e, da mobilidade perfeita de capital, ou seja, $f = infty$ segue-se que $\frac{k}{l} > 0$, o que é consistente com $BP > 0$.

Uma $BP > 0$ contrafactual, dado que o regime é de câmbio fixo, leva a alterar a oferta monetária para garantir uma balança de pagamentos de equilíbrio, $BP = 0$. Para evitar que $BP >$ e para manter o câmbio fixo, então, a oferta monetária deveria ser expansionista. A balança superavitária pressionaria a valorização do câmbio. A operação de intervenção do BC no mercado de moedas se daria pela compra moeda estrangeira, trocando-a por moeda doméstica, e, portanto, aumentaria a oferta monetária.

A estrutura proveniente do modelo keynesiano de curto prazo para avaliar uma política fiscal expansionista, $M \uparrow$ é dado por,

$$\begin{bmatrix} & Y & r & M \\ F^1 & (1-b.(1-t)+m) & g & 0 \\ F^2 & -k & l & -1 \\ F^3 & m & -f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial M}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se não quiseremos fazer o raciocínio anterior, podemos avaliar qual é a alteração na oferta monetária M ($M \uparrow$ ou $M \downarrow$), que se daria automaticamente, para manter a taxa de câmbio fixo sob impacto de $BP > 0$ é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 1 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{kf - ml}{f(1-b(1-t)+m)+mg} \tag{3.145}$$

Fazendo $F_r = f \to \infty$

$$\frac{\partial M}{\partial G} = \frac{f(k-\frac{ml}{f})}{f((1-b(1-t)+m)+\frac{mg}{f})} \to \frac{k}{(1-b(1-t)+m)} \tag{3.146}$$

A relação acima nos mostra que a expansão monetária, $M \uparrow$ é consequência da

1. relação $\frac{k}{l} > \frac{m}{f} = 0$ (no caso de $f \to \infty$ inclinação da LM maior do que inclinação da BP que é igual a 0). Relaçaõ que é a mesma condição para fazer $BP >$ ou superavitária,

2. política fiscal expansionária, $G \uparrow$.

A avaliação do impacto da política fiscal expansionista ($G \uparrow$) é representado por:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & g & 0 \\ 0 & l & 1 \\ 0 & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{f}{f(1-b(1-t)+m)+mg} \tag{3.147}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{f}{f((1-b(1-t)+m)+\frac{mg}{f})} \tag{3.148}$$

Fazendo $F_r = f \to \infty$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{((1-b(1-t)+m)+\frac{mg}{f})} \to \frac{1}{(1-b(1-t)+m)} > 0 \tag{3.149}$$

No caso de uma política fiscal expansionista, $G \uparrow$, da relação acima, há um aumento do $Y \uparrow$. Portanto,a política fiscal expansionista é efetiva, no quadro teórico adotado, no que diz respeito ao aumento do produto da economia.

Desta forma, a política fiscal pode ser utilizada para fazer com que a economia se mova de um estado em equilíbrio, ainda que não em equilíbrio de pleno emprego, para o estado de equilíbrio de pleno emprego.

O impacto da política fiscal expansionista na taxa de juros pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}$$

Fazendo $F_r = f \to \infty$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{m}{f(1-b(1-t)+m)+mg} = \frac{m}{f(1-b(1-t)+\dfrac{mg}{f})} \to 0 \qquad (3.150)$$

Assim, enquanto o impacto da política fiscal expansionista faz aumentar a produção favorecendo uma balança de pagamentos deficitária, por outro lado, esta mesma política fiscal expansionista não tem influência na taxa de juros.

3.4 regime de câmbio flutuante: E, ou ϵ é livre para flutuar.

3.4.1 mobilidade imperfeita de capital $0 < F_r = f < \infty$

$$\begin{cases} Y - C(Y-T) - I(r) - G - X(\epsilon, Y) = 0 & (3.151) \\ \dfrac{M}{P} - L(Y,r) = 0 & (3.152) \\ B - X(\epsilon, Y) - F(r - r*) = 0 & (3.153) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(Yd) = a + b.Y_d & (3.154) \\ Y_d = Y - T & (3.155) \\ T = -d + t.Y & (3.156) \\ I(r) = I_0 - g.r & (3.157) \\ X(\epsilon, Y) = EX_0 + h.E - IM_0 - mY & (3.158) \\ L(y,r) = k.y - l.r & (3.159) \\ F(r - r*) = -FF_0 + f(r - r*) & (3.160) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} & Y & r & \epsilon \\ F^1 & (1 - c'(1-T') - X_y) & -I_r & -X_\epsilon \\ F^2 & -L_y & -L_r & 0 \\ F^3 & -X_y & -F_r & -X_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & Y & r & \epsilon \\ F^1 & (1 - b.(1-t) + m) & g & -h \\ F^2 & -k & l & 0 \\ F^3 & m & -f & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Y}{\partial M} \\ \dfrac{\partial r}{\partial M} \\ \dfrac{\partial \epsilon}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

POLÍTICA MONETÁRIA EXPANSIONISTA: $M \uparrow$ e ceteris paribus.

Podemos avaliar de quanto teria sido o impacto na balança de pagamentos caso não estivessemos num regime de câmbio flutuante que depreciasse ou apreciasse a moeda doméstica para manter $BP = 0$

$$\begin{bmatrix} & Y & r & B \\ F^1 & (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ F^2 & -k & l & 0 \\ F^3 & m & -f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial B}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & -1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 1 \end{vmatrix}}$$

As variáveis endogenas: Y, r, B (provisória). A variável exógena: M.

Regra de Cramer para a solução na representação matricial da equação acima:

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-[f(1-b(1-t)+m)+gm]}{l(1-b(1-t)+m)+gk} \tag{3.161}$$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.162}$$

Mecanismo de transmissão da política monetária expansionista:

Se $M \uparrow$ então, pela LM, $r \downarrow$, a conta capital $\downarrow$, e, pela IS, $Y \uparrow$, portanto, a conta comercial também $\downarrow$ implicando que a balança comercial seria

deficitária.

A isto significa que haveria demanda no mercado de moedas, por moeda estrangeira. Se houvesse uma tal demanda por moeda estrangeira no mercado de moedas, então, haveria pressão para que o valor da moeda doméstica se depreciasse ou, o que é a mesma coisa, que o valor da moeda estrangeira se apreciasse relativamente à moeda doméstica. Como a taxa de câmbio, que é o valor da moeda doméstica em termos da moeda estrangeira, é determinada pelo mercado de moedas, então, o aumento de demanda por moeda estrangeira faria com que taxa de câmbio doméstica se depreciaria. Isto significaria que E, e, portanto, ϵ, aumentaria o número de unidades de moeda doméstica por uma unidade de moeda estrangeira.

De modo formal, a interação entre o mercados de bens e serviços, do mercado financeiro, do setor externo, e, do mercado de moedas, determina, sob as condições estabelecidas no modelo sendo aplicado, o valor da taxa de câmbio $E = \epsilon$. A variação na taxa de câmbio implicado pela poítica monetária expansionista (considerando ceteris paribus) segundo as condições do modelo pode ser expresso como

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & -1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{-f(1-b(1-t)+m) - ml}{[-h(fk-ml) - h(l(1-b(1-t)+m) + gk)])} \tag{3.163}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{[f(1-b(1-t)+m)+ml]}{h[fk+gk+l(1-b(1-t))])} \tag{3.164}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.165}$$

Portanto, no caso da pressão para uma balança de pagamentos deficitária a taxa de câmbio depreciaria (a moeda doméstica seria precificada pela concorrência de sua oferta e demanda) para manter o equilíbrio da $BP = 0$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (0 & g & -h \\ -1 & l & 0 \\ 0 & -f & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{[-hg-fh]}{[-h(fk-lm)-h(l(1-b(1-t)+m)+gk)]} \tag{3.166}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{(-h(g+f)}{-h[fk+gk+(l(1-b(1-t))]} \tag{3.167}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{g+f}{k(g+f)+l(1-b(1-t))} > 0 \tag{3.168}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.169}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (0 & g & -h \\ -1 & l & 0 \\ 0 & -f & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & 0 & -h \\ -k & -1 & 0 \\ m & 0 & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-1[(-h(1-b(1-t)+m)+mh]}{[-h(fk-ml)-h(l(1-b(1-t)+m)+gk)])} \tag{3.170}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{h(1-b(1-t))}{-h[k(f+g)+l(1-b(1-t))]} \tag{3.171}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1-b(1-t))}{k(f+g)+l(1-b(1-t))} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.172}$$

POLÍTICA FISCAL EXPANSIONISTA: $G_0 \to G_1 > G_0$

$$\begin{bmatrix} & Y & r & B \\ F^1 & (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ F^2 & -k & l & 0 \\ F^3 & m & -f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial B}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 1 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 1 \end{vmatrix}}$$

As variáveis endogenas: Y, r, B (provisória). A variável exógena: G.

Regra de Cramer para a solução na representação matricial da equação acima:

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{fk - ml]}{l(1-b(1-t)+m) + gk} \tag{3.173}$$

Se $\frac{k}{l} > \frac{m}{f}$ (inclinação da LM for maior do que a inclinação da BP), neste, caso, o impacto da política fiscal expansionista é fazer a balança de pagamentos superavitária, segue-se, da equação acima,

$$\frac{\partial B}{\partial G} = \frac{+}{+} < 0 \tag{3.174}$$

Mecanismo de transmissão da política fiscal expansionista (ceteris paribus):

Se $G \uparrow$ então, pela IS, $Y \uparrow$,que, implica uma balança comercial, $BC \downarrow$, mas, pela LM ($M = cte$), $r \uparrow$, portanto, a conta capital também $CK \uparrow$. Há uma competição entre a balança comercial e a conta capital. Prevalece a conta capital se a inclinação da LM for maior do que a inclinação da BP.

A Isto significa que haveria oferta, no mercado de moedas, de moeda estrangeira. Se houvesse uma tal oferta por moeda estrangeira no mercado

de moedas, então, haveria pressão para a apreciação da moeda doméstica ou, o que é a mesma coisa, que o valor da moeda estrangeira se depreciasse relativamente à moeda doméstica. Como a taxa de câmbio, que é o valor da moeda doméstica em termos da moeda estrangeira, é determinada pelo mercado de moedas, então, o aumento da oferta de moeda estrangeira faria com que taxa de câmbio doméstica se apreciasse. Isto significaria que E, e, portanto, ϵ, diminuiria o número de unidades de moeda doméstica por uma unidade de moeda estrangeira.

De modo formal, a interação entre o mercados de bens e serviços, do mercado financeiro, do setor externo, e, do mercado de moedas, determina, sob as condições estabelecidas no modelo sendo aplicado, o valor da taxa de câmbio $E = \epsilon$. A variação na taxa de câmbio implicado pela poítica fiscal expansionista (considerando ceteris paribus) segundo as condições do modelo pode ser expresso como

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 1 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{kf - ml}{[-h(fk - ml) - h(l(1-b(1-t)+m) + gk)])} \tag{3.175}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{[kf - ml]}{-h[fk + gk + l(1-b(1-t))])} \tag{3.176}$$

Portanto, como assumimos anteriormente que, a inclinação da LM é maior que a inclinação da IS, ou seja $\frac{k}{l} > \frac{m}{f}$, neste caso,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial G} = \frac{+}{-} < 0 \tag{3.177}$$

Portanto, no caso da pressão para uma balança de pagamentos superavitária a taxa de câmbio deveria apreciar (a moeda doméstica seria precificada pela concorrência de sua oferta e demanda) para manter o equilíbrio da $BP = 0$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1 & g & -h \\ 0 & l & 0 \\ 0 & -f & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{[-hl]}{[-h(fk - lm) - h(l(1 - b(1 - t) + m) + gk)]} \tag{3.178}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{(-hl}{-h[fk + gk + (l(1 - b(1 - t))]} \tag{3.179}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{k(g + f) + l(1 - b(1 - t))} \tag{3.180}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.181}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & 1 & -h \\ -k & 0 & 0 \\ m & 0 & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-hk}{[-h(fk-ml)-h(l(1-b(1-t)+m)+gk)])} \tag{3.182}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{-hk}{-h[k(f+g)+l(1-b(1-t))]} \tag{3.183}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{k}{k(f+g)+l(1-b(1-t))} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.184}$$

3.4.2 Imobilidade do capital: $F_r = f = 0$

$$\begin{bmatrix} & Y & r & \epsilon \\ F^1 & (1-b.(1-t)+m) & g & -h \\ F^2 & -k & l & 0 \\ F^3 & m & -f & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Política monetária expansionista: $M \uparrow$ e ceteris paribus.

Podemos avaliar de quanto teria sido o impacto na balança de pagamentos caso não estivessemos num regime de câmbio flutuante que depreciasse ou apreciasse a moeda doméstica para manter $BP = 0$

$$\begin{bmatrix} & Y & & r & B \\ F^1 & (1-b(1-t)+m) & & g & 0 \\ F^2 & & -k & l & 0 \\ F^3 & & m & -f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial B}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & -1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & 0 \\ m & -f & 1 \end{vmatrix}}$$

As variáveis endogenas: Y, r, B (provisória). A variável exógena: M.

Regra de Cramer para a solução na representação matricial da equação acima:

Achando os determinantes das matrizes:

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-[f(1-b(1-t)+m)+gm]}{l(1-b(1-t)+m)+gk} \tag{3.185}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-gm}{l(1-b(1-t)+m)+gk} \tag{3.186}$$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.187}$$

Mecanismo de transmissão da política monetária expansionista:

Se $M \uparrow$ então, pela LM, $r \downarrow$, a conta capital $\downarrow$, e, pela IS, $Y \uparrow$, portanto, a conta comercial também $\downarrow$ implicando que a balança comercial seria deficitária.

A Isto significa que haveria demanda no mercado de moedas, por moeda estrangeira. Se houvesse uma tal demanda por moeda estrangeira no mercado de moedas, então, haveria pressão para que o valor da moeda doméstica se depreciasse ou, o que é a mesma coisa, que o valor da moeda estrangeira se apreciasse relativamente à moeda doméstica. Como a taxa de câmbio, que é o valor da moeda doméstica em termos da moeda estrangeira, é determinada pelo mercado de moedas, então, o aumento de demanda por moeda estrangeira faria com que taxa de câmbio doméstica se depreciaria. Isto significaria que E, e, portanto, ϵ, aumentaria o número de unidades de moeda doméstica por uma unidade de moeda estrangeira.

De modo formal, a interação entre o mercados de bens e serviços, do mercado financeiro, do setor externo, e, do mercado de moedas, determina, sob as condições estabelecidas no modelo sendo aplicado, o valor da taxa de câmbio $E = \epsilon$. A variação na taxa de câmbio implicado pela poítica monetária expansionista (considerando ceteris paribus) segundo as condições do modelo pode ser expresso como

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & -1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{-f(1-b(1-t)+m)-ml}{[-h(fk-ml)-h(l(1-b(1-t)+m)+gk)])} \tag{3.188}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{[f(1-b(1-t)+m)+ml]}{h[fk+gk+l(1-b(1-t))])} \tag{3.189}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{[ml]}{h[gk+l(1-b(1-t))])} \tag{3.190}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.191}$$

Portanto, para contrapor a uma balança de pagamentos deficitária a taxa de câmbio depreciaria (a moeda doméstica seria precificada pela concorrência de sua oferta e demanda) para manter o equilíbrio da $BP = 0$

O impacto da política monetária expansionista no produto é dado pela seguinte relação

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (0 & g & -h \\ -1 & l & 0 \\ 0 & -f & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{[-hg - fh]}{[-h(fk - lm) - h(l(1 - b(1 - t) + m) + gk)]} \tag{3.192}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{(-h(g + f)}{-h[fk + gk + (l(1 - b(1 - t))]} \tag{3.193}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{g + f}{k(g + f) + l(1 - b(1 - t))} > 0 \tag{3.194}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{g}{kg + l(1 - b(1 - t))} > 0 \tag{3.195}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.196}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - b(1 - t) + m) & 0 & -h \\ -k & -1 & 0 \\ m & 0 & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - b(1 - t) + m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-1[(-h(1 - b(1 - t) + m) + mh]}{[-h(fk - ml) - h(l(1 - b(1 - t) + m) + gk)])} \tag{3.197}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{h(1-b(1-t))}{-h[k(f+g)+l(1-b(1-t))]} \tag{3.198}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1-b(1-t))}{k(f+g)+l(1-b(1-t))} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.199}$$

Fazendo $F_r = f = 0$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1-b(1-t))}{kg+l(1-b(1-t))} = \frac{-}{+} < 0 \tag{3.200}$$

3.4.3 Mobilidade perfeita do capital, $F_r = f \to \infty, \to r = r*$

$$B = X(\epsilon, y) + F(r - r*) \tag{3.201}$$

$$0 = EX_0 + h.E - IM_0 - mY - FF_0 + f(r - r*) \tag{3.202}$$

$$r = \frac{EX_0}{f} - \frac{h}{f}.E + \frac{IM_0}{f} + \frac{m}{f}Y + \frac{FF_0}{f} + r* \tag{3.203}$$

Fazendo $F_r = f \to \infty$ na equação anterior obtem-se $r = r*$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & 0 \\ -k & l & -1 \\ m & -f & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{-f(1-b(1-t)+m)-ml}{[-h(fk-ml)-h(l(1-b(1-t)+m)+gk)])} \tag{3.204}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{[f(1-b(1-t)+m)+ml]}{h[fk+gk+l(1-b(1-t))])} \tag{3.205}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{f[(1-b(1-t)+m)+\frac{ml}{f}]}{hf[k+\frac{gk}{f}+\frac{l(1-b(1-t))])}{f}} \tag{3.206}$$

Fazendo $F_r = f \to \infty$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{[(1-b(1-t)+m)+]}{hk} \tag{3.207}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.208}$$

Portanto, no caso da pressão para uma balança de pagamentos deficitária a taxa de câmbio depreciaria (a moeda doméstica seria precificada pela concorrência de sua oferta e demanda) para manter o equilíbrio da $BP = 0$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (0 & g & -h \\ -1 & l & 0 \\ 0 & -f & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{[-hg - fh]}{[-h(fk - lm) - h(l(1 - b(1 - t) + m) + gk)]} \tag{3.209}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{(-h(g + f)}{-h[fk + gk + (l(1 - b(1 - t))]} \tag{3.210}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{g + f}{k(g + f) + l(1 - b(1 - t))} > 0 \tag{3.211}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\frac{g}{f} + 1}{k(\frac{g}{f} + 1) + \frac{l(1 - b(1 - t))}{f}} \tag{3.212}$$

fazendo $F_r = f \to \infty$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{1}{k} \tag{3.213}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{+}{+} > 0 \tag{3.214}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (0 & g & -h \\ -1 & l & 0 \\ 0 & -f & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - b(1 - t) + m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & 0 & -h \\ -k & -1 & 0 \\ m & 0 & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-b(1-t)+m) & g & -h \\ -k & l & 0 \\ m & -f & -h \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-1[(-h(1-b(1-t)+m)+mh]}{[-h(fk-ml)-h(l(1-b(1-t)+m)+gk)])} \tag{3.215}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{h(1-b(1-t))}{-hf[k(1+\frac{g}{f})+\frac{l(1-b(1-t))}{f}]} \tag{3.216}$$

Fazendo $F_r = f \to \infty$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = 0 \tag{3.217}$$

Não há impacto da política monetária expansionista na taxa de juros

Chapter 4

TEORIA DO CRESCIMENTO ECONÔMICO

Nesta parte do manual todas as informações sobre modelos de crescimento econômico foram extraídos da literatura vigente, particularmente, Blanchard, Carlin, Stone que serão devidamente mencionados na bibliografia, não havendo aqui nenhuma possibilidade de originalidade, mas, apenas uma tentativa de apresentar de forma mais organizada didática os modelos tratados. Tentamos demonstrar e apresentar os detalhes de passagens nas demonstrações que muitos autores consideram pressupostos.

4.1 MODELO DE SOLOW DO CRESCIMENTO ECONÔMICO: SEM TECNOLOGIA

O modelo de Solow para o crescimento econômico introduz uma dimensão dinâmica na teoria neoclássica da economia com a teoria do equilíbrio geral de Walras. A teoria do equilíbrio geral de Walras é uma abordagem estática da economia de mercado, prticularmente, da estrutura de mercado

de competição perfeita. Ele particularmente trata do problema da existência e unicidade do equilíbrio que será retomada em bases mais sólidas e rigorosas com a abordagem de Arrow Debreu. O modelo de Solow para o crescimento econômico é um modelo que pretende descrever qual é a alocação eficiente do recurso escasso, descrito pela produção de um país, entre seus fins alternativos que são o consumo dos indivíduos e o investimento por parte das empresas.

O modelo de Solow constitui de duas equações: a função de produção e o equação dde equilíbrio entre a demanda e a oferta no mercado de bens e serviços.

4.1.1 A função de produção

As empresas, que transformam os fatores de produção em produto, são descritas por uma função denominada de função de produção.

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \tag{4.1}$$

O argumento da função é dado pelos fatores de produção capital, $K(t)$, e trabalho, $L(t)$. A função F descreve a tecnologia que transforma os fatores de produção no produto. A função de produção, no modelo de Solow é assumida como um elemento exógeno deste modelo de crescimento econômico tanto na abordagem estática como dinãmica.

O mercado de fatores é considerado como um mercado de competição perfeita assim como o mercado do produto. Portanto, tanto o preço do produto como os preços dos fatores são considerados como dados do ponto de vista das empresas. A função de produção pode ser considerada como resultado de uma agregação das diversas funções de produção descrevendo as empresas da economia.

Propriedades da função de produção:

1. A função de produção tem a propriedade da homogeneidade de grau 1 ou retornos constantes de escala, ou seja,

   $\lambda Y = \lambda F(K(t), L(t)) = F(\lambda K(t), \lambda L(t))$

2. A função de produção pode ser escrita, fazendo $\lambda = \frac{1}{L}$, em termos per capita como $y = \phi(k)$ onde $y = \dfrac{Y}{L}$ e $k = \dfrac{K}{L}$

3. A função de produção tem a propriedade que o produto marginal do capital e o produto marginal do trabalho são positivos ou seja,

   $PM_L = \left(\dfrac{\partial F}{\partial L}\right)_K > 0$ e $PM_K = \left(\dfrac{\partial F}{\partial K}\right)_L > 0$

4. A função de produção é uma função continuamente diferenciável ao menos até segunda ordem.

5. A função de produção tem a propriedade dos retornos marginais decrescentes, ou seja, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ assim como $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$

6. A função de produção tem a propriedade que seus produtos marginais do trabalho e do capital satisfazem as condições de Inada.

7. Uma função de produção diferenciável $\phi(k) : R_+ \to R_+$ é dita satisfazer as condições de Inada se

   (a)
   $$\lim_{k \to 0} \phi(k)_k = \infty$$

   (b)
   $$\lim_{k \to \infty} \phi(k)_k = 0$$

8. As condições de Inada implicam as condições fracas de Inada. Uma função de produção diferenciável $\phi(k) : R_+ \to R_+$ é dita satisfazer as condições fracas de Inada se

(a) $\lim_{k\to 0} \phi(k)_k = \infty$

(b) $\lim_{k\to \infty} \phi(k)_k = 0$

(c) $\phi(0) = 0$

(d) $\phi(k \to \infty) \to \infty$

4.1.2 A equação da acumulação do capital-A equação fundamental do movimento de Solow

Assumindo o mercado de bens e serviços como um mercado de competição perfeita temos

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{4.2}$$

$$Y(t) - C(t) = S(t) = I(t) \tag{4.3}$$

Temos aqui dois termos

$$I = \frac{dK(t)}{dt} + \delta.K = \dot{K} + \delta.K \tag{4.4}$$

Reescrevendo essa equação na forma

$$\frac{dK(t)}{dt} = I - \delta.K \tag{4.5}$$

Adotando uma função de poupança simples, uma fração constante s do produto, ou seja, $I = S = sY$ temos então,

A segunda equação do modelo de Solow, que é a equação da acumulaçao do capital

$$\frac{dK(t)}{dt} = sY - \delta.K \tag{4.6}$$

Essa equação descreve como o capital se acumula.Esta propriedade pode ser melhor visualizada em termos discretos num período

$$\frac{dK(t)}{dt} = K_{t+1} - K_t \tag{4.7}$$

Desta forma, a acumulação do capital é igual a poupança menos a parte gasta na manutenção do capital.

Podemos representar essa equação, e, também, a função de produção, em termos de variáveis per capita, fazendo $y = \frac{Y}{L}$ e $k = \frac{K}{L}$ e fazendo o uso da propriedade dos retornos constantes de escala.

Fazendo $\lambda = \frac{1}{L}$ temos então que

$\lambda Y = F(\lambda K, \lambda L)$, portanto,

$$\frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) \tag{4.8}$$

finalmente, obtemos, $y = F(k)$ ou $y = \phi(k)$

Do mesmo modo, com a segunda equação do modelo de Solow,

$$Y = C + \frac{dK}{dt} + \delta K \tag{4.9}$$

Podemos, agora, reunir todos os principais pressupostos formando a seguinte estrutura do problema do crescimento econômico.

$$\begin{cases} Y(t) = F(K(t), L(t) & (4.10) \\ Y(t) = C(t) + I(t) & (4.11) \\ I(t) = S(t) & (4.12) \\ S(t) = sY(t) & (4.13) \\ I_{gross}(t) = \dot{K(t)} + \delta.K & (4.14) \end{cases}$$

Uma vez compactando esses pressupostos para servir de diretrizes para a condução da solução do problema do crescimento econômico de Solow, voltamos à equação da acumulação do capital.

Para começar, fazemos a divisão por L para obter uma relação das variáveis em termos per capita.

$$\frac{Y}{L} = \frac{C}{L} + \frac{1}{L}\frac{dK(t)}{dt} + \delta\frac{K}{L} \tag{4.15}$$

$$y(t) = c + \frac{1}{L}\frac{dK(t)}{dt} + \delta.k \tag{4.16}$$

$$y(t) - c(t) = sY = \frac{1}{L}\frac{dK(t)}{dt} + \delta.k \tag{4.17}$$

Há um termo, ou melhor, $\frac{1}{L}\frac{dK(t)}{dt}$ que precisa encontrar sua correspondencia em termos de variáveis per capita. Para encontrar a fórmula correspondente fazemos o seguinte

$$\dot{k} = \frac{dk(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{K}{L}) = \frac{\frac{dK}{dt}L - K\frac{dL}{dt}}{L^2} \tag{4.18}$$

Desta forma, temos

$$\dot{k} = \frac{dk(t)}{dt} = \frac{1}{L}.\frac{dK}{dL} - \frac{K}{L}.(\frac{I}{L}\frac{dL}{dt}) \tag{4.19}$$

A pressuposição é que a taxa de crescimento da força de trabalho que aqui identificamos, por simplificação, com a população é um dado do problema, e definida como $g_L = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = n$. Assim, a taxa de crescimento da força de trabalho é uma variável exógena. Substituindo essa informação na equação da acumulação do capital

$$\dot{k} = \frac{dk}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dK}{dL} - k.g_L \tag{4.20}$$

Portanto,

$$\frac{1}{L}\frac{dK}{dL} = \frac{dk}{dt} + g_L.k = \dot{k} + g_l.k \tag{4.21}$$

Retomando a equação da acumulaçao do capital

$$I = \dot{K} + \delta K = \frac{dK}{dt} + \delta K = S = sY \tag{4.22}$$

Dividindo tudo por L para colocar a equação em termo de variáveis per capita, obtemos

$$\frac{\dot{K}}{L} + \delta\frac{K}{L} = s\frac{Y}{L} \tag{4.23}$$

$$\frac{\dot{K}}{L} = sy - \delta.k \tag{4.24}$$

Mas, como,

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + g_L.k \tag{4.25}$$

Podemos substituir essa expressão na equação

$$y = c + \frac{\dot{K}}{L} + \delta.k \tag{4.26}$$

Obtendo

$$y(t) = c + \frac{dk}{dt} + k.g_L + \delta.k \tag{4.27}$$

Desta forma,

$$y(t) = c + \frac{dk}{dt} + (g_L + \delta).k \tag{4.28}$$

Assim, temos a equação do movimento ou da acumulação de capital

$$\dot{k} = \frac{dk}{dt} = y(t) - c - (g_L + \delta)k \tag{4.29}$$

Como $S(t) = Y(t) - C(t)$ e, como, $S(t) = sY(t)$,e, $\frac{S}{L} = s\frac{Y}{L}$, temos que $y - c = sy$

Assim,

$$\dot{k} = sy(t) - (n + \delta)k \tag{4.30}$$

ou ainda, como $y = \phi(k)$

$$\dot{k} = s\phi(k) - (n + \delta)k \tag{4.31}$$

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s\phi(k)}{k} - (n + \delta) \tag{4.32}$$

Há outro modo de obter e expressar a equação anterior.

Partindo da definição do capital per capita

$$k = \frac{K}{L} \tag{4.33}$$

Tomando o logaritmo

$$\log k = \log \frac{K}{L} = \log K - \log L \tag{4.34}$$

$$\frac{d \log k}{dt} = \frac{d \log K}{dt} - \frac{d \log L}{dt} \tag{4.35}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{4.36}$$

Uniformizando a nomenclatura, vamos definir as taxas de crescimento das variáveis do modelo de Solow,

- $g_k = \frac{\dot{k}}{k}$ é a taxa de crescimento do capital per capita.
- $g_y = \frac{\dot{y}}{y}$ é a taxa de crescimento do produto/da renda per capita.

- $g_K = \dfrac{\dot{K}}{K}$ é a taxa de crescimento do capital
- $g_L = \dfrac{\dot{L}}{L}$ é a taxa de crescimento da força de trabalho.

$$g_k = g_K - g_L \tag{4.37}$$

Como já sabemos $Y = C + I_{gross}$ e $S = Y - C = I_{gross}$ Portanto,

$$I_{gross} = \dot{K} + \delta.K \tag{4.38}$$

Desta forma,

$$Y - C = \dot{K} + \delta.K \tag{4.39}$$

Transformando em variáveis per capita, obtemos,

$$y = c + \frac{\dot{K}}{L} + \delta.k \tag{4.40}$$

$$y - c = \frac{\dot{K}}{L} + \delta.k \tag{4.41}$$

Fazendo uso da pressuposição de que $S = Y - C = sY$, mas, em termos per capita,e, inserindo na equação acima

$$sy = \frac{\dot{K}}{L} + \delta.k \tag{4.42}$$

$$sy = \frac{\dot{K}}{K}.k + \delta.k \tag{4.43}$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sy}{k} - \delta \tag{4.44}$$

Substituindo na equação acima

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sy}{k} - \delta - g_L \tag{4.45}$$

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s\phi(k)}{k} - (\delta + g_L) \tag{4.46}$$

4.1.3 Um modelo concreto de Solow: função de produção Gobb-Douglas

Um exemplo de função de produção com as propriedades mencionadas pode ser a função de produção de Cobb-Dougals.

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \tag{4.47}$$

A função de Cobb-Douglas satisfaz a propriedade dos retornos constantes de escala ou a propriedade de ser homogênea de grau um,

$$Y' = (\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{1-\alpha} \tag{4.48}$$

Portanto,

$$Y' = (\lambda)^{\alpha} (\lambda)^{1-\alpha} K^{\alpha}.L^{1-\alpha} = K^{\alpha}.L^{1-\alpha} = \lambda.Y \tag{4.49}$$

Desta forma,como podemos assumir que $\lambda = \frac{1}{L}$, podemos escrever a função Cobb Douglas em termos de variáveis per capita, como

$$y = k^{\alpha} \tag{4.50}$$

A equação de acumulação do capital com a função de Gobb-Douglas

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s.k^{\alpha}}{k} - (n + \delta) \tag{4.51}$$

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha - 1} - (n + \delta) \tag{4.52}$$

4.1.4 Análise da equação da acumulação do capital

A equação da acumulação do capital consiste de três termos. Um do lado esquerdo e dois do lado direito. O primeiro termo, que fica do lado esquerdo, descreve a acumulação do capital que depende de dois termos competindo entre si.

O primeiro termo q consiste no investimento por trabalhador, $s.y$ ou $s\phi(k)$, e, que portanto, contribui positivamente para o aumento da acumulação do capital.

O segundo termo age para reduzir a acumulação do capital. Este termo consiste de dois outros termos que afetam negativamente a acumulação do capital. Um dos termos descreve a depreciação do capital per capita enquanto o outro termo, que também reduz o capital, descreve essa redução devido ao crescimento da mão de obra ou populacional.

Da equação pode-se identificar o capital per capita de equilíbrio, $\dot{k} = 0$, da economia descrita por essa equação.

4.1.5 Condição de equilíbrio e o estado estacionário

A condição de equilíbrio para k é definida como

Definição 1

$$\dot{k^*} = 0$$

Desta forma, temos o estado estacionário, para o qual

Definição 2

$$k^* = \frac{K}{L} = cte$$

Fazendo $\dot{k} = 0$ na equaçaõ fundamental do movimento de Solow, obtemos a relação

$$0 = s\phi(k) - (g_L + \delta)k \tag{4.53}$$

Daqui, obtemos, k^* que é dado por

$$s\phi(k^*) = (g_L + \delta)k^* \tag{4.54}$$

Tal valor, $k(t)^*$, para a variável capital, corresponde a um estado de equilíbrio, ou seja, um estado em que o valor do capital per capita permanece constante, ou estacionário, no fluxo do tempo. Com a função de produção, $y = \phi(k)$ obtemos, de k^* a produção ou renda de equilíbrio $y^* = \phi(k^*$.

Para que possamos visualizar e interpretar mais precisamente o resultado do modelo, vamos considerar o modelo concreto de Solow com a função Gobb-Douglas em termos per capita, ou seja, $y = k^\alpha$.

$$sk^\alpha = (g_L + \delta)k \tag{4.55}$$

$$k^* = \left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.56}$$

Substituindo esse valor na função de produção per capita, obtemos, o produto per capita de equilíbrio,

$$y^* = \left(\frac{s}{(g_L+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \tag{4.57}$$

Considerando um modelo ainda mais simples em que não há depreciação do capital, portanto, que, $\delta = 0$. Com essa condição, o valor de k^* do estado de equilíbrio (condição de equilíbrio) é dado por

$$\frac{s\phi(k^*)}{k^*} = (g_L) \tag{4.58}$$

Essa condição de equilíbrio pode ser reescrita do seguinte modo para aproveitar da representação geométrica de cada um dos elementos

$$\phi(k^*) = \frac{g_L}{s}k^* \tag{4.59}$$

ou

$$\frac{\phi(k^*)}{k^*} = \frac{g_L}{s} \tag{4.60}$$

Temos assim a representação geométrica da função de produção per capita $\phi(k)$ e a reta através da origem com inclinação $\frac{g_L}{s}$. O estado de equilíbrio se dá na interseção dessas duas curvas.

4.1.6 A estabilidade do estado de equilíbrio

Definição de ponto crítico ou estado de equilíbrio estável:

k^* tal que $\dot{k^*} = 0$.

Considerando a equação da acumulação do capital ou a equação do movimento de Solow

$$\dot{k} = s\phi(k) - (g_L + \delta)k \tag{4.61}$$

ou

$$g_L = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s\phi(k)}{k} - (g_L + \delta) \tag{4.62}$$

Como a condição para o estado de equilíbrio é dado por

$\dot{k} = 0$, temos,

$$\frac{s\phi(k^*)}{k^*} = (g_L + \delta) \tag{4.63}$$

No caso da função Cobb-Douglas $y = \phi(k) = k^\alpha$ em que $0 \leq \alpha \leq 1$, podemos visualizar mais facilmente a estabilidade do estado estacinário que decorre da propriedade da concavidade da função de produção. Substituindo a função de Cobb-Douglas na equação acima temos a renda per capita, k^* do estado de equilíbrio dado por,

$$k^* = \left(\frac{s}{(g_L + \delta)}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.64}$$

Considere a economia num estado descrito por um capital per capita $k_0 < k^*$. Seguindo a definição de estabilidade, no caso, de um estado assintoticamente estável, $k_0 \to k_\infty$?

Há convergência se $\dot{k} > 0$, pois, neste caso, quando $t \uparrow$ então $k \uparrow$ fazendo com que $k_0 \to k_*$.

Assim, vamos considerar a economia em $k_0 < k^*$

$$\dot{k} = sk_0^\alpha - (g_L + \delta)k_0 \tag{4.65}$$

Já sabemos, da condição de equilíbrio que

$$g_L + \delta = sk^{*\alpha-1} \tag{4.66}$$

Substituindo esse termos na equação anterior,

$$\dot{k} = sk_0^\alpha - sk^{*^{\alpha-1}}k_0 \tag{4.67}$$

Colocando sk_0^α em evidência, obtemos

$$\dot{k} = sk_0^\alpha(1 - (\frac{k_0}{k^*})^{(1-\alpha)}) > 0 \tag{4.68}$$

Uma vez que, pelas condições descritas acima

$$(\frac{k_0}{k^*})^{(1-\alpha)} \leq 1 \tag{4.69}$$

Desta forma, se $k_0 < k^*$ então $k_0 \to k^*$

Pelo mesmo raciocínio, podemos mostrar que se $k_0 > k^*$ então $k^* \leftarrow k_0$

Pensando de modo abstrato, a abordagem para avaliar a estabilidade do estado de equilíbrio k^*, que faz com que $\dot{k} = 0$, segue o seguinte raciocínio,

Considerando a equação da acumulação ou a equação fundamental do crescimento na forma

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s\phi(k)}{k} - (\delta + g_L) \tag{4.70}$$

Demonstrar!!!!

4.1.7 Análise do estado de equilíbrio

O estado de equilíbrio, ou ponto crítico, se dá, como já mencionamos, com a condição $\dot{k} = 0$. Substituindo esta condição na equação da acumulação do capital ou equação do movimento de Solow,

$$\dot{k} = s\phi(k) - (g_L + \delta)k \tag{4.71}$$

Obtemos

$$\frac{s\phi(k^*)}{k^*} = (g_L + \delta) \tag{4.72}$$

Fazendo uso da equação de Solow em termos da noção da taxa de crescimento

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s\phi(k)}{k} - (\delta + g_L) \tag{4.73}$$

obtemos, na condição de equilíbrio, $\dot{k} = 0$

$g_k = 0$

Da definição de $g_k = \dfrac{\dot{k}}{k}$ obtemos que

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{d\log k}{dt} = \frac{d\log \dfrac{K}{L}}{dt} = \frac{d\log K}{dt} - \frac{d\log L}{dt} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{4.74}$$

Portanto,

$$g_k = g_K - g_L \tag{4.75}$$

Como no equilíbrio temos que $g_k = 0$, segue-se que, neste caso,

$$g_K = g_L \tag{4.76}$$

Como se trata de um dado, elemento exógeno do problema, que o valor de $g_L = n$, segue-se que, no estado estacionário,

$$g_K = g_L = n \tag{4.77}$$

Da função de produção na forma $y = \phi(k)$ segue-se, por derivação em relaçao ao tempo,

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{d\phi(k)}{dk}.\frac{dk}{dt} = \frac{d\phi(k)}{dk}.\dot{k} \tag{4.78}$$

Portanto, com a condição do estado de equilíbrio que $g_k = \dfrac{\dot{k}}{k} = 0$, temos que $g_y = \dfrac{\dot{y}}{y} = 0$. Desta forma, podemos afirmar que, no estado de equilíbrio, as taxas de crescimento, capital, g_k, ou renda/produto, g_y, per capita, são nulas,

$$g_k = g_y = 0 \tag{4.79}$$

Lembrando da definição de k

$$k = \frac{K}{L} \tag{4.80}$$

Obtemos

$$\log k = \log K - \log L \tag{4.81}$$

Fazendo a derivada em relação ao tempo desta equação, obtemos

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{4.82}$$

No estado estacionário,como $g_k = \dfrac{\dot{k}}{k} = 0$, da equação acima, segue-se que

$$g_K = \frac{\dot{K}}{K} = g_L = \frac{\dot{L}}{L} = n \tag{4.83}$$

Usando agora a definição de renda per capita, y, e, procedendo pelo mesmo raciocínio,

$$y = \frac{Y}{L} \tag{4.84}$$

Tomando o logaritmo desta equação

$$\log y = \log Y - \log L \tag{4.85}$$

Tomando a derivada desta equação, otemos

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{4.86}$$

No estado estacionário $\dot{y} = g_y = 0$, portanto,

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = g_L = \frac{\dot{L}}{L} = n \tag{4.87}$$

Desta forma, no estado estacionário, em que $g_k = g_y = 0$ as taxas de crescimento de Y, K, L, dadas por, g_Y, g_K, g_L são todas constantes e iguais à taxa de crescimento da força de trabalho, ou seja,

$$g_Y = g_K = g_L = n \tag{4.88}$$

Assim, sintetizando, no estado estacionário temos, como característica para as taxas de crescimento do capital per capita e da renda per capita, temos que

$$\begin{cases} g_k = 0 & (4.89) \\ g_y = 0 & (4.90) \end{cases}$$

Ou, ainda, no estado estacionário, em termos das taxas de crescimento do capital, do trabalho e da renda, temos

$$\{g_K = g_Y = g_L = n \tag{4.91}$$

ou

$$\begin{cases} g_k = 0 & (4.92) \\ g_y = 0 & (4.93) \\ g_K = g_Y = g_L = n & (4.94) \end{cases}$$

4.1.8 Dinâmica Transiente: dinâmica em direção ao equilíbrio

A dinâmica do modelo de Solow é descrita pela equação da acumulação do capital ou a equação do movimento de Solow

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s\phi(k)}{k} - (\delta + g_L) \tag{4.95}$$

À medida que o capital, k, cresce, também cresce o produto, $\phi(k)$, contudo, como a função de produção é uma função concava, portanto, com retornos marginais decrescente, apesar de ela crescer, ainda que cada vez menos, a relação $\frac{\phi(k)}{k}$, cai sistematicamente. Para algum valor do capital per capita, k^*, se dá o estado de equilíbrio, um estado estacionário, $\dot{k} = 0$, ou seja,

$$\frac{s\phi(k^*)}{k^*} = (\delta + g_L) \tag{4.96}$$

Segue-se que no estado de equilíbrio, $k = cte$. Como a relação entre y o produto per capita e o capital per capita, k, é dado pela função de produção $y = \phi(k)$ segue-se que $\dot{k} = \dot{y} = 0$ portanto, que no estado estacionário, $k = y = cte$. Desta relação, segue-se que, no estado estacionário, $g_Y =$

$g_K = g_L = n$ definindo um desenvolvimento equilibrado. Contudo, fora do estado de equilíbrio, a relação entre as taxas de crescimento é mais complexa. Essa relação pode ser obtida da função de produção $Y(t) = F(K(t), L(t))$. Tomando a derivada da função de produção e utilizando da regra da cadeia, obtemos

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} \tag{4.97}$$

ou, de forma mais compacta

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t} = F_K.\dot{K} + F_L.\dot{L} \tag{4.98}$$

Dividindo ambas os lados da equação por Y

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{F_K}{Y}\dot{K} + \frac{F_L}{Y}\dot{L} \tag{4.99}$$

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{F_K}{Y}\frac{K\dot{K}}{K} + \frac{F_L}{Y}\frac{L\dot{L}}{L} \tag{4.100}$$

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{KF_K}{Y}g_K + \frac{LF_L}{Y}g_L \tag{4.101}$$

Fazendo as seguintes definições

Definição 3

$$\sigma_Y = \frac{KF_K}{Y}$$

Definição 4

$$\sigma_L = \frac{LF_L}{L}$$

Com estas definições, podemos reescrever a equação acima na seguinte forma

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \sigma_K.g_K + \sigma_L.g_L \tag{4.102}$$

Fazendo uso do teorema de Euler que faz a seguinte afirmação

$$Y = F_K K + F_L L \tag{4.103}$$

Portanto, dividindo ambos os lados por Y

$$1 = \frac{KF_K}{Y} + \frac{LF_L}{Y} \tag{4.104}$$

Ou, fazendo uso das definições acima, obtemos

$$1 = \sigma_K + \sigma_L \tag{4.105}$$

Fazendo uso das condições do estado estacionário descritas anteriormente, particularmente, que $g_K = g_L = n$ e da equação acima, aplicndo na equação dinâmica,

$$g_Y = \sigma_K g_K + \sigma_L g_L = n(\sigma_K + \sigma_L) = n \tag{4.106}$$

Resultado que já sabemos,para o estado estacionário, dá

$$g_Y = g_K = g_L = n \tag{4.107}$$

Outro resultado está diretamente ligado à definição de consumo, que está na equação originária

$$Y = C + I \tag{4.108}$$

e como se trata de uma economia fechada, então,

$$S = I \tag{4.109}$$

Desta forma,
$C = Y - S$
Como pressupomos que $S = sY$

$C = Y - sY = (1 - s)Y$ dividindo tudo por L, obtemos o consumo per capita

$$c = (1 - s)y \tag{4.110}$$

, portanto,

$$\dot{c} = (1 - s)\dot{y} \tag{4.111}$$

Esta equação implica

$$g_c = g_y \tag{4.112}$$

Portanto, no estado estacionário, podemos adicionar que este é caracterizado por

$$g_c = g_y = g_k = 0 \tag{4.113}$$

Como $C = Y - S$ segue-se que

$$S = sY \tag{4.114}$$

e

$$C = (1 - s)Y \tag{4.115}$$

Derivando em relação ao tempo
$\dot{C} = (1 - s)\dot{Y}$
Desta forma,

$$g_C = g_Y \tag{4.116}$$

Implicando que no estado estacionário,

$$g_C = g_Y = g_K = g_L = n \tag{4.117}$$

Outra relação muito importante,mas, fora do estado estacionária, agora, entre as taxas de crescimento do produto per capita e do capital per capita é obtida da função de produção per capita, da seguinte maneira

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\phi(k)}{dk}\frac{dk}{dt} \tag{4.118}$$

Dividindo ambos os lados por y

$$\frac{\dot{y}}{y} = \phi(k)_k \frac{\dot{k}}{y} \tag{4.119}$$

Multiplicando e dividindo por k no segundo menbro da equação

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\phi_k(k)}{\frac{\phi(k)}{k}}\frac{\dot{k}}{k} \tag{4.120}$$

$$g_y = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\phi_k(k)}{\frac{\phi(k)}{k}} g_k \tag{4.121}$$

Como sabemos

Definição 5

$$PMg_k = \phi_k(k)$$

Definição 6

$$PMe_K = \frac{\phi(k)}{k}$$

Portanto,

$$g_y = \frac{PMg_k}{PMe_k} g_k \tag{4.122}$$

Essa relação é muito importante para a análise da estabilidade do estado estacionário dado por $k^* = cte$ Como sabemos, no estado estacionário do modelo de Solow sem tecnologia, $\dot{k^*} = 0$, implicando que $g_k = g_y =$ e $g_K = g_Y = g_L = n$

Como mencionado no início, a função de produção $\phi(k)$, que é assumida continuamente diferenciavel, satisfaz as seguintes condições, entre elas as condições de Inada,

1. $\phi(k)_k > 0$
2. $\phi(k = 0) = 0$
3. $\phi(\lim k \to \infty) = \infty$
4. $\phi(k \to \infty)_k \to 0$
5. $\phi(k \to 0)_k \to \infty$
6. $\phi(k)_{kk} < 0$

Essas condições são importantes para garantir a existência, a unicidade e a estabilidade do ponto de equilíbrio $\dot{} = 0$.

Das condições anteriores, podemos demonstrar que, como já fizemos, para $k_0 < k^*$, temos o seguinte resultado

$$\phi(k)_k < \frac{\phi(k)}{k} \tag{4.123}$$

Demonstração.....

Esse resultado garante que, para $k_0 < k^*$, temos que $k_0 \to k^*$ e que. para $k_0 > k^*$ temos que $k^* \leftarrow k_0$. Desta forma, o ponto k^* tal que $\dot{k} = 0$ é um ponto assintoticamente estável.

4.1.9 Os determinantes do capital e da produto/renda per capita no estado de equilíbrio

Como o estado de equilíbrio é dado por
$\dot{k} = 0$, da equação do movimento de Solow.

Fazendo, portanto, $\dot{k} = 0$ na equação da acumulação do capital, temos

$$0 = s\phi(k) - (g_L + \delta)k \tag{4.124}$$

$$\frac{s\phi(k^*)}{k^*} = (g_L + \delta) \tag{4.125}$$

Obtemos, k^* que

$$\frac{s\phi(k^*)}{k^*} = (g_L + \delta) \tag{4.126}$$

A função de produção, $y = \phi(k)$, que vincula, a variável endógena, y^*, à variável endógena, k^*, portanto, y^* é também determinada pelas variáveis exógenas, g_L, e, δ.

$$y^* = \phi(k^*) \tag{4.127}$$

Desta forma, tanto a variável endógena, k^*, capital per capita,quando a variável endógena, y^*, renda per capita, são determinada pelas variáveis exógenas, $g_L = n$ e δ, e, expoente α.

Tal valor, $k(t)^*$, para a variável capital, corresponde a um estado de equilíbrio, ou seja, um estado em que o valor do capital per capita permanece constante, ou estacionário, no fluxo do tempo assim como a renda per capita y^* também permanece constante, dependente do grupo de variáveis exógenas mencionadas, $g_L = n$, s, e δ, e, expoente α.

Mas, que o capital per capita e a renda per capita são constantes no estado estacionário decorre, como mostramos, da própria definição de estado estacionário, $\dot{k} = 0$, de sua implicação, ou seja, de que $\dot{y} = 0$. Segue-se das definições do estado estacionário que $k = cte$ e também que $y = cte$.

Os determinantes tanto da renda per capita , k quanto da renda per capita, y podem ser mais explicitamente ressaltados usando a função de pro-

dução Cobb Douglas e inserindo ela na equação fundamental do crescimento econômico.

Seja então

$$y = k^{\alpha} \tag{4.128}$$

Substituindo na equação fundamental, como já fizemos anteriormente, e fazendo algumas passagens algébricas, obtemos o valor do capital per capita, k^* do estado estacionário.

$$k^* = \left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.129}$$

Inserindo este valor na equação acima da Cobb Douglas obtemos o valor para a renda per capita, y^*, do estado estacionário

$$y^* = \left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \tag{4.130}$$

Dividindo k^* por y^* ou seja $\frac{k^*}{y^*}$ obtemos

$$\frac{K}{Y} = \frac{s}{n+\delta} \tag{4.131}$$

Pode-se ver, mais explicitamente, com o auxílio da função Cobb Douglas, a dependência tanto do capital per capita, k^*, quanto da renda per capita, y^*, no estado estacionário, das variáveis exógenas, $g_L = n$, s, δ, e, do expoente α. O mesmo pode ser dito da relação entre o capital e o produto como mostra a última equação.

4.1.10 Estática Comparativa

O estudo do impacto das variáveis exógenas, no caso, $s, n = g_L$, δ, $alpha$, sobre as variáveis endógenas, k, e, y, no estado estacionário, pode ser feita por

meio da aplicação do teorema da função implicita às relações fundamentais entre essas variáveis

$$k^* = \left(\frac{s}{(n+\delta)} \right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.132}$$

Substituindo esse valor na função de produção per capita, obtemos, o produto per capita de equilíbrio,

$$y^* = \left(\frac{s}{(g_L+\delta)} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \tag{4.133}$$

A a aplicação do teorema da função implicita a essas relações na representação matricial fornece

$$\begin{bmatrix} & k & y \\ F^1 & 1 & 0 \\ F^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \frac{1}{(n+\delta)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \\ -\frac{s^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)} \frac{\alpha}{(n+\delta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \alpha \frac{s^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)} \frac{1}{(n+\delta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \tag{4.134}$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \alpha \frac{s^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)} \frac{1}{(n+\delta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \tag{4.135}$$

4.1.11 Introdução aos sistemas dinâmicos e equações diferenciais ordinárias:abordagem analítica e numérica

Uma equação diferencial ordinária pode ser escríta de modo implícito como sendo

$$F(x, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}, \frac{dy}{dx}, y(x), F(x)) = 0 \tag{4.136}$$

E, de modo explícito, uma equação diferencial ordinária linear pode ser escrita como

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n y(x) = F(x) \tag{4.137}$$

Qualquer equação diferencial ordinária que não puder ser colocada nessa forma é uma equação diferencial ordinária não linear. A característica de equações diferenciais ordinárias não linear é que ao menos um dos coeficientes tem o argumento dependente da variável dependente y ou o termo não homogêneo como função da variável dependente y.

Como vamos trabalhar, ao menos, por enquanto, com equações diferenciais até segunda ordem, vamos nos restringir a essa forma de equações diferenciais ordinárias ordinárias até segunda ordem, portanto, $a_0(x) \neq 0$. Portanto, vamos trabalhar com equações diferenciais ordinárias lineares da forma

$$a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \tag{4.138}$$

Além disso, vamos restringir um pouco mais o domínio das equações diferenciais e trabalhar, por enquanto, com equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes, portanto,

$$a_0\frac{d^2y(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy(x)}{dx} + a_2y(x) = F(x) \tag{4.139}$$

Vamos substituir os coeficientes, fazendo $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$, e, escrever a variável dependente $y(x)$ sem o argumento x que fica pressuposto, portanto, temos uma forma mais enxuta

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = F(x) \tag{4.140}$$

Nesta etapa, podemos introduzir mais uma classificação, decompondo as equações diferenciais ordinárias lineares em homogêneas, quando o termo $F(x) = 0$, e não homogênea, quando o termo $F(x) \neq 0$. Desta forma, podemos escrever a equação diferencial ordinária linear homogênea como

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{4.141}$$

Adiantamos que a solução de uma equação diferencial ordinária linear não homogênea é dada pela soma da solução da equação diferencial homogênea,y_h com uma solução particular, y_p, da equação diferencial ordinária não homogênea, portanto, $y = y_h + y_p$.

Solução da equação diferencial ordinária homogênea com coeficientes constantes

Para achar a solução y_h da equação diferencial homogênea com coeficientes constantes, assumimos que essa solução tem a forma de um exponencial na variável independente, ou seja, $y = \exp(mx)$, uma vez que a equação diferencial é composta da variável x e das derivadas da variável dependente y.

Encontrando as derivadas primeira e segunda dessa função exponencial, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = m\exp(mx) & (4.142) \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = m^2\exp(mx) & (4.143) \end{cases}$$

Substituindo na equação diferencial, e, fazendo a simplificação necessária, obtemos a equação característica da equação diferencial homogêna, ou seja, uma equação algébrica de segundo grau na incógnita m,

$$am^2\exp(mx) + bm\exp(mx) + c\exp(mx) = am^2 + bm + c = 0 \qquad (4.144)$$

Portanto, como vemos, temos uma equação algébrica de segunda ordem na incógnita m,

$$am^2 + bm + c = 0 \qquad (4.145)$$

cuja solução sabemos, pela fórmula de bhaskara, serem dois valores para m, ou seja, duas raízes,

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4.146)$$

Ou seja

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & (4.147) \\ m_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & (4.148) \end{cases}$$

Como podemos ver as raízes, m_1 e m_2, são determinadas dependentes do discriminante, ou seja, do valor $\Delta = b^2 - 4ac$ ser maior, menor ou igual a zero. Na forma simbólica, as raízes dependem das condições do discriminante,

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (4.149) \\ \Delta < 0 & (4.150) \\ \Delta = 0 & (4.151) \end{cases}$$

No caso em que $\Delta > 0$ $\sqrt{\Delta}$ é um número real e, portanto, temos m_1 e m_2 como raízes reais.

Assim, temos duas soluções da equação diferencial ordinária linear homogênea, uma para cada raíz,

$$\begin{cases} y_1 = \exp(m_1 x) & (4.152) \\ y_2 = \exp(m_2 x) & (4.153) \end{cases}$$

Com isto se revela a natureza da solução geral da equação diferencial ordinária de segunda ordem como sendo formada de uma combinação linear de duas soluções linearmente independentes. Para $m_1 \neq m_2$ temos duas soluçoes linearmente independentes da homogênea. A solução geral é a combinação linear dessas duas soluções linearmente independentes. A solução geral pode, assim, ser escrita como

$$y_h = Ay_1 + By_2 = A\exp(m_1 x) + B\exp(m_2 x) \tag{4.154}$$

No caso em que $\Delta = 0$ temos apenas uma raíz uma vez que as duas raízes são iguais, isto é, da solução da fórmula de baskara, obtemos,

$$m = m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a} \tag{4.155}$$

e, desta forma, construímos, a solução

$$y_1 = \exp(mx) \tag{4.156}$$

Como a solução geral é a combinação de duas soluções linearmente independentes, temos que achar a segunda solução. Isto será feito mais tarde

por meio do método de redução de ordem. Por enquanto, vamos assumir que essa segunda solução linearmente independente, pode ser escrita como,

$$y_2 = x\exp(mx) \tag{4.157}$$

Portanto, a solução geral para uma equação diferencial ordinária linear homogênea com $\Delta = 0$, pode ser escrita,

$$y_h = Ay_1 + By_2 = A\exp(mx) + Bx\exp(mx) \tag{4.158}$$

O último caso, é quando $\Delta < 0$. Portanto, o caso em que temos duas soluções não reais. Essas soluções decorrem de reescrevemos o discriminante como $\Delta = -(4ac - b^2)$ ou como $\Delta = i^2(4ac - b^2)$, em que $i^2 = -1$. Portanto,

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} & (4.159) \\ m_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} & (4.160) \end{cases}$$

Essas soluções podem ser reescritas como

$$\begin{cases} m_1 = \alpha + i\beta & (4.161) \\ m_2 = \alpha - i\beta & (4.162) \end{cases}$$

Onde

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-b}{2a} & (4.163) \\ \beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} & (4.164) \end{cases}$$

Assim, temos as soluções decorrentes de cada raiz

$$\begin{cases} y_1 = \exp((\alpha + i\beta)x) = \exp(\alpha x)\exp(i\beta x) & (4.165) \\ y_2 = \exp((\alpha - i\beta)x) = \exp(\alpha x)\exp(-i\beta x) & (4.166) \end{cases}$$

Finalmente, podemos construir a solução geral para o caso em que$\Delta < 0$ que é a combinação linear das duas soluções acima, ou seja,

$$y_h = Ay_1 + By_2 = A\exp((\alpha + i\beta)x) + B\exp((\alpha - i\beta)x) \tag{4.167}$$

Colocando $\exp(\alpha x)$ em evidência, obtemos a forma da soluçao geral como,

$$y_h = \exp(\alpha x)(A\exp(i\beta x) + B\exp(-i\beta x)) \tag{4.168}$$

Ou ainda, empregando a fórmula de Euler, segundo a qual,

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \tag{4.169}$$

Portanto, podemos reescrever a solução da homogênea como,

$$y_h = \exp(\alpha x)[A(\cos(\beta x) + iB\sin(\beta x) + B(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)] \tag{4.170}$$

Fazendo as passagens e agrupando convenientemente, obtemos

$$y_h = \exp(\alpha x)[(A + iB)\cos(\beta x) + (A - Bi)\sin(\beta x)] \tag{4.171}$$

Finalmente, reescrevemos

$$h_h = \exp(\alpha x)[A^*\cos(\beta x) + B^*\sin(\beta x)] \tag{4.172}$$

Onde A^* e B^* são números complexos. Um exemplo de equação diferencial de segunda ordem ordinária linear não homogênecom valores iniciais a seria

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3x & (4.173) \\ y(0) = 3 & (4.174) \\ y'(0) = 7 & (4.175) \end{cases}$$

Neste caso, a equação diferencial homogênea associada seria

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \tag{4.176}$$

A equação característica, como vimos acima, desta equação diferencial é dada por

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \tag{4.177}$$

cuja solução são duas raízes reais uma vez que o discriminante $\Delta = 25 - 24 = 1$. As duas raízes reais, pela aplicação da fórmula de bhaskara, são $m_1 = 2$ e $m_2 = 3$. Portanto, as duas soluções são $y_1 = \exp(2x)$ e $y_2 = \exp(3x)4$, e, a solução da homogênea é a combinação linear dessas duas soluções, ou seja,

$$y_h = A\exp(2x) + B\exp(3x) \tag{4.178}$$

A solução particular: o método dos coeficientes indeterminados

Vamos considerar agora um método para encontrar a solução particular para a da equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes.O método é denominado de coeficientes indeterminados.

O ponto de partida para desenvolver a aplicação desse método é reconhecer que o termo não homogêneo da equação diferencial, no caso, de segunda ordem, pode ser uma função de três tipos diferentes, ou seja, um polinômio, um exponencial ou uma função cos() ou $sin()$. Ou seja,

$$f(x) = x^n \quad \text{ou} \quad \exp(mx) \quad \text{ou} \quad \cos() \quad \text{ou} \quad \sin() \text{ou uma combinação de todas elas} \tag{4.179}$$

Vamos considerar a equação diferencial não homogênea acima, ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3x & (4.180) \\ y(0) = 13 & (4.181) \\ y'(0) = 16 & (4.182) \end{cases}$$

Observamos que o termo não homogêneo, $f(x) = 3$, portanto, um monônio de primeiro grau. A solução particular segue sempre o padrão da função não homogênea, ou seja,ela é também um função polinomial, na qual, sempre completamos o polinômio. Neste caso, completamos o polinômio com coeficiene e uma constante indeterminada.

$$y_p = Ax + B \tag{4.183}$$

Como essa função polinomial com duas constantes indeterminadas deve ser solução da equação diferencial, devemos substituí-la na equação, obtendo,

$$0 - 2A + 6(Ax + B) = 2x \tag{4.184}$$

Rearranjando os termos num polinômio decrescente

$$6Ax + B - 2A = 2x \tag{4.185}$$

Aplicando a condição para que dois polinonimos seja iguais, temos que os coeficientes correspondentes devem ser iguais, ou seja

$$\begin{cases} 6A = 2 & (4.186) \\ B - 2A = 2 & (4.187) \end{cases}$$

Assim, podemos determinar os coeficientes, ou seja,

$$\begin{cases} A = 3 & (4.188) \\ B = 8 & (4.189) \end{cases}$$

E, portanto, temos a solução particular,

$$y_p = 3x + 8 \tag{4.190}$$

E, do mesmo modo, temos a soluçaõ da equação diferencia linear ordinária não homogênea,

$$y = y_h + y_p = A\exp(2x) + B\exp(3x) + 3x + 8 \tag{4.191}$$

Podemos agora, achar os coeficientes A, e B, com o uso das condições iniciais, ou seja,

$$\{y(0) = A + B + 8 = 13y'(0) = 2A + 3B + 3 = 16 \tag{4.192}$$

De onde, obtemos que, $A = 2$, e, $B = 3$, consruindo, finalmente, a soluçaõ,

$$y = 2\exp(2x) + 3\exp(3x) + 3x + 8 \tag{4.193}$$

No caso em que o termo não homogêneo fosse $f(x) = 3\exp(4x)$, então, teremos como a tentativa da solução da particular,

$$y_p = A\exp(4x) \tag{4.194}$$

Substituindo essa proposta de solução e suas derivadas na equação diferencial não homogênea, teremos

$$16A\exp(4x) - 4.5.A\exp(4x) + 6A.\exp(4x) = 3\exp(4x) \tag{4.195}$$

$$16A - 20A + 6A = 3 \tag{4.196}$$

De onde obtemos que $A = \dfrac{3}{2}$, e, portanto, a solução particular,

$$y_p = \frac{3}{2}\exp(4x) \tag{4.197}$$

E, a solução da equação fica como

$$y = A\exp(2x) + B\exp(3x) + \frac{3}{2}\exp(4x) \tag{4.198}$$

Aplicando as condições iniciais, podemos achar os valores das constantes, A e B que fica como exercício.

Uma função não homogênea mais complexo seria $f(x) = x\exp(4x)$. Neste caso, a proposta de solução particular seria dado completando o polinônimo que é o coeficiente da exponencial, ou seja,

$$y_p = (Ax + B)\exp(4x) \tag{4.199}$$

Devemos achar todas as derivadas da solução particular para substituir na equação diferencial, ou seja,

$$\begin{cases} y_p' = 4(Ax + B)\exp(4x) + A\exp(4x) & (4.200) \\ y_p'' = 16(Ax + B)\exp(4x) + 4A\exp(4x) + 4A\exp(4x) & (4.201) \end{cases}$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$22(Ax+B)\exp(4x)+8A\exp(4x)-8(AX+B)\exp(4x)-2A\exp(x)) = x\exp(4x) \tag{4.202}$$

Simplificando e reunindo os termos na forma de polinônimo temos,

$$(22A - 8A)x + (22B + 8A - 8B - 2A) = x \tag{4.203}$$

$$\begin{cases} 14A = 1 & (4.204) \\ 14B + 6A = 0 & (4.205) \end{cases}$$

Desta forma temos $A = \frac{1}{14}$ e $B = -\frac{3}{98}$, e, chegamos à solução particular

$$y_p = (\frac{1}{14}x - \frac{3}{98})\exp(4x) \tag{4.206}$$

Sendo que a solução então seria dada por

$$y = A\exp(2x) + B\exp(3x) + (\frac{1}{14}x - \frac{3}{98})\exp(4x) \tag{4.207}$$

Equações diferenciais ordinárias linear não homogênea de de primeira ordem

Seja a equação diferencial ordinária linear não homogêna de primeira ordem

$$a_0(s)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = f(x) \tag{4.208}$$

Como se trata de uma equação diferencial de primeira ordem $a_0(x) \neq 0$ em um determinado intervalor I. Podemos dividir todos os termos por $a_0(x)$, obtendo

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{4.209}$$

onde $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ e $f(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}$.

No caso de coeficientes constante, portanto, quando

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x) \tag{4.210}$$

Podemos, neste caso, de coeficiente constantes, aplicar o método anterior, e considerar que a solução geral é igual a solução da homogênea mais a solução da particular, ou seja, $y = y_h + y_p$. A solução da homogênea é obtida assumindo que a solução é da forma $y_h = \exp(mx)$, e, construir a equação característica associada a ela, ou seja,

$$m\exp(mx) + a\exp(mx) = m + a = 0 \tag{4.211}$$

Portanto,a raíz da equação característica é $m = -a$ e a solução da homogênea é $y_h = \exp(-ax)$.

Para achar a solução da particular aplicamos o método dos coeficientes indeterminados como fizemos para as equações diferenciais de segunda ordem.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 3x \tag{4.212}$$

Consideremos a homogênea,

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \tag{4.213}$$

A equação característica é então

$$m - 4 = 0 \tag{4.214}$$

A solução da homogênea é então, $y_h = A\exp(4x)$ e a solução da particular é obtida, considerando

$$y_p = Ax + B \tag{4.215}$$

Calculando a derivada e substituindo ambas na equação diferencial, portanto,

$$A - 4(Ax + B) = 3x \tag{4.216}$$

Construindo os polinomios de ambos os lados e aplicando a condição para que eles são os mesmos, obtemos

$$\begin{cases} -4A = 3 & (4.217) \\ A - 4B = 0 & (4.218) \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} A = -\frac{3}{4} & (4.219) \\ B = \frac{3}{16} & (4.220) \end{cases}$$

Podemos então escrever a solução como

$$y = y_h + y_p = A\exp(4x) - \frac{3}{4}x + \frac{3}{16} \tag{4.221}$$

Um segundo método é usado para resolver equações diferenciais de primeira ordem, de modo geral, portanto, equações diferenciais ordinária, linear, não homogênea, de primeira ordem, com coeficientes não constantes. Trata-se portanto de um método mais poderoso. É o método do fator de integração. Para tanto considera-se a equação diferencial de primeira ordem com coeficientes não constantes na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{4.222}$$

Assumir que exista um fator $\mu(x)$ tal que multiplicamos ambos os lados da equação

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x)f(x) \tag{4.223}$$

Assumimos que

$$\frac{d(\mu(x)y(x))}{dx} = \mu(x)f(x) \tag{4.224}$$

Portanto, a solução é dada, fazendo a integração de ambos os lados,

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int_0^x \mu(z)f(z)dz + \frac{C}{\mu(x)} \tag{4.225}$$

Onde C é uma constante de integração.

Falta portanto, descobrir como expressar o fator de integração $\mu(x)$ em termos dos valores dados na equação diferencial.

Na sequencia, determinamos o valor de $\mu(x)$. Segue-se de ambas as equações, que como são iguais a um terceiro, podemos igualar

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x) = \frac{d(\mu(x)y(x))}{dx} \tag{4.226}$$

Desenvolvendo a derivada do segundo membro, temos

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y(x) = \mu'(x)y(x) + \mu(x)y'(x) \tag{4.227}$$

Simplificando, obtemos

$$\mu(x)p(x)y(x) = \mu'(x)y(x) \tag{4.228}$$

Simplificando, temos

$$\mu(x)p(x) = \mu'(x) \tag{4.229}$$

portanto,

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = p(x)dx \tag{4.230}$$

Assim achamos o fator de integração como

$$\mu(x) = \exp(\int_0^x p(z)dz) \tag{4.231}$$

Com o fator de integração obtido com $p(x)$ conhecido, inserimos o fator de integração na soluçaõ geral que já haviamos obtido anteriormente,

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int_0^x \mu(z)f(z)dz + \frac{C}{\mu(x)} \tag{4.232}$$

Exemplo

Seja a equação diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 2y = \exp(3x) & (4.233) \\ y(0) = 4 & (4.234) \end{cases}$$

Buscamos primeiramente encontrar o fator de integração que é dado por

$$\mu(x) = \exp(\int_0^x -2dz = \exp(-2x) \tag{4.235}$$

Substituindo esse fator na solução geral temos

$$y(x) = \exp(2x) \int_0^x \exp(3z).\exp(-2z)dz + C.\exp(2x) \tag{4.236}$$

$$y(x) = \exp(2x) \int_0^x \exp(z)dz + C\exp(2x) \tag{4.237}$$

$$y(x) = \exp(2x).\exp(x) + C\exp(2x) \tag{4.238}$$

$$y(x) = \exp(3x) + C\exp(2x) \tag{4.239}$$

Portanto,

$$y(0) = 4 = 1 + C \tag{4.240}$$

$$y(x) = 3\exp(2x) + \exp(3x) \tag{4.241}$$

Fazer o mesmo exercício usando o método da separação entre solução homogênea e solução particular com o recurso do método dos coeficientes indeterminados.

Aplicação à equação da acumulação de capital do modelo de Solow com Cobb-Douglas

Vamos retomar a equação fundamental do modelo de Solow-Swan

$$\dot{k} = s\phi(k) - (g_L + \delta)k \tag{4.242}$$

Vamos considerar a função de produção Cobb-Douglas

$$y = \phi(k) = k^{\alpha} \tag{4.243}$$

Substituindo

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (g_L + \delta)k \tag{4.244}$$

Obtemos a equação diferencial de primeira ordem não linear

$$\dot{k} + (g_L + \delta)k = sk^{\alpha} \tag{4.245}$$

dividindo tudo por k^{α} temos

$$k^{-\alpha}\dot{k} + (g_L + \delta)k^{1-\alpha} = s \tag{4.246}$$

Essa equação é conhecida como equação de Bernouilli, e, pode ser colocada na forma de uma equação diferencial de primeira ordem por meio de uma transformada de variável $z = k^{1-\alpha}$.

$$\begin{cases} z = k^{1-\alpha} & (4.247) \\ \dfrac{dz}{dt} = (1-\alpha)k^{\alpha}\dfrac{dk}{dt} & (4.248) \end{cases}$$

Substituindo, obtemos, em termos da variável z,

$$\frac{1}{(1-\alpha}\frac{dz}{dt} + (g_L + \delta)z = s \tag{4.249}$$

Portanto, finalmente, temos a versão de Solow em termos de equação diferencial de primeira ordem linear,

$$\frac{dz}{dt} + (1-\alpha)(g_L + \delta)z = s(1-\alpha) \tag{4.250}$$

Aplicando os métodos desenvolvidos anteriormente, por exemplo, a solução da homogênea, seria obtido, achando a raíz da equação característica

$$m + (1 - \alpha)(g_L + \delta) = 0 \tag{4.251}$$

Com a raíz construímos a solução da homogêna

$$z_h = A \exp(-((1 - \alpha)(g_L + \delta)).t) \tag{4.252}$$

Notar que como $\alpha < 1$ temos uma solução decrescente exponencialmente. A solução particular é obtida por meio dos coeficientes indeterminados

$$z_p = D \tag{4.253}$$

Substituindo essa proposta de solução na equação diferencial, obtemos

$$D(1 - \alpha)(g_L + \delta) = s(1 - \alpha) \tag{4.254}$$

Desta forma, D é dado por

$$D = \frac{s}{(g_L + \delta)} \tag{4.255}$$

Podemos observar que $\frac{s}{(g_L + \delta)}$ é a solução de equilíbrio da equação diferencial em z, que descreve o sistema dinâmico econômico, ou seja quando fazemos $\dot{z} = 0$, isto é, $z^* = \frac{s}{(g_L + \delta)}$.

Desta forma temos a solução z da equação diferencial da versão de Solow linear para o sistema fora do equilíbrio

$$z(t) = A \exp(-((1 - \alpha)(g_L + \delta)).t) + (\frac{s}{(g_L + \delta}) \tag{4.256}$$

Como sabemos, num mercado de concorrência perfeita, o mercado se auto regula, desta forma, quando o sistema está fora de equilíbrio há uma dinâmica em termos de preços que faz o sistema retornar ao equilíbrio. Podemos observar isso, consideando o que acontece quando $t \to \infty$. O termo exponencial

é denominado de transiente, a dinâmica que leva o sistema para o estado estacionário, como podemos observar abaixo.

$$\lim_{t\to\infty}[z(t) = A\exp(-((1-\alpha)(g_L+\delta)).t) + (\frac{s}{(g_L+\delta}})] \tag{4.257}$$

$$\lim_{t\to\infty}[z(t)] = z^* = (\frac{s}{(g_L+\delta})} \tag{4.258}$$

Podemos recuperar o sistema dinâmico do modelo de Solow se lembrarmos da transformação de variáveis, portanto que, $z = k^{1-\alpha}$

$$k(t)^{1-\alpha} = A\exp(-((1-\alpha)(g_L+\delta)).t) + (\frac{s}{(g_L+\delta})} \tag{4.259}$$

Portanto,

$$k(t) = [A\exp(-((1-\alpha)(g_L+\delta)).t) + \frac{s}{(g_L+\delta)}]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.260}$$

Fazendo o limite para encontrar o estado de equilíbrio do modelo de Solow, obtemos

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = [A\exp(-((1-\alpha)(g_L+\delta)).t) + \frac{s}{(g_L+\delta)}]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.261}$$

Assim, finalmente, temos

$$\lim_{t\to\infty}[k(t)] = k^* = (\frac{s}{(g_L+\delta)})^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.262}$$

E, como sabemos, esse é o estado de equilíbrio do modelo de Solow com a função de produçao Cobb Douglas.

4.1.12 A regra de ouro da acumulação do capital

O modelo do crescimento de Solow-Swan é praticamente definido por três expressões matemáticas, uma função, a função de produção, e duas equações, sendo uma delas a sua equação diferencial fundamental, a equação diferencial que descreve a acumulação do capital. Sem detalhar todos os componentes do modelo de Solow-Swan, resumimos o que já obtemos pelo desenvolvimento anterior,

$$\begin{cases} Y(t) = F(K(t), L(t)) & (4.263) \\ Y(t) = C(t) + I(t) & (4.264) \\ \dot{k} = s\phi(k) - (\delta + g_L)k & (4.265) \end{cases}$$

Segue-se da sua equação diferencial fundamental que existe um estado estacionário para $\dot{k} =$ e, como vimos antes, esse estado estacionário, é estável. No estado estacionários temos o valor para o capital per capita k^* dado pela expressão

$$s\phi(k^*) = (g_L + \delta)k^* \tag{4.266}$$

Com a função de produção Cobb Douglas, $\phi(k) = k^\alpha$, a condição é dada por

$$k^* = (\frac{s}{(\delta + g_L)})^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4.267}$$

Dado que para cada conjunto de diferentes valores de δ, g_L, s, podemos ter diferentes valores para o capital per capita, e, assim, diferentes rendas per capita, e também, consumos per capita, gerando, portanto, diferentes estados estacionários. Cabe contudo, uma pergunta, qual é o melhor desses estados estacionários. Um critério de bem estar econômico seria, por exemplo, que o melhor desses estados estacionários fosse o estado em que se maximizasse

o consumo, uma vez que esse estado corresponde a uma melhoria do padrão de vida das pessoas. Neste caso,começamos com a definição de consumo, calculada no estado estacionário, ou seja,

$$c^* = \phi(k^*) - s\phi(k^*) \tag{4.268}$$

Combinando essas duas equações, obtemos

$$c^* = \phi(k^*) - (\delta + g_L)k^* \tag{4.269}$$

Aplicando o critério do bem estar econômico para o qual o melhor desses estados estacionários é aquele que maximiza o consumo, chegamos à condição para um máximo do consumo,

$$\frac{dc^*}{dk^*} = \frac{d\phi(k^*)}{dk^*} - (\delta + g_L) = 0 \tag{4.270}$$

$$\frac{d\phi(k^*)}{dk^*} = (\delta + g_L) \tag{4.271}$$

A interpretaçao dessa condição sobre k^* em que ocorre o máximo do consumo,é o ponto onde a tangente à curva descrita pela função $\phi(k)$, ou seja, $\frac{d\phi(k)}{dk}$ é igual à inclinação da reta $(\delta + g_L)k$. Como exemplo concreto, podemos tomar a função de produção Cobb-Douglas $\phi(k) = k^\alpha$. Neste caso, tomando a derivada de k^α, a condição é dada por

$$\alpha.(k*)^{\alpha-1} = (\delta + g_L) \tag{4.272}$$

O capital per capita k^* que maximiza o consumo é denominado da regra de ouro da acumulação do capital k^*_{GR}

Portanto,

$$k^*_{GR} = (\frac{(\delta + g_L)}{\alpha})\frac{1}{\alpha - 1} \tag{4.273}$$

ou

$$k^*_{GR} = (\frac{\alpha}{(\delta + g_L)})^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4.274}$$

É importante frisar que a economia não tem qualquer tendência a se mover em direção ao estado estacionário da regra de ouro. Para que isso ocorra é preciso que os tomadores de decisão das políticas econômicas façam os ajustes necessários para que a economia se mova em direção ao estado estacionário da regra de ouro, no caso, é preciso que a política econômica ajuste o valor de s trazendo para o valor de $s = \alpha$. Desta forma, a economia se move em direção ao estado estacionário da regra de ouro apenas por meio de interferência do governo.

Para entender melhor essa relação, podemos considerar, novamente, a função de produção Cobb-Douglas, para pensar a definição do consumo, em termos da condição do estado estacionário,

$$c^* = \phi(k^*) - s\phi(k^*) \tag{4.275}$$

Com a função de produção Cobb-Douglas, temos

$$c^* = (\frac{s}{(\delta + g_L)})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - s(\frac{s}{(\delta + g_L)})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{4.276}$$

Reorganizando a expressão acima, temos

$$c^* = (\frac{1}{(\delta + g_L)})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}[s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - s^{\frac{1}{1-\alpha}}] \tag{4.277}$$

A condição para a maximização do consumo do estado estacionário c^* relativamente à variável poupança, s, é obtida, fazendo

$$\frac{dc^*}{ds} = (\frac{1}{(\delta + g_L)})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}[\frac{\alpha}{1-\alpha}s^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} - \frac{1}{1-\alpha}.s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}] = 0 \tag{4.278}$$

Portanto,

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}s^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}.s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{4.279}$$

Segue-se, pela simplificação, que

$$\alpha = s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.s^{-\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} \tag{4.280}$$

Simplificando

$$\alpha = s^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} \tag{4.281}$$

Finalmente,

$$\alpha = s \tag{4.282}$$

Esse é o valor da poupança $s = \alpha$ que faz com que o capital per capita k^* dado por

$$k^* = (\frac{s}{(\delta + g_L)})^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4.283}$$

se transforme no capital per capita da regra de ouro,k^*_{GR}, ou seja,

$$k^*_{GR} = (\frac{\alpha}{(\delta + g_L)})^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4.284}$$

4.1.13 Pressupostos do modelo de Solow: função de produção, o mercado competitivo e a AS vertical:

As empresas em um mercado de fatores e de produto de competição perfeita recebem os preços como dados. Elas recebem um preço p pela venda de seu produto. Pagam o valor da hora trabalho como w. Pagam o preço

r pelo retorno do capital. As empresas são agentes racionais, portanto tem conduta determinada pela maximização do lucro que pode ser descrita da seguinte forma

$$maxlu = pF(K, L) - wL - rK \tag{4.285}$$

Aplicando as condições de maximização de uma função

1.
$$\frac{\partial Lu}{\partial K} = p\frac{\partial F}{\partial K} - r = 0 \tag{4.286}$$

2.
$$\frac{\partial Lu}{\partial L} = p\frac{\partial F}{\partial L} - w = 0 \tag{4.287}$$

Portanto, obtemos

$$w = PM_L = p\frac{\partial F}{\partial L} \tag{4.288}$$

ou

$$\frac{w}{p} = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{K=cte} \tag{4.289}$$

que nos fornece a curva da demanda por mão de obra.

O mesmo pode ser feita para o retorno do capital

$$r = PM_K = p\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)_{L=cte} \tag{4.290}$$

Fazendo uso modelo da função de produção Cobb Douglas, temos os seguintes resultados para as condições acima.

$$w = p\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{K=cte} = p(1-\alpha).K^{\alpha}.L^{-\alpha} = p\frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = \frac{Y}{L} \tag{4.291}$$

ou

$$\frac{w}{p} = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{K=cte} = (1-\alpha).K^{\alpha}.L^{-\alpha} = \frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = \frac{Y}{L} \tag{4.292}$$

$$wL = (1-\alpha)pY \tag{4.293}$$

O mesmo para a taxa de retorno do capital, r,

$$r = p\frac{\partial F}{\partial K} = p\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = p\alpha.\frac{Y}{K} \tag{4.294}$$

ou seja

$$\frac{r}{p} = \alpha\frac{Y}{K} \tag{4.295}$$

Reescrevendo como

$$rK = \alpha.pY \tag{4.296}$$

Desta forma, podemos ver que

$$wL + rK = pY \tag{4.297}$$

Ou, na forma mais explícita.

$$\frac{wL + rK}{pY} = \frac{wL}{pY} + \frac{rk}{pY} = 1 \tag{4.298}$$

Podemos fazer P=1 uma vez que P é dado, no sentido que é definido pelo mercado de competição perfeita do produto. Segue-se, portanto, que

$$\frac{wL + rK}{Y} = \frac{wL}{Y} + \frac{rk}{Y} = 1 \tag{4.299}$$

Temos, portanto, como consequência, a participação na renda total da economia Y, da renda total do capital,rK, e da renda total do salário, wL.

O mercado de trabalho é formado de indivíduos que são também pressupostos agentes racionais. Eles ofertam a mão de obra. Assumindo que o mercado é regido pelo sistema de preços que se ajusta rapidamente, podemos, considerar que a função oferta de trabalho é dada por uma função com inclinação positiva

$$L_s = L_s(\frac{w}{p}) \tag{4.300}$$

Refinar e terminar a parte da demanda e oferta do trabalho.

4.2 MODELO DE SOLOW COM TECNOLOGIA: INTRODUÇÃO

A função de produção vincula os fatores de produção com o produto que resulta desta combinação. Desta forma, a função de produção se apresenta como uma técnica ou um método de de transformação dos fatores de produção em produto. Métodos de produção sofrem alterações e aperfeiçoamentos ao longo do tempo. Eles refletem o progresso técnico. A questão que se coloca às teorias do crescimento econômico, como, por exemplo, representado pelo modelo de Solow, é de como incorporar ou capturar o progresso técnico, ou o os aperfeiçoamentos do metodo de combinar os fatores para gerar produção. Como o próprio modelo de Solow, o objetivo nesta tentativa de captura o progresso técnico é ser o mais simples possível nesta abordagem de avaliar e medir o progresso tecnologico e de descrever o papel no crescimento econômico. Um primeiro elemento a considerar na construção do modelo com tecnologia é se a variável que descreve o progresso tecnológico é para ser considerada uma variável endógena ou exógena. A variável que

descreve o progresso tecnológico é a Variável A. Na literatura encontramos, correspondente às três possibilidades de combinar na função de produção o progresso técnico, três variações no modelo de Solow com tecnologia: o modelo de Solow com tecnologia Hicks neutro, o modelo de Solow com tecnologia Harrod neutro e o modelo de Solow com tecnologia Solow-neutro.Todas essas variações no modelo de Solow com tecnologia tem a variável tecnológica como uma variável exógena dada fora do modelo.

Podemos definir o modelo de Solow com tecnologia Hicks neutro da seguinte forma.

Definição 7 *Y(t)=A(t)(F(K(t),L(t))*

A razão porque é denominado de neutro decorre do fato que a variável tecnológica deixa uma determinada variável economica invariável sob sua ação. A variável econômica não é afetada pela variável tecnológica $A(t)$.

O modelo de Solow com tecnologia Harrod neutro pode ser definido como

Definição 8 *Y(t)=F(K(t), A(t)L(t))*

Enquanto o modelo de Solow com tecnologia Sollow neutro tem a seguinte definição

Definição 9 *Y(t)=F(A(t)K(t), L(t))*

Vamos desenvolver as relações entre as taxas de crescimento e as elasticidades relativas ao modelo de Solow com tecnologia na forma do Harrod-Neutro. Esse modelo se caracteriza por definir a função de produção com a tecnologia na seguinte forma $Y = F(K(t), A(t)L(t))$. Para tanto começamos com a derivada dessa função de produção, o que resulta

$$\frac{dY}{Y} = \frac{\partial F}{\partial K}.\frac{dK}{dt} + \frac{\partial F}{\partial AL}.\frac{d(AL)}{dt} \tag{4.301}$$

$$\dot{Y} = F_K.\dot{K} + F_{AL}.\dot{AL} \tag{4.302}$$

Tendo em mente as definições de taxas de crescimento, $g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y}$, $g_K = \frac{\dot{K}}{K}$, e, de, $g_L = \frac{\dot{L}}{L}$, e, das definições de elasticidade da produção relativamente à capital, $\sigma_{Y,K} = \frac{K}{Y}.\frac{\partial Y}{\partial K}$, e, também da produção relativamente ao trabalho $\sigma_{Y,L} = \frac{L}{Y}.\frac{\partial Y}{\partial K}$ vamos encontrar essas definições na equação acima. Podemos encontrar com algumas manipulações e ajustes algébricos,

$$\dot{Y} = KF_K\frac{\dot{K}}{K} + ALF_{AL}\frac{\dot{AL}}{AL} \tag{4.303}$$

$$\dot{Y} = KF_K\frac{\dot{K}}{K} + ALF_{AL}\frac{\dot{A}L + A\dot{L}}{AL} \tag{4.304}$$

Dividindo ambos os membros por Y, e procedendo outros ajustes algébricos, obtemos

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{K}{Y}F_K\frac{\dot{K}}{K} + \frac{AL}{Y}F_{AL}(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L}) \tag{4.305}$$

$$g_Y = \sigma_{Y,K}g_K + \frac{AL}{Y}F_{AL}(g_A + g_L) \tag{4.306}$$

Mas,

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial AL}.\frac{d(AL)}{dL} \tag{4.307}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = F_L = F_{AL}.A \tag{4.308}$$

Substituindo esta equação na equação acima das taxas de crescimento, obetmos

$$g_Y = \sigma_{Y,K} g_K + \frac{AL}{Y}.\frac{F_L}{A}.(g_A + g_L) \tag{4.309}$$

Simplifcando, temos

$$g_Y = \sigma_{Y,K} g_K + \frac{L}{Y}.F_L.(g_A + g_L) \tag{4.310}$$

Finalmente, com a definição de $\sigma_{Y,L}$, obtemos

$$g_Y = \sigma_{Y,K} g_K + \sigma_{Y,L}(g_A + g_L) \tag{4.311}$$

Como sabemos, do teorema de Euler, que

$$\sigma_{Y,K} + \sigma_{Y,L} = 1 \tag{4.312}$$

Reescrevemos a equação anterior,

$$g_Y = \sigma_{Y,K} g_K + (1 - \sigma_{Y,K})(g_A + g_L) \tag{4.313}$$

Podemos testar o modelo de Solow com tecnologia na forma de Harrod-neutro com dados do desenvolvimento dos Estados Unidos entre 1909-1949 como faz Solow e depois comparar com o resultado obtido, como fazemos abaixo, para o modelo de Solow com tecnologia na forma Hicks-neutro para avaliar qual deles captura ou ajusta melhor os dados. Se aplicarmos os dados do exemplo abaixo neste modelo, vamos obter o valor de $g_A = 2.3$. Este valor parece muito alto. O modelo de de Solow do tipo Hicks-neutro parece fornecer valores mais razoáveis para o impacto do progresso técnico no crescimento americano nesse período.

Exemplo de aplicação do modelo de Solow com tecnologia na forma de Hicks-neutro, ou seja, com uma função de produção do tipo

$$Y = A(t)(F(K(t), L(t)) \tag{4.314}$$

Solow entende que a tecnologia é importante para dar conta de modo residual dos ajustes dos dados estatísticos com respeito à descrição do crescimento econômico. Para mostrar esse papel residual da tecnologia Slow usa dos dados dos estados unidos de 1909-1949 e utilizada o modelo de Hicks neutro para incorporar a tecnologia na função de produção. Os dados são os seguintes[1]:

Dados da economia americana de 1909-1949	
taxas de crescimento	**valores**
g_Y	2.75% a.a
g_K	1.75% a.a
g_L	1% a.a
elasticidades	valores
$\sigma_{Y,K}$	0.35
$\sigma_{Y,L}$	0.65

Vamos assumir, portanto, por hipótese, a função de produção com tecnologia no modelo Hicks-neutro.

$$Y = A(t)F(K(t), L(t)) \tag{4.315}$$

O objetivo é colocar a função de produção em termos de variáveis empiricamente mensuáveis, portanto, em termos de taxas de crescimento e de elasticidade.

Fazendo derivada da equação acima temos

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}.F + A(t).\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + A(t).\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} \tag{4.316}$$

Substituindo $A(t)$ por $\frac{Y}{F}$ e F por $\frac{Y}{A}$, e, então, dividindo ambos os membros por Y, obtemos

[1]Exemplo tirado do livro de microeconomia do Nicholson, 11 Edição, p.203

$$\frac{\frac{dY}{dt}}{Y} = \frac{dA}{dt}.\frac{1}{A} + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial K}\dot{K} + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial L}\dot{L} \tag{4.317}$$

Fazendo uso das definições devemos fazer com que essa equação apareça em termos das variáveis mensuráveis taxas de crescimento e elasticidades da renda trabalho e elasticidade da renda capital.

$$g_Y = g_A + \frac{K}{AF}\frac{\partial AF}{\partial K}\frac{\dot{K}}{K} + \frac{L}{AF}\frac{\partial AF}{\partial L}\frac{\dot{L}}{L} \tag{4.318}$$

$$\sigma_{Y,K} = \frac{K}{AF}\frac{\partial AF}{\partial K}\frac{\dot{K}}{K} \tag{4.319}$$

$$\sigma_L = \frac{L}{AF}\frac{\partial AF}{\partial L}\frac{\dot{L}}{L} \tag{4.320}$$

$$g_Y = g_A + \sigma_{Y,K}.g_K + \sigma_{Y,L}.g_L \tag{4.321}$$

$$g_A = g_y - \sigma_{Y,L}.g_L - \sigma_{Y,K}.g_K \tag{4.322}$$

Portanto, fazendo uso dos dados acima, Solow obtem para g_A

$$g_A = 2.75 - 0.65.(1.00) - 0.35(1.75) = 2.75 - 0.65 - 0.60 = 1.50 \tag{4.323}$$

4.2.1 MODELO DE SOLOW COM TECNOLOGIA: HARROD NEUTRO

Nesta seção vamos estudar e abordar o modelo de Solow com tecnologia Harrod neutro. O primeiro ponto a mencionar é que a função de produção é considerada como possuindo a propriedade da homogeneidade linear em ambas variáveis, ou seja, em K e $A(t)L(t)$. Os textos utilizados aqui para construir essa subsection são aqueles do Carlin e Chiang, e, mesmo outros

da literatura sobre esse assunto. Nos esforçamos apenas para dar uma organização mais didática e com passagens e demonstrações mais detalhadas.

A função de produção de Solow com tecnologia no tipo Harrod Neutro. tem a forma de

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) \tag{4.324}$$

A variável composta $A(t)L(t)$ é denominada de trabalho efetivo, representando o resultado da efeito do progresso tecnológico sobre o trabalho. A neutralidade de Harrod está em que a variável $\frac{Y}{K}$ permanece inalterado sob o impacto da variável progresso tecnológico $A(t)$.

Vamos definir a eficiência do trabalho ou o trabalho efetivo, $A(t)L(t)$ por $\eta(t)$, ou seja

Definição 10

$$\eta(t) = A(t)L(t)$$

Portanto, podemos reescrever a função de produção em termos dessa nova variável η

$$Y(t) = F(K(t), \eta(t)) \tag{4.325}$$

A construção do modelo de Solow com essa nova variável relavante representando a ação do progresso técnicosobre o trabalho segue a mesma caminho que adotamos anteriormente. Portanto, o roteiro de construção é exatamente o mesmo daquele do modelo de Solow sem tecnologia. Deixaremos para interpretar o impacto dessa nova variável no final do desenvolvimento do modelo.

Da homogeneidade linear da função de produção podemos transformar tanto as variáveis em variáveis per capita como a própria função de produção, obtendo

$$y_\eta = \phi(k_\eta) \tag{4.326}$$

com as seguintes definições

Definição 11

$$y_\eta = \frac{Y}{AL} = \frac{Y}{\eta}$$

Definição 12

$$k_\eta = \frac{K}{AL} = \frac{K}{\eta}$$

Uma vez transformada a função de produção na função de produção per capita com a nova variável $\eta = AL$ representando o trabalho efetivo,e, passamos à construção da equação fundamental do movimento de Solow agora com progresso tecnológico. Seja então, a questão da distribuição do produto entre o consumo presente, C e o consumo futuro ou seja investimento,k I.

$$Y = C + I \tag{4.327}$$

onde

$$I = \frac{dK}{dt} + \delta.K \tag{4.328}$$

Pòrtanto,

$$Y = C + \frac{dK}{dt} + \delta.K$$

Dividindo cada termo pela variável do trabalho efetivo η obtemos

$$\frac{Y}{\eta} = \frac{C}{\eta} + \frac{\frac{dK}{dt}}{\eta} + \frac{\delta.K}{\eta}$$

Desta forma, temos

$$y_\eta = c_\eta + \frac{\frac{dK}{dt}}{\eta} + \delta.k_\eta$$

com $c_\eta = \frac{C}{\eta}$

Fazendo

$$\dot{k_\eta} = \frac{d(\frac{K}{\eta})}{dt} = \frac{\dot{K}.\eta - K.\dot{\eta}}{(\eta)^2}$$

Obtemos

$$\dot{k_\eta} = \frac{d(\frac{K}{\eta})}{dt} = \frac{\dot{K}}{\eta} - k_\eta \frac{\dot{\eta}}{\eta}$$

$$\frac{\dot{\eta}}{\eta} = \frac{\dot{AL}}{AL} = \frac{\dot{A}.L + \dot{L}.A}{AL} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} = g_A + g_L \tag{4.329}$$

Onde

Definição 13

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A}$$

$$\frac{\dot{K}}{\eta} = \dot{k_\eta} + k_\eta(g_A + g_L) \tag{4.330}$$

Substituindo essa relação na equação fundamental da acumulação do capital,

$$y_\eta = c_\eta + \dot{k_\eta} + k_\eta(g_A + g_L) + \delta.k_\eta$$

$$y_\eta = c_\eta + \dot{k_\eta} + (g_A + g_L + \delta)k_\eta$$

Finalmente, substituindo $y_\eta - c_\eta = sy_\eta$ e fazendo algumas passagens algébricas, obtemos a equação fundamental da acumulação do capital do modelo de solow com tecnologia Harrod neutro. Essa equação tem a mesma estrutura formal da equação fundamental do modelo de Solow sem tecnologia.

$$\dot{k_\eta} = sy_\eta - (g_A + g_L + \delta)k_\eta$$

$$\dot{k_\eta} = s\phi(k_\eta) - (g_A + g_L + \delta)k_\eta$$

$$\frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} = s\phi(k_\eta) - (g_A + g_L + \delta)k_\eta$$

O estado estacionário é dado por $\dot{k_\eta^*} = 0$, portanto, que

$$\frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} = s\phi(k_\eta) - (g_A + g_L + \delta)k_\eta$$

O estado estacionário é dado por $\dot{k_\eta^*} = 0$, portanto, que

$$0 = s\phi(k_\eta^*) - (g_A + g_L + \delta)k_\eta^* =$$

$$\frac{\phi(k_\eta^*)}{k_\eta^*} = \frac{(g_A + g_L + \delta)}{s}$$

No estado estacionário,

$$k_\eta^* = 0 \rightarrow k_\eta = \frac{K}{AL} = cte \tag{4.331}$$

A relação entre $y_\eta = \phi(k_\eta)$ implica na relação

$$\frac{dy_\eta}{dt} = \frac{df(k_\eta)}{dk_\eta}\frac{dk_\eta}{dt} \tag{4.332}$$

ou

$$\dot{y_\eta} = \phi'(k_\eta)\dot{k_\eta} \tag{4.333}$$

Do mesmo modo, a definição de $c = \phi(k_\eta) - s\phi(k_\eta) = (1-s)\phi(k_\eta)$ implica a relação

$$\frac{dc}{dt} = (1-s)\frac{d\phi(k_\eta)}{dk_\eta}\frac{dk_\eta}{dt} \tag{4.334}$$

ou

$$\dot{c} = (1-s)f'(k_\eta)\dot{k_\eta} \tag{4.335}$$

Desta forma, do estado estacionário, onde $\dot{k_\eta^*} = 0$, e, que, portanto, $g_{k_\eta^*} = 0$ seguem-se, também, das relações anteriores que

$$\begin{cases} \dot{y_\eta^*} = 0 & (4.336) \\ \dot{c_\eta^*} = 0 & (4.337) \\ g_{y_\eta} = 0 & (4.338) \\ g_{c_\eta} = 0 & (4.339) \\ k_\eta^* = cte & (4.340) \\ y_\eta^* = cte & (4.341) \\ c_\eta^* = cte & (4.342) \\ k^* = \dfrac{K}{L} = cte.A(t) & (4.343) \\ y^* = \dfrac{Y}{L} = cte.A(t) & (4.344) \\ c^* = \dfrac{C}{L} = cte.A(t) & (4.345) \\ g_K = g_A + g_L & (4.346) \\ g_Y = g_A + g_L & (4.347) \\ g_C = g_A + g_L & (4.348) \end{cases}$$

Desta forma, já podemos ver a consequência trazida pela introdução da variável tecnológica, A, na forma da neutralidade de Harrod, ou seja,

$$\frac{K}{L} = cte.A(t) \tag{4.349}$$

Como temos que $g_A = \dfrac{\dot{A}}{A}$, segue que, assumindo que g_A é uma constante, a solução da equação diferencial $\dot{A} = g_A.A$ é dada por $A(t) = A(0).\exp(g_A).t$.

Portanto, substituindo esse resultado na equação anterior, obtemos,

$$k^* = \frac{K}{L} = cte.A(0)\exp(g_A.t) = cte.\exp(g_A.t) \tag{4.350}$$

Desta forma, podemos verificar que no estado estacionário, $\dot{k_\eta^*} = 0$ o capital per capita não é mais constante, como no modelo de Solow sem tecnologia, onde, do fato que, $\dot{k^*} = 0$ seguia que $k^* = cte$. Agora, do fato que $\dot{k_\eta^*} = 0$ segue-se, que $k_\eta^* = \frac{K}{AL} = cte$,e, que portanto, $k^* = \frac{K}{L} = cte.A(t)$, ou seja, k^* cresce exponencialmente.

Além disso, tomando o logaritmo de ambos os lados da relação $k^* = \frac{K(t)}{L(t)} = cte.A(t)$ segue-se que

$$\log k^* = \log K - \log L = \log cte + \log A \tag{4.351}$$

Derivando em relação ao tempo

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{A}}{A} \tag{4.352}$$

portanto, segue-se daqui que

$$g_k = \frac{\dot{A}}{A} = g_A \tag{4.353}$$

E, do mesmo modo,

$$\begin{cases} g_y = \sigma_{y,k} g_k = \sigma_{y,k} g_A & (4.354) \\ g_c = \sigma_{y,k} g_k = \sigma_{y,k} g_A & (4.355) \\ & (4.356) \end{cases}$$

e também que

$$g_K = g_A + g_L \tag{4.357}$$

Contudo, como $y_\eta = \phi(k_\eta)$ e, por consequência, $\dot{y_\eta} = \phi_k(k).\dot{k_\eta}$ segue-se, que no estado estacionário, onde, $\dot{k_\eta^*} = 0$ também $\dot{y_\eta^*} = 0$, e, assim,

$y_\eta^* = \dfrac{Y}{AL} = cte$. Por sua vez, desta relação, obtemos, pelo mesmo raciocínio anterior que, no estado estacionário,

$$\begin{cases} g_Y = g_A + g_L & (4.358) \\ g_C = g_A + g_L & (4.359) \end{cases}$$

Desta forma

$$g_K = g_Y = g_C = g_A + g_L = g_A + n \tag{4.360}$$

Resumindo podemos dizer que a característica do modelo de Solow com tecnologia do tipo Harrod neutro é representada pelas seguintes relações, no estado estacionário,

$$\begin{cases} g_{k_\eta^*} = 0 & (4.361) \\ g_{y_\eta^*} = 0 & (4.362) \\ g_{c_\eta^*} = 0 & (4.363) \\ g_K = g_A + g_L & (4.364) \\ g_Y = g_A + g_L & (4.365) \\ g_C = g_A + g_L & (4.366) \end{cases}$$

ou

$$
\begin{cases}
g_{k_\eta}^* = 0 & (4.367)\\
g_{y_\eta}^* = 0 & (4.368)\\
g_{c_\eta}^* = 0 & (4.369)\\
k_\eta^* = cte & (4.370)\\
y_\eta^* = cte & (4.371)\\
c_\eta^* = cte & (4.372)\\
k^* = \dfrac{K}{L} = cte.A(t) & (4.373)\\
y^* = \dfrac{Y}{L} = cte.A(t) & (4.374)\\
c^* = \dfrac{C}{L} = cte.A(t) & (4.375)\\
g_K = g_A + g_L & (4.376)\\
g_C = g_A + g_L & (4.377)\\
g_Y = g_A + g_L & (4.378)
\end{cases}
$$

Na comparação com o modelo de Solow sem tecnologia podemos ver a diferença trazida pela presença da tecnologia, como elemento exógeno, no modelo de Solow com tecnologia do tipo Harrod neutro.

4.2.2 A participação da renda dos salário e do capital da renda total

A participação da renda dos salaŕios e do capital na renda total no mercado de concorrência perfeita é o resultdo do teorema de Euler.

4.2.3 A ideia, a hipótese e a controversia da convergência econômica

A hipótese da convergência é um desdobramento lógico da aplicação do modelo de Solow para descrever o crescimento econômico dos diversos países que compõe o sistema internacional[2]. Como se trata de um modelo em que as condições matemáticas de seus pressupostos, particularmente, da função de produção, são tais que estas estabelecem a existência, unicidade e a estabilidade da solução. Desta forma, o modelo com a garantia de existe, é única e estável a solução serve como critério para classificar os países quanto à sua situação relativamente ao estado estacionário.

Até agora estudamos as características do estado estacionário assim como as características do estado transiente da equação fundamental da acumulação do capital.Estas características acabam por definir a hipótese da convergência dos países para o estado estacionário e suas condições.

Convergência econômica do tipo β condicional e incondicional

Hipótese. Vamos assumir que a única diferença entre os países é o capital per capita, portanto, que todos os demais elementos do modelo de Solow com tecnologia na forma de Harrod-neutro são os mesmos para os países no sentido que, além de terem a mesma taxa de crescimento populacional, e mesma taxa de depreciação, e, mesmo sendo os países pobres, eles tem acesso instantâneo às tecnologias sendo produzidas nos países ricos.

Seja a equação fundamental do modelo de Solow com tecnologia na forma Harrod-neutro,

$$\dot{k_\eta} = sy_\eta - (g_A + g_L + \delta)k_\eta$$

[2]Consultar Carlin p.490

O estado estacionário no modelo com tecnologia é caracterizado por $\dot{k_\eta} = 0$ o que implica que

$$\frac{\phi(k_\eta^*)}{k_\eta^*} = \frac{\delta + g_L + g_A}{s} \tag{4.379}$$

Tomando a derivada relativamente à taxa de crescimento do capital per capita da equação fundamental

$$g_{k_\eta} = \frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} = \frac{s\phi(k_\eta)}{k_\eta} - (\delta + g_L + g_A) \tag{4.380}$$

obtemos

$$\frac{\partial g_{k_\eta}}{\partial k_\eta} = \frac{s(\phi_{k_\eta}(k_\eta).k_\eta - \phi(k_\eta))}{(k_\eta)^2} \tag{4.381}$$

A equação pode ser reescrita como

$$\frac{\partial g_{k_\eta}}{\partial k_\eta} = s\frac{\phi_{k_\eta}(k_\eta) - \dfrac{\phi(k_\eta)}{k_\eta}}{k_\eta} \tag{4.382}$$

Fazendo uso das condições da função de produção que, entre outras condições, afirma os retornos marginais decrescente, ou que, $F_{KK} < 0$, segue-se que $\phi_{k_\eta}(k_\eta) < \dfrac{\phi(k_\eta)}{k_\eta}$ ou, em outros termos, usando as definições associadas a esses termos, $PMg_K < PMe_K$. Portanto,

$$\frac{\partial g_{k_\eta}}{\partial k_\eta} = \frac{s}{k_\eta}(\phi_{k_\eta}(k_\eta) - \frac{\phi(k_\eta)}{k_\eta}) < 0 \tag{4.383}$$

A conclusão extraída logicamente da equação transiente da acumulação do capital e das condições da função de produção é que à medida que aumenta o capital per capita, $k_\eta \uparrow$ a taxa de crescimento do capital per capita, g_{k_η} diminui, $g_{k_\eta} \downarrow$ até tornar-se nula no estado estacionário, ou seja, no estado descrito por $\dot{k_\eta} = 0$, o que significa dizer que, $(k_\eta)^* = cte$. A taxa de crescimento da renda per capita é declinante com o aumento do capital per capita. Essa conclusão que vale para todos os países segundo o modelo de

Solow com tecnologia é denominada de convergência do tipo beta absoluta. Essa conclusão é uma conclusão lógica ou dedutiva das condições da funçaõ de produção, que dá origem, aos retornos marginais decrescente relativamente ao capital, assim como, também relativamente ao trabalho.

A mesma demonstração e mesmas conclusões pode ser feitas para o modelo de Solow com tecnologia, por exemplo, na forma de Harrod-neutro.

Considerando diversos países com a hipótese que todos os determinantes do capital são os mesmos, indicando que terão o mesmo estado estacionário, é fácil de ver que, devido à condição que $F_k > 0$ e que $F_{kk} < 0$ segue-se que no caso de país pobre, k_p e país rico, k_r,e, dado que, pela definição de país rico e pobre, temos que $k_p < k_r$ então, segue-se que, $g_{k_p} > g_{k_r}$, ou seja, que a taxa de crescimento do capital per capita de um país pobre é maior, portanto, mais rápida, que a taxa de crescimento do capital per capita do país rico. Esta condição é denominada pela literatura da hipótese da convergência econômica do tipo β condicional uma vez que, no caso de que esta é a única diferença entre os países (ceteris paribus) é automático da equação fundamental que a taxa de crescimento dos países pobres é maior do que a dos países ricos uma vez que estes tem capital per capita menor que o capital per capita dos países ricos.

Convergência econômica

Vamos assumir por hipótese que cada país é descrito por diferentes valores para os parâmetros do modelo de Solow com tecnologia, e, portanto, que cada um deles, tem seu próprio, estado estacionário, caracterizado por seus parâmetros. Neste contexto, sob que condições podemos falar que um país pobre tem uma taxa de crescimento do capital per capita maior do que um país rico, para, então, afirmar, que ele cresce mais rápido do que o país rico?

Para responder à essa questão é preciso, primeiro, mostrar que a taxa de crescimento está relacionado com a distância, ou a diferença, entre a renda

per capita transiente e a renda per capita do estado estacionário.

$$g_{y_\eta} = -b(\log y_\eta - \log y_\eta^*) \tag{4.384}$$

O parâmetro[3] ou o coeficiente b é definido como a velocidade de convergência para o modelo de Solow. Este coeficiente é dado por

$$b = (1 - \sigma_{Y,K})(\delta + g_A + g_L) \tag{4.385}$$

A velocidade de convergência como definido acima é dado para o modelo de Solow com tecnologia e com afunção de produção Cobb-Douglas.

Primeira abordagem à convergência econômica

Para ver como é obtida essa expressão devemos considerar inicialmente a equação fundamental

$$\dot{k_\eta} = sy_\eta - (g_A + g_L + \delta)k_\eta$$

Assuma também a função de produção Cobb-Douglas

$$y_\eta = k_\eta^\alpha \tag{4.386}$$

Sustituindo na equação acima

$$\dot{k_\eta} = sk_\eta^\alpha - (g_A + g_L + \delta)k_\eta \tag{4.387}$$

dividindo por k_η

$$\frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} = s(k_\eta)^{(\alpha-1)} - (g_L + g_L + \delta) \tag{4.388}$$

[3] Ver Carlin p.496

Como o objetivo é fazer comparação entre as velocidades de convergência, entre países com seus próprios parâmetros, aos respectivos estados estacionários, a referência é o estado estacionário dado por $sk_\eta^* = (g_A + g_L + \delta)$. Portanto, devemos expandir o termo $k_\eta^{(\alpha-1)}$ em torno do estado estacionário, ou seja, expandir na forma $f(k) = f(k^*) + \frac{df}{dk}(\Delta k)$. A expansão[4] será feita em termos de $\log k$

$$s(k_\eta)^{(\alpha-1)} = s((k_\eta)^*)^{(\alpha-1)} + s\frac{d(k_\eta)^{(\alpha-1)}}{dk}\frac{dk}{d\log k}|_{k_\eta=k*\eta}(\log k_\eta - \log k_\eta^*) \quad (4.389)$$

$$s(k_\eta)^{(\alpha-1)} = s(k_\eta^*)^{(\alpha-1)} + s\frac{d(k_\eta)^{(\alpha-1)}}{dk}\frac{dk}{d\log k}|_{k_\eta=k*\eta}(\log k_\eta - \log k_\eta^*) \quad (4.390)$$

$$s(k_\eta)^{(\alpha-1)} = s(k_\eta^*)^{(\alpha-1)} + s(\alpha-1)(k_\eta)^{(\alpha-2)}.k_\eta|_{k_\eta=k*\eta}(\log k_\eta - \log k_\eta^*) \quad (4.391)$$

$$s(k_\eta)^{(\alpha-1)} = s(k_\eta^*)^{(\alpha-1)} + s(\alpha-1)(k_\eta^*)^{(\alpha-1)}(\log k_\eta - \log k_\eta^*) \quad (4.392)$$

Sabendo que no estado estacionário

$$s(k_\eta^*)^{\alpha-1} = (g_L + g_A + \delta) \quad (4.393)$$

Substituindo essa expressão na expansão de Taylor da função Cobb-Douglas em torno do estado estacionário,obtemos

$$sk_\eta^{(\alpha-1)} = (g_L + g_A + \delta) + (\alpha-1)(g_L + g_A + \delta)(\log k_\eta - \log k_\eta^*) \quad (4.394)$$

Por sua vez,substituindo essa expansão na equação fundamental acima, obtemos

[4]Ver Carlin p.498

$$g_{k_\eta} = \frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} = [(g_L + g_A + \delta) + (\alpha - 1)(g_L + g_A + \delta)(\log k_\eta - \log k_\eta^*)] - (g_L + g_A + \delta) \tag{4.395}$$

Finalmente, simplificando, resulta

$$g_{k_\eta} = \frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} = -(1-\alpha)(g_L + g_A + \delta)(\log k_\eta - \log k_\eta^*) \tag{4.396}$$

Portanto,

$$g_{k_\eta} = \frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} = -(1-\alpha)(g_L + g_A + \delta)(\log k_\eta - \log k_\eta^*) \tag{4.397}$$

Como $y_\eta = (k_\eta)^\alpha$ segue-se que $\log y_\eta = \alpha . \log k_\eta$ Portanto, que

$$g_{y_\eta} = \frac{\dot{y_\eta}}{y_\eta} = \alpha . \frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} = \alpha . g_{k_\eta} \tag{4.398}$$

Segue-se que, depois da eliminação em ambos os membros de α

$$\frac{\dot{y_\eta}}{y_\eta} = -(1-\alpha)(g_L + g_A + \delta)(\log y_\eta - \log y_\eta^*) \tag{4.399}$$

Asim pode-se ver claramente, pela comparação entre as equações que

$$b = (1-\alpha)(g_L + g_A + \delta) \tag{4.400}$$

Da função de produção Cobb-Douglas e da definição de produto marginal do capital podemos mostrar que $\alpha = \sigma_{Y,k}$, ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial K} = F_K = \frac{\partial K^\alpha L^{(1-\alpha)}}{\partial K} = \alpha \frac{Y}{K} \tag{4.401}$$

Portanto

$$\alpha = \frac{K}{Y} F_K = \sigma_{Y,K} \tag{4.402}$$

Assim, finalmente, podemos escrever a velocidade de convergência como

$$b = (1 - \sigma_{Y,K})(g_L + g_A + \delta) \tag{4.403}$$

Desta forma, podemos calcular para cada país a velocidade de convergência para sua particular estado estacionário, e, então, podemos comparar essa velocidade com a dos demais países.

Segunda abordagem da convergência econômica: geral

Vamos novamente partir da equação dinâmica fundamental de Solow, contudo, não precisamos particularizar para a função Cobb-Douglas como foi feito antes.

$$\dot{k_\eta} = s\phi(k_\eta) - (g_A + g_L + \delta)k_\eta \tag{4.404}$$

Vamos chamar

$$G(k_\eta) = s\phi(k_\eta) - (g_A + g_L + \delta)k_\eta \tag{4.405}$$

Vamos agora fazer uma expansão em Taylor de $G(k)$ em torno do ponto de equilíbrio k^*_η, ou seja,

$$G(k_\eta) \approx G(k^*_\eta) + \frac{dG}{dk}|_{k^*_\eta}(k_\eta - k^*_\eta) + \tag{4.406}$$

Mas, é fácil perceber que $G(k^*_\eta) = 0$ pela definição de $G(k)$.

Desta forma, temos

$$G(k_\eta) \approx \frac{dG}{dk}|_{k^*_\eta}(k_{eta} - k^*_{eta}) + \tag{4.407}$$

$$\frac{dG}{dk_\eta}|_{k^*_\eta} = s\frac{d\phi(k_\eta}{dk_\eta} - (g_a + \delta + g_L) \tag{4.408}$$

Portanto,

$$G(k_\eta) == s\frac{d\phi(k_\eta}{dk_\eta} - (g_A + \delta + g_L)(k_\eta - k_{\eta^*}) \tag{4.409}$$

Por outro lado, o valor de s pode ser obtido na condição de equilíbrio,

$$\dot{k_\eta} = s\phi(k_\eta) - (g_A + g_L + \delta)k_\eta \tag{4.410}$$

$$0 = s\phi(k_\eta) - (g_A + g_L + \delta)k_\eta \tag{4.411}$$

$$s\phi(k_\eta^*) = (g_A + g_L + \delta)k_\eta^* \tag{4.412}$$

$$s = \frac{(g_A + g_L + \delta)k_\eta^*}{\phi(k_\eta^*)} \tag{4.413}$$

Substituindo esse valor na expansão de Taylor anterior, dada por,

$$G(k_\eta) = (s\frac{d\phi(k_\eta)}{dk_\eta} - (g_a + \delta + g_L))(k_\eta - k_\eta^*) \tag{4.414}$$

Obtemos,

$$G(k) = ((\frac{(g_A + g_L + \delta)k_\eta^*}{\phi(k_\eta^*)})\frac{d\phi(k_\eta)}{dk_\eta} - (g_a + \delta + g_L))(k_\eta - k_\eta^*) \tag{4.415}$$

Colocando $(g_A + g_L + \delta)$ em evidência, obtemos

$$G(k_\eta) = (g_A + g_L + \delta)[\frac{k.\dfrac{d\phi(k)}{dk}}{\phi(k)} - 1](k - k^*) \tag{4.416}$$

Mas, como

$$\sigma_{y,k} = \frac{\dfrac{k.d\phi(k)}{dk}}{\phi(k)} \tag{4.417}$$

Reescrevemos a equação acima como

$$G(k_\eta) = [\sigma_{k_\eta,y_\eta} - 1](g_A + g_L + \delta)(k_\eta - k_\eta^*) \tag{4.418}$$

substituindo $G(k) = \dot{k_\eta}$ obtemos

$$\dot{k_\eta} \approx [\sigma_{k_\eta,y_\eta} - 1](g_A + g_L + \delta)(k_\eta - k_\eta^*) \tag{4.419}$$

$$\dot{k} \approx -[1 - \sigma_{k_\eta,y_\eta}](g_A + g_L + \delta)(k_\eta - k_\eta^*) \tag{4.420}$$

Expandindo $\ln k_\eta$ em torno de k_η^* obtemos

$$\ln k_\eta = \ln k_\eta^* + \frac{1}{k_\eta^*}(k_\eta - k_\eta^*) \tag{4.421}$$

Substituindo, e, fazendo algumas passagens e aproximações, obtemos

$$\frac{\dot{k_\eta}}{k_\eta} \approx -(1 - \sigma_{k_\eta,y_\eta})(g_A + g_L + \delta)(\ln k_\eta - \ln k_\eta^*) \tag{4.422}$$

Novamente, podemos reconhecer que a velocidade de convergência, b, encontra-se lá,

$$b = (1 - \sigma_{k_\eta,y_\eta})(g_A + g_L + \delta) \tag{4.423}$$

No caso particular, da função Cobb-Douglas, pode-se mostrar, como foi feito na primeira abordagem, que $\sigma_{y_\eta,k_\eta} = \alpha$.

4.3 MODELO DE CRESCIMENTO DE BARRO COM GASTOS DO GOVERNO

Esta seção é relativa ao artigo publicado por Barro com o título Government Spending in a Simple Model of Endogeneous Growth no The Journal of Political Economy, Vol. 98, número 5 1990.

O ponto de partida de Barro é modelo de crescimento endogeno com retornos contantes de um conceito amplo de capital. O modelo tem como hipótese uma família representativa, de horizonte infinito numa economia fechada. A família procura maximizar a utilidade total, dada pela

$$U = \int_0^{\infty} u(c) \exp(-\rho.t) dt \tag{4.424}$$

Onde c é consumo por pessoa e $\rho > 0$ é a taxa constante da preferência temporal. População, a qual corresponde ao número de trabalhadores e consumidores, é constante. A função de utilidade é dada por

$$u(c) = \frac{c^{(1-\sigma)} - 1}{1 - \sigma} \tag{4.425}$$

Onde $\sigma > 0$ tal que a utilidade marginal tem a elasticidade constante $-\sigma$.

Cada família tem é descrita pela função de produção

$$y = f(k) \tag{4.426}$$

Onde y é a produção per capita e k é o capital per capita.

O problema da maximização da família representativa da utilidade total pode ser construída com a ajuda da teoria do controle ótimo

A concepção neoclássica tem a função de produção abaixo como um dos seus pilares

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \tag{4.427}$$

O argumento da função é dado pelos fatores de produção capital, $K(t)$, e trabalho, $L(t)$.

A função F descreve a tecnologia que transforma os fatores de produção no produto. A função de produção, no modelo de Solow, que é o modelo central da teoria do crescimento é assumida como um elemento exógeno deste modelo de crescimento econômico tanto na abordagem estática como dinãmica. Uma hipótese neoclássica importante é que o mercado de fatores é considerado um mercado de competição perfeita assim como o mercado do produto. Portanto, tanto o preço do produto quanto os preços dos fatores são considerados como dados do ponto de vista das empresas. A função de produção pode ser considerada como resultado de uma agregação das diversas funções de produção descrevendo as empresas da economia.

Propriedades da função de produção:

1. A função de produção tem a propriedade da homogeneidade de grau 1 ou retornos constantes de escala, ou seja,

   $\lambda Y = \lambda F(K(t), L(t)) = F(\lambda K(t), \lambda L(t))$

2. A função de produção pode ser escrita, fazendo $\lambda = \frac{i}{L}$, em termos per capita como $y = \phi(k)$ onde $y = \dfrac{Y}{L}$ e $k = \dfrac{K}{L}$

3. A função de produção tem a propriedade que o produto marginal do capital e o produto marginal do trabalho são positivos ou seja,

   $PM_L = \left(\dfrac{\partial F)}{\partial L}\right)_K > 0$ e $PM_K = \left(\dfrac{\partial F}{\partial K}\right)_L > 0$

4. A função de produção é uma função continuamente diferenciável ao menos até segunda ordem.

5. A função de produção tem a propriedade dos retornos marginais decrescentes, ou seja, $\dfrac{\partial F}{\partial L} < 0$ assim como $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0$

6. A função de produção tem a propriedade que seus produtos marginais do trabalho e do capital satisfazem as condições de Inada.

7. Uma função de produção diferenciável $\phi(k) : R_+ \to R_+$ é dita satisfazer as condições de Inada se

   (a) $\lim_{k\to 0} \phi_k(k) = \infty$

   (b) $\lim_{k\to \infty} \phi_k(k) = 0$

8. As condições de Inada implicam as condições fracas de Inada. Uma função de produção diferenciável $\phi(k) : R_+ \to R_+$ é dita satisfazer as condições fracas de Inada se

   (a) $\lim_{k\to 0} \phi_k(k) = \infty$,

   (b) $\lim_{k\to \infty} \phi_k(k) = 0$

   (c) $\phi(0) = 0$

   (d) $\phi(k \to \infty) \to \infty$

4.3.1 A equação da acumulação do capital-A equação fundamental do movimento do modelo de Solow-Swan

Assumindo o mercado de bens e serviços como um mercado de competição perfeita temos inicialmente uma importante decisão a ser feita

$$Y(t) = C(t) + I(t)_{gross} \tag{4.428}$$

Temos que o investimento em questão é o investimento bruto, formado de dois termos

$$I_{gross} = \frac{dK(t)}{dt} + \delta.K \tag{4.429}$$

Substituindo essa equação na anterior, obtemos

$$Y = C + \dot{K} + \delta.K \tag{4.430}$$

Transformando em variáveis per capita, ou seja, dividindo ambos os lados por L, obtemos,

$$\frac{Y}{L} = \frac{C}{L} + \frac{\dot{K}}{L} + \frac{\delta.K}{L} \tag{4.431}$$

Segue-se, portanto, pelas simplificações, que

$$y = c + \frac{\dot{K}}{L} + \delta.k \tag{4.432}$$

Onde $k = \frac{K}{L}$ e $y = \frac{Y}{L}$.

$$\frac{dk}{dt} = \dot{k} = \frac{K}{L} = \frac{\frac{dK}{dt}L - K\frac{dL}{dt}}{L^2} \tag{4.433}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L} \tag{4.434}$$

Como definimos $\frac{\dot{L}}{L} = n$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk \tag{4.435}$$

Segue-se que

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk \tag{4.436}$$

Substituindo na equação acima obtemos a equação neoclassica fundamental da acumulação do capital

$$y = c + \dot{k} + nk\delta.k \tag{4.437}$$

Finalmente,

$$\dot{k} = y - c - (n + \delta)k \tag{4.438}$$

Com isso, chegamos na forma final para a equação fundamental neoclassica que é uma equação de acumulação do capital.

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n + \delta)k \tag{4.439}$$

Essa equação pode ser reescrita na forma de um sistema de controle, que é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com k sendo a variável estado e c a variável de controle.

$$\dot{k} - \phi(k) + (n + \delta)k = c \tag{4.440}$$

Essa equação pode ser solucionada produzindo muitas trajetórias possíveis. Supondo que um governo central ou um indivíduo pode escolher qualquer consumo c, ou poupança, no caso, $s = \phi(k) - c$ coloca-se a questão da decisão de qual trajetória ele deveria escolher. Aqui está um das características do modelo de Ramsey Cass e Koopmans, ou seja, introruzir fundamentos microeconômicos no modelo de Solow. Seguindo essa linha podemos assumir que tanto o objetivo do governo quando do indivíduo é maximizar o bem estar identificado aqui com a maximização do consumo. Para desenvolver o quadro no qual essa escolha deve ser feita é preciso introduzir uma medida de performance ou uma função custo que associaria a cada trajetória um número real. Vamos assumir uma função de utilidade do consumo do indivíduo. Vamos assumir que se trata de uma sociedade e que a escolha é feita por um governo central. Desta forma ele deve levar em conta a utilidade de todos os membros da sociedade que podemos escrever como $L(t)U(c(t))$. Nesta expressão está pressuposto que as utilidades dos indivíduos são independentes e somáveis. Contudo,o interesse envolve também em encontrar a soma dessas utiliidades ao longo de uma determinada trajetória. Mas, não se pode somar

utilidades diferentes que é o que elas são quando consideradas em instantes diferentes do tempo. Esse problema pode ser resolvido utilizando o momento presente como um sistema de referência, e trazendo todas as utilidades consideradas em momentos diferentes do presente para o presente. Isso pode ser feito por meio de uma taxa de desconto. Assim, finalmente, para calcular o valor presente da trajetória das utilidades do consumo de um indivíduo no tempo chegamos à expressão $L(t)u(c(t))\exp(-\rho t)$ enquanto para calcular a soma das utilidades de todos os indivíduos devemos fazer

$$\int_0^\infty L(t)u(c)\exp(-\rho t)dt \tag{4.441}$$

Assumindo que a taxa de crescimento da população que identificamos com a população trabalhadora é constante e dado por $\dfrac{\dot{L}}{L} = n$, reescrevemos a expressão acima

$$\int_0^\infty L_0\exp(nt)u(c)\exp(-\rho t)dt = \int_0^\infty U(c(t))\exp(-(\rho-n)t)dt \tag{4.442}$$

Fizemos $L_0 = 1$ na expressão acima. Juntando a medida de performance, representando por um funcional objetivo, com a equação fundamental da acumulação do capital montamos o modelo de Solow com a abordagem da teoria do controle que é o modelo de Cass, Koopmans e Ramsey.

$$\begin{cases} Max_c \int_0^\infty U(c(t))\exp(-(\rho-n)t)dt \\ \textbf{s.a} \quad \dot{k} = \phi(k) - c - (n+\delta)k \\ k(0) = k_0 \\ u \in U \\ 0 \leq c \leq \phi(k) \end{cases}$$

Aplicando as condições de primeira ordem para o problema da teoria do controle ótimo ou seja o Princípio do Máximo, começamos pela construção

da hamiltoniana do sistema. Lembrando que k é a variável estado, c é a variável de controle e λ é a variável do-estado.

$$\begin{cases} H(t,c,k,\lambda) = u(c)\exp(-rt) + \lambda(\phi(k) - c - (\delta+n)k \\ Max_c \quad H = \dfrac{\partial H}{\partial c} = \dfrac{\partial u}{\partial c}\exp(-rt) - \lambda = 0 \\ \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial k} = -\lambda(\dfrac{d\phi(k)}{dk} - (\delta+n)) \\ \\ \dot{k} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = \phi(k) - c - (\delta+n)k \\ \\ \lambda(\infty) = 0 \quad \textbf{se } y_\infty \textbf{ é livre} \quad \text{e} \quad [H]_\infty = 0 \quad \textbf{pois} \quad T \to \infty \end{cases}$$

Obtemos assim três equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial c}\exp(-rt) = \lambda \\ \dot{\lambda} = -\lambda(\dfrac{d\phi(k)}{dk} - (\delta+n)) \\ \dot{k} = \phi(k) - c - (\delta+n)k \end{cases}$$

O objetivo é encontrar duas equações canônicas, sistema de equações diferenciais de primeira ordem que sejam autônomas, como descreve o princípio de maximo da forma

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k,c) \\ \dot{c} = g(k,c) \end{cases}$$

Precisamos então eliminar a presença do tempo nas três equações e transformá-las em duas equações envolvendo, por exemplo, as variáveis estado e controle que formam o espaço importante do modelo de solow com fundamentos microeconômicos.

Uma técnica para eliminar a presença do t e transformar as equações em equações autônomas é multiplicar as duas primeiras equações por $\exp(rt)$ e fazer uma mudança de variáveis com $H_c = \exp(rt)H$ e $\theta = \lambda\exp(rt)$.

Tomando a derivada desta última expressaão obtemos

$$\dot{\theta} = \dot{\lambda}\exp(rt) + r\lambda\exp(rt) = \dot{\lambda}\exp(rt) + r\theta \tag{4.443}$$

Multiplicando ambos os lados da equação da hamiltoniana por $\exp(rt)$, obtemos

$$H_c = \exp(rt)H = u(c)+\exp(rt)\lambda(\phi(k)-c-(\delta+n)k) = u(c)+\theta(\phi(k)-c-(\delta+n)k)$$

Do mesmo modo, multiplicando ambos os lados da equação canônica para λ'.

$$\exp(rt)\dot{\lambda} = -\exp(rt)\lambda(\phi_0(k) - (\delta + n))$$

Fazendo uso das mudanças de variáveis, inserindo elas nas condições de primeira ordem acima e procedendo com manipulações algébricas,obtemos um sitema de três equações autônomas,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_c}{\partial c} = \dfrac{du}{dc} - \theta = 0 \\ \dot{\theta} = -\theta(\phi_k(k) - (\delta + n + r) \\ \dot{k} = \phi(k) - c - (\delta + n)k \end{cases}$$

Finalmente, pretendemos reduzir o sistema de três equações em duas equações autônomas. Para isso vamos eliminar a variável θ das duas primeiras equações. Fazemos

$$\dot{\theta} = \frac{du}{dc}\frac{dc}{dt} = \frac{du}{dc}\dot{c} = u'(c)\dot{c} \tag{4.444}$$

Substituindo acima, obtemos finalmente um sistema de duas equações

diferenciais de primeira ordem nas variáveis k e c autônomas.

$$\begin{cases} \dot{c} = -\dfrac{u'(c)}{u''(c)}(\phi_k(k) - (\delta + n + r)) \\ \dot{k} = \phi(k) - c - (\delta + n)k \end{cases}$$

As hipóteses de Barro é que não há crescimento da população e nem depreciação do capital. A população é constante (Barro, S104), portanto, $n = 0$, assim $r = \rho$, e, não há depreciação do capital, portanto, $\delta = 0$.Fazendo as substituições nas equações acima, obtemos.

$$\begin{cases} \dot{c} = -\dfrac{u'(c)}{u''(c)}(\phi_k(k) - (\rho)) \\ \dot{k} = \phi(k) - c \end{cases}$$

Considerando a função de utilidade dada por

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \tag{4.445}$$

Segue-se que

$$u'(c) = c^{-\sigma} \tag{4.446}$$

e

$$u''(c) = -\sigma.c^{-\sigma-1} \tag{4.447}$$

Substituindo essas duas últimas equações na equação acima

$$\begin{cases} \dot{c} = -\dfrac{u'(c)}{u''(c)}(\phi_k(k) - \rho) = \dfrac{c}{\sigma}(\phi_k(k) - \rho) \\ \dot{k} = \phi(k) - c = s\phi(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{c}}{c} = \dfrac{1}{\sigma}(\phi_k(k) - \rho) \\ \dot{k} = \phi(k) - c = s\phi(k) \end{cases}$$

Nesta etapa, Barro pretende estudar o papel dos serviços públicos como um input para a produção privada. Este papel produtive dos serviços publicos que cria um vinculo positivo entre governo e crescimento.

O modelo considera uma função de produção com a propriedade de retornos constante a escala em k e g juntos, contudo, considera retornos decrescente em k separadamente (BARRO, 1990, p.S106).

$$y = \Phi(k, g) = k.\phi(g/k) \tag{4.448}$$

Escolhendo a função de produção Cobb-Douglas, temos

$$\frac{y}{k} = \phi(g/k) = A(g/k)^{\alpha} \tag{4.449}$$

Considerando agora a hipótese de que o gasto do governo é totalmente financiado por imposto, Barro escreve,

$$g = T = \tau y = \tau.k.\phi(g/k) \tag{4.450}$$

Onde T é a receita governamental e τ é a alíquota de imposto. Desta forma, sabendo que,

$$y = \Phi(k, g) = k.\phi(g/k) \tag{4.451}$$

Obtemos por simples derivação,

$$\frac{\partial y}{\partial k} = (\phi(g/k) - k\phi_{g/k}(k)\frac{g}{k^2}) \tag{4.452}$$

Simplificando, obtemos

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \phi(g/k)(1 - \phi_{g/k}(g/k)\frac{g}{y}) = \phi(g/k).(1 - \eta) \tag{4.453}$$

Com

$$\eta = (\frac{\partial y}{\partial g})_k.\frac{g}{y} \tag{4.454}$$

Fazendo a substituição na equação canônica da taxa de crescimento do consumo, $\gamma = \dfrac{\dot{c}}{c}$

Obtemos

$$\gamma = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}[(1-\tau).\phi(g/k).(1-\eta) - \rho] \tag{4.455}$$

Esta é a equação 13 de Barro com a função Cobb Douglas abaixo.

Onde

$$\frac{y}{k} = \phi(g/k) = A(\frac{g}{k})^{\alpha} \tag{4.456}$$

Desta forma, temos

$$\gamma = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}[(1-\tau)A(\frac{g}{k})^{\alpha}(1-\eta) - \rho] \tag{4.457}$$

Como $g = y\tau$ podemos reescrever a equação acima em termos de τ para obter o máximo da função γ.

$$\gamma = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}[(1-\tau)A(\frac{\tau y}{k})^{\alpha}(1-\eta) - \rho] \tag{4.458}$$

Derivar γ relativamente a τ, e igualando a zero, ou seja, $\dfrac{d\gamma}{d\tau} = 0$, otendo a condição de primeira ordem que fornece o valor τ para o máximo da função γ.

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{1}{\sigma}[A(y/k)^{\alpha}\alpha\tau^{\alpha-1}(1-\eta) - A(y/k)^{\alpha}(\alpha+1)\tau^{\alpha}(1-\eta)] = 0 \tag{4.459}$$

Simplificando, obtemos

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha+1} \tag{4.460}$$

Substituindo para os valores de α que é o expoente da Cobb-Douglas, obtemos o valor de τ_{α} que maximiza a função γ

4.4 TEORIAS E MODELOS DE CRESCIMENTO ENDOGENOS

4.4.1 MODELOS DE CRESCIMENTO ENDÓGENO: MODELO AK

O modo mais simples de introduzir um modelo capaz de representar as características de um crescimento econômico endógeno é por meio do próprio modelo de Solow com tecnologia seja do tipo Hicks neutro ou solow neutro com função de produção Cobb-Douglas relativamente à qual conjecturamos as consequências de se fazer $\alpha = 1$ na função Cobb-Douglas. Seguimos aqui bem de próximo a literatura tradicional e consolidada sobre o assunto, particularmente, Carlin, Aghion e Stone. Como sabemos a função de Cobb-Douglas com tecnologia pode ser escrita formalmente, com $0 < \alpha < 1$, como

$$Y = AF(K, L) = A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{(1-\alpha)} \tag{4.461}$$

Nos pressupostos e análise do modelo de Solow com ou sem tecnologia as condições da função de produção, segundo as quais, $F_K > 0$, $F_L > 0$, $F_{KK} < 0$ e $F_{LL} < 0$, além das condições de Inada, são condições que definem a concavidade da função de produção, e, a propriedade dos retornos marginais decrescentes da acumulação do capital. Todas essas condições estão associadas com a implicação da existência, unicidade e estabilidade do estado estacionário e demais relações entre as variáveis que dependem de parâmetros exógenos como a taxa de crescimento tecnológico. A função de produção Cobb-Douglas preenche todas essas condições para o caso em que $0 < \alpha < 1$.

Fazendo $\alpha = 1$, obtemos um novo modelo com propriedades diferentes daquelas mencionadas anteriormente.

$$Y = A(t)K(t) \tag{4.462}$$

Desta forma, essa função de produção obtida da Cobb-Douglas para $\alpha = 1$ não tem mais as características anteriores de concavidade estrita e de retornos marginais decrescentes. Assumindo essa particular função de produção, procede-se do mesmo modo como anteriormente com o modelo de Solow. Começando por escrever a equação da decisão intertemporal da distribuição da renda entre consumo e investimento, Depois, procra-se reescrevê-la em termos das taxas de crescimento. O parâmetro que representa a tecnologia, A, é uma constante no modelo AK. Contudo, vamos proceder considerando $A(t)$, dependente do tempo, e, utilizar o pressuposto de que é constante apenas mais tarde no desenvolvimento do modelo. O desenvolvimento da construção do problema do crescimento econômico com o modelo AK são estrutura e formalmente as mesmas do problema do crescimento econômico com o modelo de Solow:

Podemos, agora, reunir todos os principais pressupostos, como fizemos para a construção do problema do crescimento econômico de Solow, formando a seguinte estrutura do problema do crescimento econômico para o modelo AK

$$\begin{cases} Y(t) = A(t)K(t) & (4.463) \\ Y(t) = C(t) + I_{bruto}(t) & (4.464) \\ Y(t) - C(t) = S(t) & (4.465) \\ I_{bruto}(t) = S(t) & (4.466) \\ S(t) = sY(t) & (4.467) \\ I_{bruto}(t) = \dot{K(t)} + \delta.K & (4.468) \end{cases}$$

Com esses pressupostos podemos construir a equação da acumulação do capital

$$\dot{K(t)} = sY(t) - \delta.K(t) \tag{4.469}$$

Desta equação, fazendo uso da função de produção $Y = AK$

$$\dot{K(t)} = sA(t)K(t) - \delta.K(t) \tag{4.470}$$

Desta forma, a equação fundamental da acumulação de capital tem a seguinte forma

$$g_K = \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} = sA(t) - \delta \tag{4.471}$$

Contudo, como $Y(t) = A(t)K(t)$, abordamos essa relação da mesma forma e com os mesmos métodos que abordamos o modelo de Solow, ou seja, como pretendemos obter a relação entre as taxas de crescimento, devemos começar por tomar o logaritmo da função de produção definindo o modelo AK,ou seja,

$$\log Y = \log A(t) + \log K(t) \tag{4.472}$$

Tomando a derivada de ambos os membros, obtemos

$$\frac{\dot{Y(t)}}{Y(t)} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} \tag{4.473}$$

Substituindo g_K na equação anterior, podemos reescrevê-la como

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A(t)}}{A(t)} + sA(t) - \delta \tag{4.474}$$

$$g_Y = g_A + sA(t) - \delta \tag{4.475}$$

Uma reflexão sobre os determinantes da taxa de crescimento do produto mostra que são: a taxa de crescimento da tecnologia, o nível da tecnologia,

a poupança e a depreciação do capital. No modelo AK o parâmetro A é uma consntate, desta forma a taxa de crescimento da tecnologia, $g_A = 0$. Portanto,

$$g_Y = sA - \delta \tag{4.476}$$

Desta forma, o estado estacionário é definido por uma taxa de crescimento do produto que depende do nível do progresso tecnológico, depende positivamente da poupança e negativamente da depreciação.

Em ambos os modelos anteriores, modelo de Solow sem tecnologia como no modelo de Solow com tecnologia, a taxa de crescimento do capital per capita como a taxa de crescimento do produto per capita no longo prazo não depende da poupança.

Para que a comparação seja mais efetiva vamos dividir a função do modelo $Y = AK$ por L

$$y = Ak \tag{4.477}$$

A equação fundamental da acumulação primitiva torna-se

$$\dot{k(t)} = sAk(t) - (\delta. + g_L)k(t) \tag{4.478}$$

Finalmente, podemos obter a equação da dinâmica transiente para o modelo AK na forma per capita o que facilita a comparação com os modelos anteriores.

$$g_k = \frac{\dot{k(t)}}{k(t)} = sA - (\delta + g_L) \tag{4.479}$$

Como $y(t) = A(t)k(t)$ Se tomarmos o logaritmo de ambos os lados, obteremos o mesmo resultado para o modelo AK anterior, ou seja,

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{k}}{k} \tag{4.480}$$

ou

$$g_y = g_A + g_k \tag{4.481}$$

Substituindo g_k pelo seu valor da equação fundamental

$$g_y = g_A + sA - (\delta + g_L) = g_A + sA - (\delta + n) \tag{4.482}$$

ou, das equações acima para a equação fundamental da acumulação para a taxa de crescimento da renda per capita assim como para a taxa de crescimento do capital per capita

$$g_k = g_y = g_A + sA - (\delta + g_L) = g_A + sA - (\delta + n) \tag{4.483}$$

No modelo AK, semelhante ao modelo de Solow o parâmetro da tecnologia, A, que representa eficiência, é assumido constante, ou seja,que sua taxa de crescimento é zero, $g_A = 0$, como afirmamos no início.

$$g_k = g_y = sA - (\delta + g_L) = sA - (\delta + n) \tag{4.484}$$

No formato per capita fica mais fácil a comparação com os dois modelos anteriores, o modelo de Solow sem tecnologia e o modelo de Solow com tecnologia exógena no tipo Harrod neutro. A primeira coisa a notar é que a condição segundo a qual $g_k = g_y = 0$ é excepcional, uma vez que depende da coincidencia entre dois termos independentes que definem duas linhas retas sAk e $(delta + n)k$, que nunca se cruzam, podendo apenas se superporem, quando tem a mesma inclinação, ou seja, quando tem a mesma inclinação, $sA = (\delta + n)$. Neste caso, teríamos um estado estacionário semelhante ao do modelo de Solow sem tecnologia em que a eficiência seria dada ou interpretada como $A = \dfrac{(\delta + n)}{s}$. A segunda coisa a notar é que a taxa de crescimento da renda per capita como a taxa de crescimento capital per capita cresce com o crescimento do parâmetro de tecnologia ou produtividade, A, assim com a

taxa de poupança s e decresce com o crescimento da depreciação δ e da taxa de crescimento da poulação. Assim, para $sA > (\delta + n)$, a taxa de crescimento da renda estacionária e da taxa de crescimento da renda per capita estacionaria são dados por

$$\frac{\dot{y^*}}{y^*} = sA - (\delta + n) \tag{4.485}$$

ou em termos de taxa de crescimento da renda, podemos falar da taxa de crescimento da renda estacionária

$$\frac{\dot{Y^*}}{Y^*} = sA - (n + \delta) \tag{4.486}$$

Pode-se ver que há uma diferença fundamental com os dois modelos anteriores. Nos dois modelos anteriores o capital per capita assim como renda per capita no estado estacionário são constantes. No modelo AK a taxa de crescimento da renda per capita assim como do capital per capita mostra um crescimento perpétuo dependente da taxa de poupança. Apenas excepcionalmente a taxa de crescimento da renda per capita ou capital per capita se anula. Em outros termos, apenas em caso excepcional temos um estado estacionário na forma de $g_k = g_y = 0$ De certo modo, como gerado por uma função de produção que é o caso extremo da função de Cobb-Douglas, ou seja, no caso em que $\alpha = 1$ podemos verificar que para $\alpha \to 1$ o estado estacionário implicado pela Função Cobb-Douglas estaria no infinito produzindo duas retas que iniciam na origem, portanto, com sAk e $n + \delta)k$ tendo valor 0 na origem, mas, que, deveriam também se encontrar no infinito. Desta forma, o modelo AK representa o caso extremo do modelo com função Cobb-Douglas, a reta da tangente a todas as funçoes de produção geradas pelo parâmetro $< 0\alpha < 1$.Especulando, este caso lembra duas geodécias que se encontram nos dois polos de uma esfera. Desta forma, suas taxas de crescimento são diferentes de zero uma vez que não há estado estacionário exceto excepcionalmente em que haverá uma superposição.

$$\begin{cases} g_k = 0 & (4.487) \\ g_y = 0 & (4.488) \\ g_{k_\eta} = 0 & (4.489) \\ g_{y_\eta} = 0 & (4.490) \\ k_\eta = cte & (4.491) \\ y_\eta = k = \dfrac{K}{L} = cte.A(t) & (4.492) \\ y = \dfrac{Y}{L} = cte.A(t) & (4.493) \\ g_K = g_A + g_L & (4.494) \\ g_Y = g_A + g_L & (4.495) \\ g_k = sA - (n+\delta) & (4.496) \\ g_y = sA - (n+\delta) & (4.497) \end{cases}$$

4.4.2 MODELOS DE CRESCIMENTO ENDÓGENO: MODELO DE SCHUMPETER

Nesta seção desenvolvemos o modelo de schumpeter que encontramos tanto em Aghion (1992, 1998) que tem um modelo clássico quanto na versão de Pierre Cahuc deste modelo:

O modelo procura formalizar a ideia original de Schumpeter segundo o qual a inovação é o recurso primário e fundamental do crescimento econômico. O modelo procura estudar seus efeitos no crescimento econômico.

Neste modelo o crescimento, como queria Schumpeter, originalmente, tem origem nas inovações. São as inovações atuais $(\tau + 1)$ resposável pela destruição (obsolescência) das inovações anteriores (τ) assim como pelo aperfeiçoamento dos produtos. Assim, novos produtos substituem produtos antigos,

Neste modelo as inovações são resultados inesperados, portanto, resul-

tados de descobertas aleatórias. Contudo, elas podem ser produzidas ou incentivadas por atividades que tem por objetivo o lucro.

Os pressupostos do modelo[5]:

- Número constante no tempo, L, de indivíduos. Os indivíduos são idênticos.
- As preferências de cada indivíduo são dadas por seu consumo em cada instante do tempo. As preferencias são representadas pela função utilidades. A utilidade, U, como parâmetro de decisão , é o valor presente das utilidades ao longo do tempo.

$$U = \int_0^\infty c(t)e^{-\rho t}dt \tag{4.498}$$

- $\rho > 0$ é a taxa de desconto e $c)t)$ é o consumo. Risco neutro ocorre para o caso em que $r = \rho$.
- Cada individuo oferta uma unidade de trabalho por unidade de tempo a custo zero
- Produção é produzida em quantidade $y(t)$ dada pela tecnologia

$$y(t) = \frac{A(\tau)}{\alpha}x((\tau, t)^\alpha \tag{4.499}$$

- $0 < \alpha < 1$, $A(\tau) > 0$
- A produção é totalmente consumida.
- A produção de $y)t)$ é feita com o uso de uma variedade do produto intermediário τ.

[5]Pierre Cahuc-2012-2013

- $x(\tau, t) = x(\tau)$ é o valor da quantidade do produto intermediário da variedade τ assumida aqui como independente do tempo.

- A melhoria da qualidade do produto intermediário relativamente ao produto intermediário anterior é expressa por um fator multiplicativo $\gamma > 0$, ou seja, $A(\tau + 1) = \gamma A(\tau)$

- Os indivíduos podem trabalhar tanto i)no setor de produto intermediário quanto no setor de pesquisa

- Há a equivalencia de uma unidade de trabalho no setor de produto intermediário e a produção de uma unidade de produto intermediário.

- Se $n(\tau)$representa a quantidade de trabalho no setor de pesquisa quando é usado o produto intermediário τ então podemos escrever que o número total de trabalhadores, que é constante, é distribuído pelos dois setores, o setor de pesquisa, e, o setor de produção do produto intermediário, $L = n(tau) + x(\tau)$

- Contudo, nem toda unidade de trabalho no setor de pesquisa gera inovação bem sucedida, mas, apenas uma proporção dela, denominada de λ, portanto, as inovações são produzidas no setor de pesquisa numa taxa dada por $\lambda n(\tau)$. A taxa λ mede, portanto, a produtividade da pesquisa.

- As inovações geram monopólio das firmas quando da produção do produto intermediário.

- Há três tipos de externalidades gerados por essas inovações: 1)A renda do monopólio obtida pelo inovador é, em geral, menor do que o excedente produzido pela inovação; 2)Toda inovação aumenta A e, por este meio, aumenta a produtividade da pesquisa futura (conhecimento é um bem não rival);3)Destruição dos produtos intermediários anteriores.

A construção do modelo:

Seja $\pi\tau$ representar o fluxo de lucro da firma produzindo o produto intermediário τ

Seja o valor da inovação ou do produto intermediário τ, feito no tempo t, representado por $V(\tau, t)$ e dado por

$$V(\tau, t) = \frac{1}{1 + rdt}[\pi\tau, tdt + (1 - \lambda n(\tau)dt)V(\tau, t + dt)] \tag{4.500}$$

ou

$$rV(\tau, t) = \pi(\tau) - \lambda n(\tau)V(\tau, t) + \dot{V}(\tau, t) \tag{4.501}$$

Com o pressuposto de que tanto o lucro $\pi(\tau, t) = \pi(\tau)$ quanto o número de empregados no setor de pesquisa $n(\tau, t) = n(\tau)$, independe do tempo, segue-se que $\dot{V}(\tau, t) = 0$, e, portanto, que $V(\tau, t) = V(\tau)$ fazendo com que a equação acima, torne-se,

$$v(\tau)(r + \lambda n(\tau) = \pi(\tau) \tag{4.502}$$

e, portanto, que

$$V(\tau) = \frac{\pi\tau}{r + \lambda n(\tau)} \tag{4.503}$$

MERCADOS:

Vamos supor agora que a estrutura do mercado de trabalho é perfeitamente competitivo. Isto significa que os salários são iguais à produtividade marginal do trabalho e que há um único salário para ambos os setores, pois, o salário no setor de pesquisa deve ser, por arbitragem, igual ao salário no setor do produto intermediário.

Das considerações anteriores [6] podemos inferir que, no setor de pesquisa, 1) uma unidade de trabalho produz uma inovação com a probabilidade dada pela taxa de produtividade λ que descreve o número de inovações por unidade de tempo. 2) o valor da inovação produzida com o uso do produto intermediário τ é dada por $V(\tau+1)$

3)Combinando as hipóteses anteriores, segue-se que do fato que o mercado de trabalho é um mercado competitivo,

$$w(\tau) = \lambda V(\tau+1) \tag{4.504}$$

A estrutura de mercado do produto intermediário é de monopólio. O lucro de uma firnma que produz a quantidade $x(\tau)$ do produto intermediário τ com preço $p(\tau)$ é dado por

$$\pi\tau = max(p(\tau)x(\tau) - w(\tau)x(\tau) \tag{4.505}$$

A estrutura de mercado do produto final é competição perfeita. Neste mercado é que encontramos a relação anterior entre o preço e a quantidade do produto intermediário. Essa relação vem da maximização de lucro da firma que produz o bem final.

$$maxpy(\tau) - c(x(\tau)) \tag{4.506}$$

$$maxp\frac{A(\tau)}{\alpha}x(\tau)^{\alpha} - p(\tau)x(\tau) \tag{4.507}$$

Portanto,

$$p(\tau) = A(\tau)x(\tau)^{(\alpha-1)} \tag{4.508}$$

Substituindo essa relação na equação de lucro da firma monopolista no mercado do produto intermediário τ, obtemos

[6] Pierre Cahuc-2012-2013

$$maxA(\tau)x^{\alpha} - w(\tau)x(\tau) \tag{4.509}$$

Aplicando a condição de primeira ordem para maximização, temos que

$$A(\tau)\alpha x^{(\alpha-1)} = w(\tau) \tag{4.510}$$

Portanto,

$$x(\tau) = (\frac{\alpha}{\omega(\tau)})^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.511}$$

onde $\omega = \dfrac{w(\tau)}{A(\tau)}$ e, portanto, o lucro da firma produzindo o produto intermediário τ é

$$\pi(\tau) = A(\tau)(1-\alpha)(\frac{\omega(\tau)}{\alpha})^{\frac{\alpha}{(\alpha-1)}} \tag{4.512}$$

Desta forma, temos três importantes relações

- o valor da inovação

$$V(\tau) = \frac{\pi(\tau)}{r + \lambda n(\tau)} \tag{4.513}$$

- o valor do salário

$$w(\tau) = \lambda V(\tau + 1) \tag{4.514}$$

- O valor de equilíbrio dos lucros

$$\pi(\tau) = A(\tau)(1-\alpha)(\frac{\omega(\tau)}{\alpha})^{\frac{\alpha}{(\alpha-1)}} \tag{4.515}$$

Combinando essas três relações, podemos obter uma equação de arbitragem para o salário do setor de pesquisa e do setor de produção do produto intermediário. Na equação do valor de inovação podemos pensar na inovação $(\tau + 1)$ que fornece o seguinte valor

$$V(\tau+1) = \frac{\pi(\tau+1)}{r+\lambda n(\tau+1)} \tag{4.516}$$

Fazendo o mesmo para a equação $\pi(\tau)$ obtemos

$$\pi(\tau+1) = A(\tau+1)(1-\alpha)(\frac{\omega(\tau+1)}{\alpha})^{\frac{\alpha}{(\alpha-1)}} \tag{4.517}$$

lembrando que $w(\tau) = \lambda V(\tau+1)$ e que $\omega(\tau+1) = \frac{w(\tau+1)}{A(\tau+1)}$ chegamos a uma relação entre as variáveis n e ω uma vez que as demais quantidades são parâmetros dados fora do modelo.

$$\omega(\tau) = \frac{\lambda\gamma(1-\alpha)}{r+\lambda n(\tau+1)}(\frac{\omega(\tau+1)}{\alpha})^{\frac{\alpha}{(\alpha-1)}}$$

e, da restrição do mercado de trabalho como já vimos, temo que

$$L = x(\tau) + n(\tau) \tag{4.518}$$

Substituindo

$$x(\tau) = (\frac{\alpha}{\omega(\tau)})^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \tag{4.519}$$

Na equação da restrição de trabalho, obtemos

$$L = (\frac{\alpha}{\omega(\tau)})^{\frac{1}{(1-\alpha)}} + n(\tau) \tag{4.520}$$

Fazendo uso destas duas equações com duas incógnitas, $n(\tau)$ e $\omega(\tau)$, podemos obter o valor dessas variáveis para o estado estacionário, ou seja, fazendo $n(\tau+1) = n(\tau) = \hat{n}$ e $\omega(\tau+1) = \omega(\tau) = \hat{\omega}$ nestas equações, e, mais algumas manipulações algébricas chegamos em duas novas relações com esses valores das variáveis no estado estacionário.

$$\begin{cases} (\frac{\hat{\omega}}{\alpha})^{\frac{1}{(1-\alpha)}} = \frac{\lambda\gamma(1-\alpha)}{\alpha(r+\lambda\hat{n})} & (4.521) \\ L = (\frac{\alpha}{\hat{\omega}})^{\frac{1}{(1-\alpha)}} + \hat{n} & (4.522) \end{cases}$$

- A análise da primeira dessas equações mostra que no setor de pesquisa há uma relação inversa entre o salário $\hat{\omega}$ e a quantidade de trabalho n. O autor do artigo interpreta: salários futuros mais altos leva a menores lucros, e, portanto, menores os retornos da pesquisa, e, por aqui, menos emprego no setor de pesquisa.

- A análise da segunda dessas equações mostra que o setor de pesquisa aponta também para uma relaçao direta entre o salário $\hat{\omega}$ e a quantidade de trabalho n. O autor da pesquisa interpreta: o aumento do salário reduz o desemprego no setor do produto intermediário que é representado pelo fator $x(\tau) = (\frac{\alpha}{\hat{\omega}})^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$, mas, como vimos na equação anterior, aumenta o desemprego no setor de pesquisa.

- Essas duas relações geram no plano (n, ω) tanto uma curva asncedente quanto outra descendente que se cruzam num ponto, deste plano, definindo um valor único para o par de variáveis $(\hat{n}, \hat{\omega})$ que é o equiíbrio estacionário. Dada as condições pode-se estabeler a existência e unicidade de tal ponto.

- o valor de $\hat{n}$ do emprego no setor de pesquisa é obtido eliminando $\hat{\omega}$ da segunda equação. Isto é feito obtendo o valor $\hat{\omega}$ na primeira equação e substituindo esse valor na segunda equação. Com um pouco mais de manipulação algébrica podemos isolar o valor de $\hat{n}$ do emprego do setor de pesquisa no estado estacionário como sendo,

$$\hat{n} = \frac{(1-\alpha)\gamma L - (\frac{r}{\lambda}))}{(1-\alpha)\gamma + \alpha} \tag{4.523}$$

Como $0 < \alpha < 1$, e, o parâmetro $\gamma > 1$ segue-se que o denominador é positivo. Como $\lambda > 0$, podemos mostrar que $(1-\alpha)\lambda\gamma L > r$. Desta forma, $\hat{n} > 0$é um valo constante e não negativo.

Com esses resultados podemos obter a quantidade de emprego no setor do produto intermediário do estado estacionário que é dado por

$$\hat{x} = (\frac{\alpha}{\hat{\omega})^{\frac{1}{(1-\alpha)}}} \tag{4.524}$$

ou, calculado de outro modo mais fácil, $\hat{x} = L - \hat{n})$. Por sua vez, com esse resultado, podemos avaliar a quantidade produzida do produto final $y(\tau)$ com o produto intermediário τ é dado por

$$y(\tau) = \frac{A(\tau)}{\alpha}(L - \hat{n})^{\alpha} \tag{4.525}$$

Se multiplicarmos ambos os lados da equação por γ e usarmos a informação que $A(\tau + 1) = \gamma A(\tau)$, segue-se que, $y(\tau + 1) = \gamma y(\tau)$.

Com esses recursos, podemos construir um valor para taxa de crescimento do produto $g_y = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{d\ln(y)}{dt}$ lembrando que $\lambda\dot{n}dt$ fornece o número de inovações no intervalo de tempo dt já mencionado anteriormente.

Chapter 5

OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA:PROGRAMAÇÃO CLÁSSICA, PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR E PROGRAMAÇÃO LINEAR

O objetivo neste capítulo[1] é representar o problema fundamental da economia em termos da abordagem da otimização estática que consiste em estabelecer as condições e os instrumentos para garantir a existência, a unicidade e os critérios para encontrar a solução do problema. Uma coisa é demonstrar a existência da solução outra coisa é construir a solução. As técnicas e instrumentos para ambos os objetivos podem ser os mesmos como podem ser diferentes.

[1]Seguimos aqui a abordagem analítica do Intriligator

5.1 introdução: A estruturação do espaço: o espaço euclidiano de n dimensões E^n

O espaço da otimização estática é o espaço euclidiano de n dimensões. O espaço euclidiano é um espaço vetorial dotado de um produto interno.

Um espaço vetorial sobre um corpo é um conjunto de elementos, denominados vetor, dotado de uma estrutura formada de duas operações, uma operação de adição entre vetores e uma operação de multiplicação de escalar por vetores, com as seguintes propriedades:

1. Quaisquer que sejam três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pertencentes a V

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

2. quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o escalar $a \epsilon K$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

O PROBLEMA FUNDAMENTAL DA ECONOMIA:

Alocação eficiente de recursos escassos entre fins alternativos e competitivos

Os fins alternativos e competitivos de um problema econômico serão representados por conjuntos esturutuados com relações que dão a configuração de um espaço vetorial com um produto interno. Esses elementos são avaliados por medidas de performance representados por funções reais que tem por argumentos esses elementos, $F : \vec{x} \rightarrow F(\vec{x}) \epsilon R$. O conjunto desses elementos com uma estrutura formada de relaçoes e propriedades define um espaço vetorial com produto interno, no caso, com uma particular métrica definida pelo teorema de pitagoras. O espaço vetorial com essa particular métrica é denominado de Espaço euclidiano de n dimensões, identificado por

E^n. Desta forma, a combinação dos elementos com as medidas de avaliação desses elementos pode ser representado por uma função desses elementos cuja nomenclatura é $F(\vec{x})$ ou $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Na linguagem da otimização estática essa função é denominada de função objetivo.Os recursos escassos do problema são representados por outras funções que introduzem restrições no domínio das variáveis representando os objetivos e fins do problema. De modo abstrato dizemos que a variável

$$\vec{x} \ \epsilon X \subseteq E^n \tag{5.1}$$

O conjunto X denominado conjunto oportunidade é o conjunto $X = \vec{x} \quad \in E^n$. x satisfaz as restrições do problema.

$$\begin{cases} Max_{\vec{x}} \quad F(\vec{x}) \\ \mathbf{s.a}\epsilon \quad \in X \subseteq E^n \end{cases}$$

5.2 Programação clássica

5.2.1 introdução: a construção do problema e sua representação

A otimização estática também denominada de programação matemática tem por objetivo encontrar valores das variáveis de uma funçaõ, a função objetivo, que maximizam ou minimizam essa função sujeita a restrições. Os componentes da representação do problema da otimização estática consistem em variáveis instrumentos, na função objetivo e no conjunto das restrições. A otimização estática consistem em três abordagens ao problmea da otimização, a programação clássica, a programação não linear e a programação linear. Nesta seção vamos desenvolver a abordagem da programação clássica. A representação do problema fundamental da economia em termos algébricos

considerando que as funções F e g são consideradas como pertencentes ao conjunto $C^2[a,b]$ onde a e b podem ser infinitos.

$$\begin{cases} Max_{\vec{x}} \ F(\vec{x}) \\ \textbf{s.a} \ \ \vec{g}(\vec{x}) = \vec{b} \end{cases}$$

Podemos escrever o problema numa forma mais explicita

$$Max_{x_1,x_2,\ldots,x_n} F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$\textbf{s.a} \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_2 \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n = c_m \end{cases}$$

5.2.2 As condições e as técnicas de solução do problema

Nesta seção vamos construir as condições e os critérios para identificar os valores da variável para os quais a função atinge um máximo ou um mínimo para o problema da otimização estática. Para isso vamos tratar de um problema num espaço de dimensão $n+1$ e sem restrições, portanto, para $m = 0$

$$max_{x_1} F(x_1) \tag{5.2}$$

A solução desse problema de dimensão $n = 1$ e $m = 0$ é de importância fundamental pois adotamos a orientção heurística de que todo problema mais complexo deve ser reduzido a um problema da mesma natureza cuja solução é conhecida. Assim, a orientação metodológica adotada pe que problemas de dimensão $n = 2$ e $m = 0$ devem ser reduzidos ao problema de $n = 1$ e $m = 0$. Vamos assumir que são assumidas preenchidas as condições de existência

de solução ou seja que as funções envolvidas são continuas e continuamente diferenciáveis,em determinados intervalos considerados como compactos, pelo menos até segunda ordem. Vamos assumir, portanto, por Hipótese que

$$\exists x_1^* | F(x_1^*) \geq F(x_1) \textbf{para todo} x_1 \epsilon O_{x_1^*}$$

A única coisa que interessa aqui é o comportamento da função em torno do ponto x_1^*. O estudo do comportamento da função nas vixinhanças do ponto x_1^* se faz com o uso da sua expansão em Taylor em torno de x_1^*.

$$F(x_1) = F(x_1^* + \Delta x_1) = F(x_1^*) + \frac{dF(x_1}{dx_1}(x_1^*)\Delta x_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^* + \theta\Delta x_1)(\Delta x_1)^2 \tag{5.3}$$

Substituindo essa última equação na anterior, obtemos

$$F(x_1^*) \geq F(x_1) = F(x_1^* + \Delta x_1) = F(x_1^*) + \frac{dF(x_1}{dx_1}(x_1^*)\Delta x_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^* + \theta\Delta x_1)(\Delta x_1)^2 \tag{5.4}$$

Fazendo o cancelando de $F(x_1^*)$ de ambos os lados da equação, obtemos

$$\frac{dF(x_1}{dx_1}(x_1^*)\Delta x_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^* + \theta\Delta x_1)(\Delta x_1)^2 \leq 0 \tag{5.5}$$

Essa desigualdade é denominada DESIGUALDADE FUNDAMENTAL.

Como $m = 0$, e, não há fronteiras, portanto não há restrições que impedem a construção de vizinhanças. Assim, o ponto de máximo é um ponto no interior do intervalo, e, desta forma, a vizinhança se dá de ambos os lados do ponto, ou seja, $\Delta x_1 > 0$ ou $\Delta x_1 < 0$.

Fazendo $\Delta x_1 > 0$ podemos dividir a equação anterior por este valor, obtendo

$$\frac{dF(x_1)}{dx_1}(x_1^*) + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^* + \theta\Delta x_1)(\Delta x_1) \leq 0 \tag{5.6}$$

Como Δx_1 é tão pequena quanto se queira, fazemos $\lim_{\Delta x_1 \to 0}$ e aplicando na equação anterior, obtemos

$$\frac{dF(x_1}{dx_1}(x_1^*) \leq 0 \tag{5.7}$$

Repetindo o mesmo raciocínio, mas, fazendo $\Delta x_1 < 0$, obtemos

$$\frac{dF(x_1}{dx_1}(x_1^*) \geq 0 \tag{5.8}$$

Combinando ambos os resultados, segue-se, como condição necessária, a condição de primeira ordem para que x_1^* seja um ponto de ótimo,ou seja,

$$\frac{dF(x_1}{dx_1}(x_1^*) = 0 \tag{5.9}$$

A condição necessária de primeira ordem (C.P.O) é um critério para determinar quais são os pontos críticos da função. Com essa condição, podemos, por sua substituição na DESIGUALDADE FUNDAMENTAL, obter,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^* + \theta\Delta x_1)(\Delta x_1)^2 \leq 0 \tag{5.10}$$

Desta desigualdade, segue-se que

$$\frac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^* + \theta\Delta x_1) \leq 0 \tag{5.11}$$

Essa é a condição de segunda ordem. Contudo, ambas as condições, de primeira e segunda ordem são aqui condições necessárias, pois, obtemos, a partir da pressuposição de que existe X_1^* como ponto de máximo.

$$\begin{cases} \dfrac{dF(x_1}{dx_1}(x_1^*) = 0 \\ \dfrac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^*) \leq 0 \end{cases}$$

A condição suficiente para que o ponto x_1^* é um ponto de máximo é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dF(x_1}{dx_1}(x_1^*) = 0 \\ \dfrac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^*) < 0 \end{cases}$$

Vamos agora considerar a situação para $n = 2$ e $m = 0$. Em termos formais, o problema fundamental é representado por

$$max_{x_1,x_2} \;\; F(x_1, x_2) \tag{5.12}$$

Vamos assumir por hipótese que existe (x_1^*, x_2^*) como solução para o problema. Por definição de máximo temos que

$$F(x_1^*, x_2^*) \geq \; F(x_1, x_2) \;\; \textbf{para todo} \;\; (x_1, x_2) \;\; \epsilon O_{(x_1^*, x_2^*)}$$

Fazendo a expansão de Taylor da função em torno do ponto (x_1^*, x_2^*). O objetivo é reduzir o problema de duas variáveis a um problema de uma variável. Isto pode ser feito por meio da técnica de equação paramétrica,

$$\begin{cases} x_1 = x_1^* + h\Delta x_1 \\ x_2 = x_2^* + h\Delta x_2 \end{cases}$$

Mantendo fixo $(\Delta x_1, \Delta x_2)$. A interpretação é que com isto fixamos a orientação da reta sobre a qual geramos a vizinhança em torno do ponto (x_1^*, x_2^*) Com esses pressupostos temos que $F(x_1, x_2) = F(h)$. Assim, vamos fazer a expansão de Taylor da função $F(h)$ em torno do ponto 0. Isto significa o mesmo que a expansão da função F em torno do ponto (x_1^*, x_2^*)

$$\begin{cases} F(h) = F(x_1, x_2) = F(x_1^* + h\Delta x_1, x_2^* + h\Delta x_2) = F(x_1^*, x_2^*) \\ +\dfrac{dF}{dh}(x_1^* + h\Delta x_1, x_2^* + h\Delta x_2)|_{h=0}h + \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2F}{dh^2}(x_1^* + \theta h\Delta x_1, x_2^* + \theta h\Delta x_2)|_{h=0}h^2 \end{cases}$$

Onde $0 < \theta < 1$. Segue-se da substituição desta equação na equação da definição de um ponto máximo

$$\frac{dF}{dh}(x_1^* + h|Deltax_1, x_2^* + h\Delta x_2)|_{h=0}h + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dh^2}(x_1^* + \theta h, x_2^* + \theta h)|_{h=0}h^2 \leq 0 \tag{5.13}$$

Essa desigualdade é denominada de DESIGUALDADE FUNDAMENTAL que já encontramos anterioremente, e, que, vale também para duas variáveis, e, que pode ser generalizad para n variáveis.

Dividindo ambos os lados da desigualdade por h, obtemos

$$\frac{dF}{dh}(x_1^* + h\Delta x_1, x_2^* + h\Delta x_2)|_{h=0} + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dh^2}(x_1^* + \theta h, x_2^* + \theta h)|_{h=0}h \leq 0 \tag{5.14}$$

Fazendo nesta desigualdade h tão pequeno quando queira, ou seja, fazendo $\lim_{h\to 0}$,segue-se que

$$\frac{dF}{dh}(x_1^* + h\Delta x_1, x_2^* + h\Delta x_2)|_{h=0} \leq 0 \tag{5.15}$$

Operando a derivada acima, levando em conta as duas equações paramétricas, e, depois fazendo $H = 0$, obtemos

$$\frac{dF}{dh} = \frac{\partial F}{\partial x_1}|_{h=0}\Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}|_{h=0}\Delta x_2 \leq 0 \tag{5.16}$$

Assim,

$$\frac{dF}{dh} = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2)\Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2)\Delta x_2 \leq 0 \tag{5.17}$$

Neste momento, podemos liberar a vizinhança formada de $(\Delta x_1, \Delta x_2)$. Segue-se, portanto, que o único meio de satisfazer a desigualdade anterior, dado que $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ é qualquer, é que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases}$$

Essas duas equações são as condições de primeira ordem (C.P.O).

Substituindo essas equações na desigualdade fundamental, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dh^2}(x_1^* + \theta h, x_2^* + \theta h)h^2 \leq 0 \tag{5.18}$$

ou, pela eliminação $\frac{1}{2}$

$$\frac{d^2F}{dh^2}(x_1^* + \theta h, x_2^* + \theta h)h^2 \leq 0 \tag{5.19}$$

Vamos considerar o operador

$$\frac{d}{dh} = (\frac{\partial}{\partial x_1})\Delta x_1 + (\frac{\partial}{\partial x_2})\Delta x_2 \tag{5.20}$$

Este operador quando agindo sobre a função F produz

$$\frac{d(F)}{dh} = \frac{\partial(F)}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)\Delta x_1 + \frac{\partial(F)}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)\Delta x_2 \tag{5.21}$$

Agora, vamos fazer com que o operador age sobre a função $\frac{dF}{dh}$. Esta ação resulta em

$$\frac{d(\frac{dF}{dh})}{dh} = \frac{\partial(\frac{dF}{dh})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial(\frac{dF}{dh})}{\partial x_2}\Delta x_2 \tag{5.22}$$

O desenvolvimento da derivada produz

$$\begin{cases} \frac{d^2F}{dh^2} = \frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}(\Delta x_1)^2 + \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial^2F}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta x_2}{\partial x_1}\Delta x_1 \\ + \frac{\partial^2F}{\partial x_2 \partial x_1}\Delta x_2 \Delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}(\Delta x_2)^2 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial \Delta x_2}{\partial x_2}\Delta x_2 \end{cases}$$

A importância de considerar a derivada dos intervalos é que os intervalos

podem não ser os mesmos em diferentes pontos do plano. A razão é que os intervalos $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ podem depender dos pontos de ótimo (x_1^*, x_2^*). Para ver essa dependência, lembramos o caso da presença de restrição, $m = 1$, no problema de otimização. Assim, quando temos $g(x_1, x_2) = b$ segue-se que

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}\Delta x_2 = 0 \tag{5.23}$$

Finalmente,podemos ver, na relação a seguir, com clareza, que se elegermos Δx_1 como a variável independente,ou, vice versa, então, Δx_2 é dependente do ponto (x_1, x_2), isto é,

$$\Delta x_2 = \frac{\dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}}\Delta x_1 \tag{5.24}$$

Como estamos trabalhando com um problema de otimização sem quaisquer restrições, então, $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ são independentes dos pontos do plano (x_1, x_2). Neste caso, segue que as derivadas dos intervalos são zeros, ou seja, $\dfrac{\partial \Delta_i}{\partial x_i} = 0$.

Desta forma, introduzindo este resulta na desigualdade fundamental, obtemos

$$\frac{d^2F}{dh^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\Delta x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\Delta x_2)^2 \leq 0 \tag{5.25}$$

A desigualdade acima é conhecida como forma quadrática definida como $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j \leq i} a_{ij} x_i x_j$. A forma quadrática pode ser dita ser definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa e indefinida. Uma forma quadrática é sempre zero para $\vec{x} = 0$.

A forma quadrática também pode ser representada na forma matricial,

$$\left[\begin{array}{cc} \Delta x_1 & \Delta x_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{array}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} \left[\begin{array}{c} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{array}\right] \leq 0$$

Ou de forma sintética $Q(\vec{\Delta x}) = \vec{\Delta x}^T M \vec{\Delta x}$ onde

$$\vec{\Delta x} = [\Delta x_1, \Delta x_2] \tag{5.26}$$

e

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{array}\right]$$

A distinção[2] entre as formas quadráticas se dá pelo que acontece quando $\vec{x} \neq 0$. Dado que podemos representar formas quadráticas por meio de matrizes, podemos definir tanto a forma quadrática $Q(\vec{x}$ quanto a matriz M como sendo

$$\left\{\begin{array}{lllll} \textbf{definida positiva} & \text{se} & \vec{x}^T M \vec{x} > 0 & \forall \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbf{R}^n & \\ \textbf{semidefinida positiva} & \text{se} & \vec{x}^T M \vec{x} \geq 0 & \forall \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbf{R}^n & \\ \textbf{definida negativa} & \text{se} & \vec{x}^T M \vec{x} < 0 & \forall \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbf{R}^n & \\ \textbf{semidefinida negativa} & \text{se} & \vec{x}^T M \vec{x} \leq 0 & \forall \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbf{R}^n & \\ \textbf{indefinida} & \text{se} & \vec{x}^T M \vec{x} > 0 & \text{para alguns} \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^n & \text{e também} \\ \textbf{indefinida} & \text{se} & \vec{x}^T M \vec{x} < 0 & \text{para alguns} \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^n & \end{array}\right.$$

O importante agora é encontrar os critérios segundos os quais as formas quadráticas ou as matrizes que as representam se classificam como tais uma vez que essas formas quadráticas constituem as condições de segunda ordem da otimização das funções ou funcionais.

[2]Simon, Blumel (1994, p.375), Chiang

Chapter 6

OTIMIZAÇÃO DINÂMICA:ABORDAGEM VARIACIONAL, TEORIA DO CONTROLE E PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

6.1 Abordagem variacional com os extremos fixos

A aplicação da abordagem variacional na solução de problemas de otimização dinâmica começa pela construção do problema fundamental mais simples. Este problema tem a seguinte forma

$$\begin{cases} V(y) &= \int_0^T F(t,y,y')dt \\ y(0) &= A \\ y(T) &= Z \end{cases}$$

A diferença entre a otmização estática e a otimização dinâmica está em

que na primeira a solução está em encontrar uma variável cujo valor é dado pontualmente enquanto na última a solução não é uma vairável pontual mas uma variável dependente do tempo, portanto, uma trajetória. A abordagem variacional busca encontrar as condições de primeira e segunda ordem para o problema da otimização. Desta forma, semelhantemente à abordagem estática, a abordagem variocional depende fundamental da construção de vizinhanças em torno da solução ótima seja ela um ponto ou uma trajetória seguindo sempre o princípio de reduzir o mais complexo ao mais simples ou o desconhecido ao conhecido. A idéia portanto deste princípio é reduzir um problema mais difícil a um problema mais fácil que já sabemos resolver.Nesta linha de raciocínio,bem cartesiana, vamos reduzir o problema da otimização dinâmica, envolvendo infinitas variáveis (o valor da incógnita em cada instante do tempo) a um problema de otimização estática, portanto, a um problema de otimização de uma única variável que já sabemos resolver.

Se o problema consiste em achar uma trajetória que maximiza ou miniza, portanto, otimiza um determinado critério de performance, o mais importante inicialmente é como saber construir esse problema para um ponto da trajetória. Assim, devemos entender como descrever uma trajetória em um ponto do espaço em questão. É insuficiente para descrever uma trajetória fornecer o instante e a ordenada deste ponto, ou seja, $(t, y(t))$ pois são infinitas as possibilidades de direção para um sistema descrito por essas duas coordenadas. Desta forma, para descrever adequadamente a trajetória do sistema que tem as coordenadas $(t, y(t))$ é preciso acrescentar a tendência do sistema que se encontra neste estado $(t, y(t))$. A tendência de um estado descrito por $y(t)$ é descrito matematicamente por sua tangencia, portanto, o estado de um sistema numa trajetória é descrito por três ordenadas $(t, y(t), y'(t))$. Como o objetivo de um problema de otimização é escolher a trajetória ótima, isto depende de um critério capaz de avaliar cada uma das trajetórias. O critério de avaliação das trajetórias é denominada de função objetivo, e, esta função

depende, portanto, do estado do sistema $(t, y(t), y'(t))$, fornecendo o valor $F(t, y(t), y'(t))$. Como essa avaliação se dá em um ponto da trajetória no espaço $(t, y(t), y'(t))$, para se obter a trajetória de um ponto inicial até um ponto final precisamos proceder a uma integração para obter o valor da trajetória associado com aquele critério. Essa é a motivação para construir o problema da otimização dinâmica que consiste, portanto, em maximizar ou minimizar a integral sobre todo o intervalor de interesse. Eis, portanto, a razão para a forma final do problema da otimização se apresentar na forma acima. Trata-se de um problema com os extremos fixados.

6.1.1 As etapas para encontrar as condições de primeira ordem

A construção da vizinhança para a hipótese de existir uma solução ótima:expansão de Taylor

Vamos assumir que as condições sobre as funções estado $y(t)$ e a função objetivo $F(t, y(t), y'(t))$ são tais que garantem a existência da solução para o problema da otimização dinâmica. Assim, pressupomos que existe uma solução ótima, ou seja uma trjetória ótima para o problema da otimização dinâmica. Seguimos os passos adotados tanto por Chiang quanto por Intriligator[1] e tentamos apenas contribuir com maior didatismo pela apresenção dos detalhes. No caso, vamos assumir, que a solução ótima maximiza $V(y)$, ou seja,

$$V(y^*) \geq V(y) \quad \forall y \quad \in O_{y*}$$

Como estamos interessados nas condições de ótimo, fazendo uma aplicação da expansão de Taylor em torno do ponto ótimo y^* com o uso da

[1] Chiang, Intriligator

técnica de construção de vizinhanças. Seja y uma trajetória da vizinhança da trajetória ótima y^*. Seja a função $p(t)$ uma função qualquer da forma senoidal ou cosenoida ou da superposição de funções dessa forma. Uma função descrevendo uma trajetória nas vizinhanças de y^*.

Seja essa solução (trajetória) ótima representada por $y^*(t)$. Vamos construir uma vizinhança de trajetórias em torno dessa solução (trajetória) ótima. Seja os valores dessas trajetórias na vizinhança da trajetória ótima dada por

$$y(t) = y^*(t) + \eta p(t)$$

onde a função $p(t)$ é uma função que assume valores no mesmo intervalo de interesse de $y(t)$ exceto que, nos extremos,

$$\begin{cases} p(0) &= 0 \\ p(T) &= 0 \end{cases}$$

A função auxiliar para a construção da vizinhança $p(t)$ se anula nos extremos pois o problema mais simples considera que a trajetória assume valores dados nas extremidades dos intervalo $[0, T]$, ou seja, que $y(0) = A$ e $y(T) = Z$. Tomando a derivada das funções $y(t)$, descrevendo as trajetórias na vizinhança da trajetória ótima, obtemos,

$$y'(t) = y^{*'} + \eta p'(t)$$

Desta forma, podemos expandir $y(t)$ em Taylor em torno $\eta = 0$

$$V(y) = V(y^* + \eta p(t)) = V(y^*) + \frac{dV}{d\eta}|_{\eta=0}(y^* + \eta p)(\eta) + \frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0}(y^* + \theta\eta p)(\eta)^2 \tag{6.1}$$

Como $V(y^*) \geq V(y)$ segue-se da expansão anterior que

$$V(y^*) \geq V(y) = V(y^* + \eta p(t)) = V(y^*) + \frac{dV}{d\eta}|_{\eta=0}(y^* + \eta p)(\eta) + \frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0}(y^* + \theta\eta p)(\eta)^2 \tag{6.2}$$

Fazendo os cancelamentos, obtemos

$$\frac{dV}{d\eta}|_{\eta=0}(y_* + \eta p)(\eta) + \frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0}(y^* + \theta\eta p)(\eta)^2 \leq 0 \tag{6.3}$$

Essa é a DESIGUALDADE FUNDAMENTAL. Ela é semelhante àquela obtida na programação clássica da otimização estática. Isto não deve vir como surpresa pois estamos aplicando a mesma abordagem anterior no problema da otimização.

Dividindo essa desigualdade por η obtemos

$$\frac{dV}{d\eta}|_{\eta=0} + \frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0}(y^* + \theta\eta p(t))(\eta) \leq 0 \tag{6.4}$$

Fazendo com que η seja tão pequena quanto se queira, ou seja, $lim_{\eta\to 0}$, obtemos

$$\left[\frac{dV}{d\eta}\right]_{y*} \leq 0 \tag{6.5}$$

Mas, lembrando que

$$V(\eta) = V[y] = \in_0^T F(t, \overbrace{y^* + \eta p(t)}^{y(t)}, \overbrace{y'^* + \eta p'(t)}^{y(t)'})dt \tag{6.6}$$

Fazemos $\dfrac{dV}{d\eta}$, ou seja,

$$\frac{dV(\eta}{d\eta}) = V[y] = \in_0^T \frac{dF(t, y(t), y'(t))}{d\eta}dt \tag{6.7}$$

Assim, o problema fundamental é reescrito em termos de vizinhanças

$$\begin{cases} V(\eta) = \int_0^T F(t, \overbrace{y^* + \eta p(t)}^{y(t)}, \overbrace{y^{*'} + \eta p'(t)}^{y(t)'})dt \\ y(0) = A \\ y(T) = Z \end{cases} \tag{6.8}$$

Portanto, com esse recurso da construção de vizinhanças em torno de uma pressuposta trajetória ótima y^* e a expansão em taylor transformamos um um problema de infinitas variáveis, uma para cada instante do tempo, em um problema depedente de uma única variável, ou seja, η uma vez que a trajetória ótima y^* é pressuposta conhecida e dada assim como as funções auxiliares, construindo a vizinhança e que são descritas por $p(t)$. O papel do parâmetro η é gerar a vizinhança da trajetória ótima, y^*, por meio da alteração na amplitude das funções auxiliares dadas.

Desta forma, com a transformação do problema de infinitas variáveis em um problema de uma única variável, na forma de uma função $V(\eta)$ e utilizando a expansão de Taylor obtemos acima a condição de primeira ordem, ou seja, $\frac{dV(\eta}{d\eta}$, e trocando a integral pela derivada, obtemos,

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF(t, y^* + \eta p(t), y^{*'}(t) + \eta p'(t))}{d\eta}]dt \tag{6.9}$$

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF(t, y, y')}{dy}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dF(t, y, y')}{dy'}\frac{dy'}{d\eta}]dt \tag{6.10}$$

Como

$$y(t) = y^*(t) + \eta p(t)$$

e que

$$y'(t) = y^{*'} + \eta p'(t)$$

segue-se que

$$\frac{dy(t)}{d\eta} = p(t) \tag{6.11}$$

e que

$$\frac{dy'(t)}{\eta} = p'(t) \tag{6.12}$$

Daqui segue-se, então, que

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF(t,y,y')}{dy}p(t) + \frac{dF(t,y,y')}{dy'}p'(t)]dt \tag{6.13}$$

A presente equação mostra que o caminho na sequencia é fazer uma integral por partes no segundo termo do lado direito da equação uma vez que $p(t)'$ é uma variável dependente de $p(t)$. O objetivo é fazer com que na equação acima apareça apenas a variável independente $p(t)$. A técnica para isso é a integral por partes. Vamos então distribuir a integral para os dois termos, separando e desenvolvendo o último deles.

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF(t,y,y')}{dy}p(t)dt + \int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy'}p'(t)]dt = 0 \tag{6.14}$$

Assim, sabendo que a estrutura da integral por partes tem a seguinte forma,

$$\int uvdt = \int vdu + \int udv \tag{6.15}$$

Observando por analogia que $dv = dp$ e

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}$$

segue-se que $v = p$ e $\frac{du}{dt} = \frac{dF_{y'}}{dt}$ e aplicando a regra da integração por partes, chegamos em

$$\int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy'}p'(t)dt = p(t)\frac{dF(t,y,y')}{dy}\Big]_0^T - \int_0^T \frac{dF_{y'}}{dt}p(t)dt \tag{6.16}$$

Como sabemos, dos dados do problema, que $p(0) = p(T) = 0$, uma vez que os extremos do problema são dados, segue-se, desta equação abaixo,

$$\int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy'}p'(t)dt = p(T)\frac{dF(t,y,y')}{dy}(T) - p(0)\frac{dF(t,y,y')}{dy}(0) - \int_0^T \frac{dF_{y'}}{dt}p(t)dt \tag{6.17}$$

Portanto,

$$\int_0^T \frac{dF(t,y,y'))}{dy'}p'(t)dt = -\int_0^T \frac{dF_{y'}}{dt}p(t)dt \tag{6.18}$$

Inserindo essa equação na equação original, obtemos, da desigualdade fundamental que

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy}p(t)dt - \int_0^T \frac{dF_{y'}}{dt}p(t)dt \leq 0 \tag{6.19}$$

Reescrevendo essa equação numa mesma integral e simplifcando a notação, temos, então,

$$\frac{dV(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_0^T [F_y - \frac{dF_{y'}}{dt}]p(t)dt \leq \tag{6.20}$$

O único resultado possível para que integral seja não positiva qualquer que seja a função $p(t)$ (que gera a vizinhança de y^* é que o coeficiene da vizinhança $p(t)$ seja nulo. Assim, podemos, sem ofensas aos detalhes matemáticos, considerar, seguindo os procedimentos da programação clássica, assumir que a função auxiliar $p(t)$ tenha seu coeficiente nulo, ou seja, que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d(\frac{\partial F}{\partial y'})}{dt} = 0 \tag{6.21}$$

ou

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dt} = 0 \tag{6.22}$$

Chegamos assim, à condição necessária, que é a condição de primeira ordem, para que $V(y)$ tenha um ponto crítico.A condição necessária para encontrar a trajetória y^* que é a trajetória ótima é denominada de equação de Euler-Lagrange. Como veremos a equaçpão de Euler-Lagrange é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem que pode ser não linear.

Aplicando este resultado na DESIGUALDADE FUNDAMENTAL obtemos a condição de segunda ordem que proporciona os critérios que servem para decidir se a trajetória y^* maximiza ou minima a função $V(y)$, ou seja,

$$\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} \leq 0 \tag{6.23}$$

Deixando o desenvolvimento desta condição de segunda ordem para mais tarde, vamos desenvolver, a partir de agora, uma segunda versão da equação diferencia Euler Lagrange em que sua natureza de uma equação diferencial de segunda ordem fica bastante evidente.

Para tanto, vamos explicitar o segundo termo da equação, ou seja, $\frac{dF_{y'}}{dt}$, pela diferenciação relativamente ao tempo de $F_{y'}(t, y, y')$.

$$\frac{dF_{y'}}{dt} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_y}{\partial t} \tag{6.24}$$

Reescrevendo a equação acima

$$\frac{dF_{y'}}{dt} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}y' + \frac{\partial F_y}{\partial t} \tag{6.25}$$

Substituindo esse resultado na Equação de Euler-Lagrange,e trocando o sinal, obtemos, finalmente, a equação de Euler-Lagrange na forma explicita de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

$$\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}y' + \frac{\partial F_y}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{6.26}$$

6.2 Abordagem variacional com um dos extremos livre: as condições de transversalidade

O problema fundamental mais simples com extremos livres é aquele em que apenas um dos extremos é livre. Seja então o extremo final livre, ou seja, que não conhecemos nem o T final nem o valor da variável estado neste

ponto, $y(T)$. Esses dois valores são assumidos como variáveis, e, portanto, no caso, variáveis endógenas.

$$\begin{cases} V(y) = \int_0^T F(t, y, y')dt \\ y(0) = A \\ y(T) = y_T \end{cases} \tag{6.27}$$

Fazendo uso da mesma técnica para resolver o problema que consiste em pressupor o problema resolvido com uma trajetória ótima, $y*(t)$ e construir vizinhanças em torno dessa solução ótima. O uso dessa técnica é importante para encontrar as condições de primeira e de segunda ordem que caracterizam e ajudam a encontrar a trajetória ótima $y^*(t)$.

A construção da vizinhança $y(t)$ da trajetória ótima $y^*(t)$ segue o mesmo procedimento utilizado na soluçaõ do problema do ótimo na programação matemática, apenas que, agora, tratamos com trajetórias, e, não, apenas, o valor da variável num ponto. Seja então a vizinhança dada por

$$y(t) = y^* + \eta p(t)$$

e sua derivada

$$y'(t) = y^{*'} + \eta p'(t)$$

Assim, $p(t)$ é uma variável independente, mas, $p'(t)$ é uma variável dependente de $p(t)$.

No entanto, como o extremo final é livre, a condição sobre p(t) nos extremos só vale para o extremo inicial, onde $p(0) = 0$. $p(T)$ é livre. Como T é livre, podemos também construir uma vizinhança em torno da solução ótima que supomos existir, T^*.

$$T(\eta) = T^* + \eta \Delta T$$

Da mesma forma y_T também é livre, assim, podemos também construir uma vizinhança em torno da solução ótima $y^*(T)$.

$$y(T) = y^*(T) + \eta\Delta y$$

Destas condições, seguem-se que

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{d\eta} &= p(t) \\ \dfrac{dy'(t)}{d\eta} &= p^{'}(t) \\ \dfrac{dT}{d\eta} &= \Delta T \\ \dfrac{dy(T)}{d\eta} &= \Delta y \end{cases}$$

Seguindo os mesmos passos da dedução anterior obtemos , pela inserção da vizinhança na integral,

$$\begin{cases} V(\eta) = \int_0^{T(\eta)} F(t, y^* + \eta p(t), y^{*'} + \eta p^{'}(t))dt \\ y(0) = A \\ y(T) = y_T \end{cases}$$

A presente equação mostra que, como antes, a sequencia é fazer primeiro uma decomposição da integral em dois intervalos ou seja, um intervalo $[0, T^*]$ e o outro intervalor $[T^*, T^* + \eta\Delta T]$. Desta decomposição, obtemos

$$\begin{cases} V(\eta) &= \int_0^{T^*} F(t, y^* + \eta p(t), y^{*'} + \eta p'(t))dt + \int_{T^*}^{T^*+\eta\Delta T} F(t, y^* + \eta p(t), y^{*'} + \eta p'(t))dt \\ y(0) &= A \\ y(T) &= y_T \end{cases}$$

A última integral é uma integral em um intervalo infinitesimal ΔT, portanto, o resulta é muito simples: $F(T, y(T), y'(T))\eta\Delta T$. O valor da função é calculado no extremo T^*, ou seja, $F(T^*, y(T^*, y'(T^*)$, e, então, multiplicado pelo tamanho do intervalo $\eta\Delta T$.

$$\begin{cases} V(\eta) = \int_0^{T^*} F(t, y^* + \eta p(t), y^{*'} + \eta p'(t))dt + F(T, y(T), y'(T))\eta\Delta T \\ y(0) = A \\ y(T) = y_T \end{cases}$$

O problema de infinitas variáveis com a técnica das vizinhanças foi reduzido a um problema de uma única variável. Desta forma, aplicamos a condição para encontrar o ponto crítico de uma função de uma única variável.

$$\frac{dV(\eta}{d\eta} = 0 \tag{6.28}$$

Desenvolvendo essa condição, sem nos preocuparmos com as condições de contorno, obtemos

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T \frac{dF(t, y^* + \eta p(t), y^{*'}(t) + \eta p'(t))}{d\eta} dt + F(T, y(T), y'(T))\Delta T = 0 \tag{6.29}$$

Desenvolvendo a derivada dentro da integral, obtemos, como anteriormente,

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF(t, y, y')}{dy}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dF(t, y, y')}{dy'}\frac{dy'}{d\eta}]dt + F(T, y(T), y'(T))\Delta T \tag{6.30}$$

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy} p(t)dt + \frac{dF(t,y,y')}{dy'} p'(t)dt + F(T,y(T),y'(T))\Delta T \tag{6.31}$$

Vamos agora proceder a integral por partes da segunda integral do lado direito da equação. Para isso, vamos distribuir a integral para os dois termos e separar e desenvolver o último deles.

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy} p(t)dt + \int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy'} p'(t)dt + F(T,y(T),y'(T))\Delta T \tag{6.32}$$

Sabendo que a integral por partes pode ser escrita como.

$$\int uvdt = \int vdu + \int udv \tag{6.33}$$

Fazendo

$$\begin{cases} dv = dp \\ u = \dfrac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'} \end{cases}$$

segue-se que

$$\begin{cases} v = p \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{dF_{y'}}{dt} \end{cases}$$

Aplicando a regra da integração por partes na segunda integral chegamos em

$$\int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy'} p'(t)dt = p(t)\frac{dF(t,y,y')}{dy}\Big]_0^T - \int_0^T \frac{dF_{y'}}{dt} p(t)dt \tag{6.34}$$

$$\int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy'} p'(t)dt = p(T)\frac{dF(t,y,y')}{dy}(T) - p(0)\frac{dF(t,y,y')}{dy}(0) - \int_0^T \frac{dF_{y'}}{dt} p(t)dt \tag{6.35}$$

Contudo, neste ponto, surge outra diferença com o problema anterior. Uma vez que apenas $p(0) = 0$, e $p(T)$ é livre, não há como eliminar o termo na extremidade em T. Desta condição segue-se que a segunda integral tem a seguinte forma com um termo a mais do que no caso dos extremos fixos.

$$\int_0^T \frac{dF(t,y,y'))}{dy'}p'(t)dt = p(T)\frac{dF(t,y,y')}{dy}(T) - \int_0^T \frac{dF_{y'}}{dt}p(t)dt \qquad (6.36)$$

Substituindo essa equação na relação original, obtemos,

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T \frac{dF(t,y,y')}{dy}p(t)dt + p(T)\frac{dF(t,y,y')}{dy}(T) - \int_0^T \frac{dF_{y'}}{dt}p(t)dt + F(T,y(T),y'(T))\Delta T = 0 \qquad (6.37)$$

Reescrevendo parte da equação numa mesma integral e adicionando os demais termos fora da integral temos

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF(t,y,y')}{dy} - \frac{dF_{y'}}{dt}p(t)dt] + p(T)\frac{dF(t,y,y')}{dy}(T) + F(T,y(T),y'(T))\Delta T = 0 \qquad (6.38)$$

Há aqui mais um termo extra cujo valor é definido apenas extremo final, ou seja, em T, e, envolve o valor de $y(Y)$. Esse termo extra contém um termo que não pertence ao problema original, ou seja, $p(T)$. Este termo foi introduzido como a partir da técnica de vizinhanças como um recurso para construir a solução do problema das condições de otimização. Desta forma, Ele não pertence à natureza do problema original. Como um elemento estranho tem que ser eliminado.

A fim de proceder com essa eliminação de $p(T)$ buscamos a partir das condições do problema, com o extremo final livre, que envolve, portanto, também a construção de uma vizinhança no extremo final, uma relação entre este termo e as demais vizinhanças no extremo final T.. Essa relação é a seguinte

$$\Delta y(T) = p(T) + y'(T)\Delta T \tag{6.39}$$

Desta forma, isolando, $p(T)$

$$p(T) = \Delta y(T) - y'(T)\Delta T \tag{6.40}$$

Substituindo, agora, essa equação na equação acima, para eliminar $p(T)$,finalmente, obtemos

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF}{dy} - \frac{dF_{y'}}{dt}]p(t)dt + (\Delta y(T) - y'(T)\Delta T)\frac{dF}{dy'}(T) + F(T, y(T), y'(T))\Delta T = 0 \tag{6.41}$$

Rearranjando essa equação,

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dt}(F_{y'})]p(t)]dt + \frac{dF}{dy'}(T)\Delta y(T) + F(T, y(T), y'(T))\Delta T - y'(T)F_{y'}(T)\Delta T = 0 \tag{6.42}$$

ou, de modo mais enxuto

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dt}(F_{y'})\right] p(t)dt + \left[F_{y'}\right]_T \Delta y + \left[F - y'F_{y'}\right]_T \Delta T = 0 \tag{6.43}$$

A integral acima tem que se anular qualquer que seja a função $p(t)$ (que gera a vizinhança de y^*. Dessa condição,obtemos, novamente,repetimos, que sem ofensas aos detalhes matemáticos, como condição necessária, a equação de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0 \tag{6.44}$$

Adicionalmente, das duas outras vizinhanças, ΔT e Δy, obtemos o que é denominada de condições de transversalidades, e, podem ser escrita conjuntamente,

$$[F_{y'}]_T \Delta y(T) + [F - y'F_{y'}]_T \Delta T = 0 \tag{6.45}$$

As diferentes formas das fronteiras econômicas que dão origem às condições de transversalidade. As condições de transversalidade são condições que ocorrem na fronteira do sistema econômico, ou seja, em T, ou em $y(T)$ que são valores particulares das variáveis definindo o estado do sistema econômico.

Linha de fronteira vertical

Seja um sistema econômico com T fixo e $y(T)$ é livre. Segue-se destas hipóteses que $\Delta T = 0$ enquanto $\Delta y(T) \neq 0$. Aplicando essas condições na condição de transverslidade acima, obtemos

$$[F_{y'}]_T \Delta y(T) = 0 \quad \forall \quad \Delta y(T) \tag{6.46}$$

Desta equação segue-se que a condição de transversalidade para a linha de fronteira vertical é dado por

$$[F_{y'}]_T = 0 \tag{6.47}$$

Sintetizando os resultados até agora, temos que para o problema fundamental com o extremo terminal em T livre mas com $y(T)$ fixo,

$$\begin{cases} V(y) = \int_0^T F(t, y, y')dt \\ y(0) = A \\ y(T) = y_T \end{cases} \tag{6.48}$$

As condições de primeira ordem são formadas da equação de Euler para o intervalor $t \in [0, T]$, e de uma equação que vale apenas na fronteira, ou seja para $t = T$

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dy'}(F_{y'}) &= 0 \\ [F_{y'}]_T &= 0 \end{cases}$$

Linha de fronteira horizontal

Seja um sistema econômico com $y(T)$ dado ou fixo e com T livre. Destas hipóteses seguem que $\Delta y(T) = 0$ e $\Delta T \neq 0$.

Aplicando essas condições na condição de transverslidade acima, obtemos

$$[F - y'F_{y'}]_T \Delta T = 0 \forall \Delta T \tag{6.49}$$

Desta equação segue-se que a condição de transversalidade para a linha de fronteira horizontal é dado por

$$[F - y'F_{y'}]_T = 0 \tag{6.50}$$

Sintetizando os resultados até agora, temos que para o problema fundamental com o extremo terminal em T livre mas com $y(T)$ fixo,

$$\begin{cases} V(y) = \int_0^T F(t, y, y')dt \\ y(0) = A \\ y(T) = y_T \end{cases} \tag{6.51}$$

As condições de primeira ordem são formadas da equação de Euler para o intervalor $t \in [0, T]$, e de uma equação que vale apenas na fronteira, ou seja para $t = T$

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dy'}(F_{y'}) &= 0 \\ [F - y'F_{y'}]_T &= 0 \end{cases}$$

Linha de Fronteira como uma curva

Seja um sistema econômico com a função que descreve o estado do sistema, y, depende do valor da variável t na fronteira T, ou seja, $y(T) = \phi(T)$ em que T livre. Desta hipótese segue que $\Delta y = \phi'(T)\Delta T$

Aplicando essas condições na condição de transverslidade acima, obtemos

$$\begin{cases} [F_{y'}]_T \Delta y(T) + [F - y'F_{y'}]_T \Delta T &= [F_{y'}]_T \phi'(T)\Delta T + [F - y'F_{y'}]_T \Delta = \\ = [F - (y' - \phi')F_{y'}]_T \Delta T = 0 \end{cases}$$

Desta equação, com $\forall \quad \Delta T$, segue-se que a condição de transversalidade para a linha de fronteira como é dado por

$$[F - (y' - \phi'(T))F_{y'}]_T = 0 \tag{6.52}$$

Sintetizando os resultados até agora, temos que para o problema fundamental com o extremo terminal na forma de uma curva $y(T) = \phi(T)$ com T livre.

$$\begin{cases} V(y) = \int_0^T F(t, y, y')dt \\ y(0) = A \\ y(T) = \phi(T) \quad T\text{livre} \end{cases} \tag{6.53}$$

As condições de primeira ordem são formadas da equação de Euler para o intervalo $t \in [0, T]$, e de uma equação que vale apenas na fronteira, ou seja para $t = T$, no caso da fronteira ser uma curva $y(T) = \phi(T)$

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dy'}(F_{y'}) &= 0 \\ [F - (y' - \phi')F_{y'}]_T &= 0 \end{cases}$$

6.3 As condições de segunda ordem

Para dar conta das condições de segunda ordem do problema fundamental aqui novamente segundo a hipótese de que os extremos são dados $y(0) = A$ e $y(T) = B$, ou seja,

$$\begin{cases} V(y) = \int_0^T F(t, y, y')dt \\ y(0) = A \\ y(T) = B \end{cases} \tag{6.54}$$

Fazendo uso da equação de Euler-Lagrange, condição de primeira ordem para a otimização, $F_y - \frac{F_{y'}}{dt} = 0$ na DESIGUALDADE FUNDAMENTAL

$$\frac{dV}{d\eta}|(y_* + \eta p)(\eta)|_{\eta=0} + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{d\eta^2}(y^* + \theta\eta p)(\eta)^2|_{\eta=0} \leq 0 \tag{6.55}$$

obtemos

$$\frac{d^2V}{d\eta^2}(y^* + \theta\eta p)(\eta)^2|_{\eta=0} \leq 0 \tag{6.56}$$

Segue-se daqui que

$$\frac{d^2V}{d\eta^2}(y^* + \theta\eta p)|_{\eta=0} \leq 0 \tag{6.57}$$

Podemos reescrever essa desigualdade como

$$\frac{d}{d\eta}(\frac{d}{d\eta}(V(y^* + \theta\eta p)|_{\eta=0}) \leq 0 \tag{6.58}$$

Substituindo $\frac{V(y)}{d\eta}$ por

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [\frac{dF(t, y, y')}{dy}p(t) + \frac{dF(t, y, y')}{dy'}p'(t)]dt \leq 0 \tag{6.59}$$

Reescrevendo numa forma mais clara

$$\frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^T [F_y p(t) + F_{y'}p'(t)]dt \leq 0 \tag{6.60}$$

Tomando agora a segunda derivada,

$$\frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0} = \int_0^T [\frac{d}{d\eta}(F_y)p(t) + \frac{d}{d\eta}(F_{y'})p'(t)]dt \leq 0 \tag{6.61}$$

$$\frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0} = \int_0^T [(\frac{d}{dy}(F_y)\frac{dy}{d\eta}+\frac{d}{dy'}(F_y)\frac{dy'}{d\eta})p(t)+(\frac{d}{y}(F_{y'})\frac{dy}{d\eta}+\frac{d}{dy'}(F_{y'})\frac{dy'}{d\eta})p'(t)]dt \leq 0 \tag{6.62}$$

$$\frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0} = \int_0^T [(\frac{d}{dy}(F_y)p(t)+\frac{d}{dy'}(F_y)p'(t))p(t)+(\frac{d}{y}(F_{y'})p(t)+\frac{d}{dy'}(F_{y'})p'(t))p'(t)]dt \leq 0 \tag{6.63}$$

Agrupando segundo as potências das vizinhanças $p(t)$ e $p'(t)$,

$$\frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0} = \int_0^T [(\frac{d}{dy}(F_y)(p(t))^2 + 2\frac{d}{dy'}(F_y)p'(t))p(t) + \frac{d}{dy'}(F_{y'})(p'(t))^2]dt \leq 0 \tag{6.64}$$

O argumento da integral é uma forma quadrática que identificamos como uma forma quadrática semidefinida negativa. A representação da forma quadrática na forma matricial dá origem a uma matriz (modo de falar) semidefinida negativa, como podemos ver abaixo

$$\frac{d^2V}{d\eta^2}|_{\eta=0} = \int_0^T \left[\begin{array}{cc} p(t) & p'(t) \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} & \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} p(t) & p'(t) \end{array}\right] dt \leq 0$$

Desta forma, chegamos novamente na forma quadrática como caracterizando as condições de segunda ordem para decidir se o ponto crítico, encontrado por meio das condições de primeira ordem, é um ponto de máximo ou de mínimo. Aqui, como assumimos por hipótese que havia um máximo, obtemos a condição, que garante que o ponto crítico é um máximo, que é aquela de ser a forma quadrática semidefnida positiva ou a matriz hesiana é semidefinida positiva. Neste caso, podemos aplicar critérios, estabelecidos, associados com menores principais lideres ou com raízes, que definem quando

uma matriz é semidefinida positiva, definida positiva, definida negativa ou semidefinida negativa ou ainda indefinida. Mas, há ainda uma dificuldade com este método de obter as condições de segunda ordem. Diferentemente das condições de segunda ordem na programação clássica aqui $p'(t)$ não é uma vizinhança $p'(t)$ não é independente da vizinhança $p(t)$. Merece uma ponderação mais cuidadosa sobre a presente condição de segunda ordem.

Em adição, se tivermos a informação de que a função $F(t, y(t), y'(t))$ é uma função concava ou convexa conjunta em $(y(t), y'(t))$ podemos extrair, como condição suficiente, que o ponto crítico em questão, dado pela condição de primeira ordem expresso pela equação de Euler, é, correspondentemente, um ponto de máximo ou um ponto de mínimo.

Vamos assumir que $F(t, y(t), y'(t))$ é uma função concava em $(y(t), y'(t))$. Fazendo uso da definição de funçao concava de duas variáveis $(y(t), y'(t))$, e, de dois pontos neste espaço de estados, $(t, y(t), y'(t))$ e (t, y^t, y'^*) podemos escrever[2], Sabemos que uma função concava é tal que o valor da função multiplicada pelo incremento é maior do que o valor na função no extremo do incremento, ou seja, em termos algébricos,

$$F(t, y(t), y'(t)) - F(t, y^*, y) \leq F_y(t, y^*, y^{*'})(y - y^*) + F_{y'}(t, y^*(t), y^{*'}(t))(y' - y^*) = \tag{6.65}$$

É fácil de ver que, da construção das vizinhanças em torno da trajetória ótima, y^*, temos que $(y - y^*) = \eta p$ e $(y' - y'^*) = \eta p'$. Substituindo essas duas relações na definição de função concava acima, obtemos

$$F(t, y(t), y'(t)) - F(t, y^*, y'^*) \leq F_y(t, y^*, y^{*'})\eta p(t) + F_{y'}(t, y^*, y^{*'})\eta p'(t) \tag{6.66}$$

Integrando ambos os lados da desigualda no intervalo $tin[0, T]$, conseguimos

[2]Chiang-capítulo 4

$$\int_0^T (F(t,y(t),y'(t))-F(t,y^*,y^{*'}))dt \leq \int_0^T (F_y(t,y^*,y^{'*})\eta p(t)+F_{y'}(t,y^*,y^{*'})\eta p'(t))dt \tag{6.67}$$

$$\int_0^T F(t,y,y')dt-\int_0^T F(t,y^*,y)dt \leq \int_0^T F_y(t,y^*,y^{*'})\eta p(t)dt+\int_0^T F_{y'}(t,y^*,y^{*'})\eta p'(t)dt \tag{6.68}$$

Fazendo a integral por partes da segunda integral do lado direito

$$V(y)-V(y^*) \leq \int_0^T (F_y(t,y^*,y^{'*})p(t)dt+\Big[F_{y'}(t,y^*,y^{'*})p(t)\Big]_0^T-\int_0^T \frac{d}{dt}(F_{y'})p(t)dt \tag{6.69}$$

Como estamos trabalhando com os pontos extremos fixados, portanto, $p(0) = p(T) = 0$. Segue-se desta condição que,

$$V(y) - V(y^*) \leq \eta \int_0^T [F_y(t,y^*(t),y^{'*}(t)) - \frac{d}{dt}(F_{y'})]p(t)dt \tag{6.70}$$

Como a equação de Euler é nula, ou seja, $F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0$, podemos concluir que

$$V(y^*) \geq V(y) \tag{6.71}$$

Desta forma, se a função $F(t,y,y')$ é concava em ambas variáveis (y,y') a trajetória ótima é uma trajetória maximizadora.

6.4 Cálculo Variacional com horizonte infinito

Vamos introduzir o problema fundamental e considerar qual é o impacto de considerar não mais o horizonte finito, mas, ao contrário, um horizonte infinito, ou seja, $T = \infty$.

Seja então o caso em que $T = \infty$.

$$\begin{cases} V(y) = \int_0^{\infty} F(t, y, y')dt \\ y(0) = A \\ y(T \to \infty) = y_{\infty} \end{cases} \tag{6.72}$$

Trata-se portanto de um problema com um integral imprópria. Neste caso, o problema é abordado como tendo um extremo T dado e com $T \to \infty$

$$\begin{cases} V(y) = \int_0^{T \lim \to \infty} F(t, y, y')dt \\ y(0) = A \\ y(T \lim \to \infty) = y_{\infty} \end{cases} \tag{6.73}$$

A existência da integral imprópria impõe a necessidade da condição da convergência para o integrando[3], ou seja, para função $F(t, y(t), y'(t))$. Essa condição pode ser preenchida em alguns casos como por exemplo, quando o integrando toma a forma $F(t, y, y') = G(t, y, y') \exp -\rho t)$, mas, de tal modo que, $G(t, y, y')$ é uma função limitada, ou seja, $G(t, y, y') \leq \hat{G}$. A presença do termo $\exp(-\rho t)$ é a presença de um decaimento exponencial que faz com que o integrando $G(t, y, y') \exp(-\rho t)$ convirja rapidamente para zero garantindo a existência da integral imprópria. Essa condição formal para a existência da integral imprópria é naturalmente satisfeita para a maioria de problemas da economia que envolvem decisões intertemporais. Isso ocorre uma vez que é preciso, como condição para realizar a soma de valores econômicos em diferentes momentos do tempo que por essa razão são diferentes, de trazê-los para um mesmo instante do tempo, o que é feito por meio da taxa de desconto aplicada de modo contínuo, ou seja, por meio do termo, $\exp(-\rho t)$. Assim, como $G(t, y, y')$ é uma função limitada[4],

[3]Chiang
[4]Chiang

$$\lim T \to (\infty \int_0^T G(t, y, y') \exp(-\rho t) dt) \leq (\lim T \to \infty) \int_0^T \hat{G} \exp(-\rho t) dt = \tag{6.74}$$

Cuja integral fornece o resultado

$$(\lim T \to \infty)(\frac{\hat{G}}{\rho}(-\exp(-\rho T) + 1)) = \frac{\hat{G}}{\rho} \tag{6.75}$$

Portanto, graças ao fato de que $G(t, y, y')$ é do decaimento exponencial, obtemos, como resultado final,

$$\lim T \to \infty \int_0^T G(t, y, y') \exp(-\rho t) dt \leq \frac{\hat{G}}{\rho} \tag{6.76}$$

Outra condição para existir a integral imprópria é o decaimento polinomial para $n > 1$ quando

6.5 Equações Diferencias Ordinárias Lineares

6.5.1 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1 ordem

6.5.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2 Ordem

6.6 Cálculo variacional com restrições

Nesta parte exploramos o tema do cáculo variacional com restriçoes. Ele corresponde ao capítulo 6 do livro do Chiang no qual nos baseamos para organizar o capítulo. O objetivo é sempre de proporcionar um maior detalhamento do tema esforçando para proporcionar um enfoque mais didático.

Segundo Chiang há quatro tipos básicos de restrições seguindo aqui a mesma estrutura dos problemas de optimização estática com restrições. Desta forma, aqui também o método do multiplicador de Lagrange terá o destaque do método capaz de transformar problemas com restrições em problemas sem restrição pagando o pedágio de aumentar o número de variáveis do sistema.

6.6.1 Restrições na forma de igualdades

O padrão ou forma geral de problemas do cálculo variacional com restrições na forma de igualdades pode ser sintezado

$$\begin{cases} Max \quad V & = int_0^T F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n' \\ \text{s.a m restrições independentes tal que} \quad m < n g^1((t, y_1, \ldots, y_n) & = c_1 \\ g^2((t, y_1, \ldots, y_n) & = c_2 \\ \vdots g^m((t, y_1, \ldots, y_n) & = c_m \\ (c_1, c_2 \ldots c_n) \text{são constantes} & \\ \text{e também as condições de contorno apropriadas do problema} & \end{cases}$$

6.6.2 Restrições na forma de integrais:O problema isoperimétrico

Suponha agora que as restrições estejam na forma de uma integral adquirindo assim a forma

$$\begin{cases} Max \quad V & = int_0^T F(t, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') d \\ \text{s.a} \int_0^T G^1((t, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') dt & = k_1 \\ \vdots \int_0^T G^m((t, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') dt & = k_m \\ \text{e também as condições de contorno apropriadas do problema} & \end{cases}$$

O truque aqui é verificar que podemos reescrever essa condição na forma de integral na forma de uma equação diferencial. Isso pode ser feito se construimos a função

$$\Gamma(t) = \int_0^t G(t, y, y')dt \tag{6.77}$$

Neste caso, pegando a derivada desta função, e, observando as condições de contorno, podemos reescrever a restrição na forma de uma equação diferencial

$$\begin{cases} G(t, y, y') - \Gamma'(t) = 0 & (6.78) \\ \text{tal que} & (6.79) \\ \Gamma(0) = \int_0^0 Gdt = 0 & (6.80) \\ \Gamma(T) = \int_) ^T Gdt = k & (6.81) \end{cases}$$

Finalmente, colocamos o problema isoperimétrico na forma da maximização com restrição por meio de uma equação diferencial

$$\begin{cases} Max \quad V & = int_0^T F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dt \\ G(t, y, y') - \Gamma'(t) = 0 \end{cases}$$

Como sabemos a condição de primeira ordem é dada pela equação de Euler,

$$\frac{\partial L}{\partial y} - (\frac{d}{dt})\frac{\partial L}{\partial y = 0} \tag{6.82}$$

Neste caso, devemos observar que Γ vai aparecer como uma variável na construção da Lagrangeana do sistema ainda que apareça apenas sua primeira derivada Γ‘,

$$L(t, y, \lambda, \Gamma) = F(t, y, y') + \lambda(t)(0 - (G(t, y, y') - \Gamma'(t)) \tag{6.83}$$

Aplicando a equação de Euler para esta função com três variáveis temos três equações de Euler

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \tag{6.84}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \lambda'} = 0 \tag{6.85}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Gamma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \Gamma'} = 0 \tag{6.86}$$

Como não temos a presença da λ', o segundo membro da equação de Euler desaparece, portanto, reproduzimos a restrição,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = G(t, y, y') - \Gamma' \tag{6.87}$$

Agora, como não temos a presença de Γ o primeiro termo da última equação de Euler, desaparece, e ficamos com

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \Gamma'} = 0 \tag{6.88}$$

Resultando na equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = 0 \tag{6.89}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\lambda(t) = \text{cte} \quad \text{para t}\epsilon \quad [0, T] \tag{6.90}$$

Observando as três equações de Euler obtidas para cada das variáveis, podemos condensar o problema relevante em que a lagrangena tem a forma

$$L = F(t, y, y') - \lambda G(t, y, y') \text{com } \lambda \text{ constante} \tag{6.91}$$

Uma aplicação importante desta forma do problema isoperimétrico do cálculo variacional é o modelo Dixit-Stiglitz

O modelo de Dixit-Stiglitz

Há algumas variações nas formulações do problema. Vamos adota aquela que aparece no livro "The spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade" de Masushida, Krugman, and .

Trata-se de um modelo de uma economia de dois setores: industria e agricultura. Os autores descrevem o setor de agricultura é perfeitamente comepetitivo e produz um bem homogêneo e simples. O setor de manufatura é um setor de mercado produzindo uma grande variedade de bens diferenciados, portanto, um mercado de concorrência imperfeita. Neste modelo, o setor de agricultura é interpretado como sendo um mercado de concorrência perfeita, residual, contraparte da ação tomando parte no setor de manufatura que é imperfeitamente competitivo com retornos crescentes.Temos envolvido a atividade de consumo e a atividade de produção

Comportamento do consumidor tem a mesma função de utilidade de Cobb-Douglas para os dois tipos de bens, agricultura e manufatura.

$$U = M^{\mu} A^{1-\mu} \tag{6.92}$$

M representa um índice composto do consumo de bens manufaturados enquanto A representa o consumo do bem de agricultura. μ representa a participação do gasto dos bens de manufatura no gasto total. $m(i)$ representa o consumo de cada variedade disponível i. n é o número de variedades de bens disponíveis.M é definida por uma função utilidade elasticidade de substituição constante (CES)

$$M = [\int_0^n m(i)^{\rho} di]^{\frac{1}{\rho}} \tag{6.93}$$

Dado a renda Y, o conjunto de preços, p^{A}*paraobemdaagricultura*, e, *ospreos*p(i)*decadabem*

$$\begin{cases} MaxU = A^{1-\mu}[\int_0^n m(i)^\rho di]^{\frac{\mu}{\rho}} & (6.94) \\ \text{s.a} p^A A + \int_0^n p(i)m(i)di = Y & (6.95) \end{cases}$$

Os autores adotam a estratégia de resolver o problema em duas etapas. Na prmeira etapa, qualquer que seja o valor da composição de manufatura M, cada demanda $m(i)$ necessita ser escolhida de tal modo a minimizar o custo de atingir M. Portanto, temos caracterizado o problema da minimização

$$\begin{cases} min \int_0^n p(i)m(i)di & (6.96) \\ \text{s.a}[\int_0^n m(i)^\rho di]^{\frac{1}{\rho}} = M & (6.97) \end{cases}$$

O problema da minimização com a restrição na forma de uma integral de valor fixo tem a estrutura do problema isoperimétrico. Neste caso, aplicamos os resultados decorrentes dessa estrutura de problema.

Nesta estrutura o Lagrangeano é para ser considerado na forma

$$L = p(i)m(i) - \lambda m(i)^\rho \tag{6.98}$$

Aplicando a equação de Euler para este lagrangeano, lembrando que, neste caso,λ é constante.

$$p(i) = \rho m(i)^{\rho-1} \tag{6.99}$$

Lembrando também que

$$\int_0^n m(i)^\rho di = M^\rho \tag{6.100}$$

Chapter 7

Teoria do Controle Ótimo e o Prncípio do Máximo

O problema fundamental da teoria do controle ótimo:

$$\begin{cases} V(\vec{u}) & = & \int_{t_i}^{t_f} F(t,\vec{y},\vec{u})dt \\ \dot{\vec{y}} & = & f(t,\vec{y},\vec{u}) \\ \vec{y}(t_i) & = & \vec{y_i} \\ \vec{u} & \in & U \subset E^n \\ \vec{y} & \in & R^n \end{cases}$$

Os principais componentes de um problema de controle ótimo são, como o problema acima mostra, um sistema gerador de comportamentos.. Um tal sistema é representado por sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ou seja, por $\dot{\vec{y}} = f(t,\vec{y},\vec{u})$. O vetor $y(\vec{t})$ é a variável estado. O vetor $\vec{y} \in E^n$. O vetor $u(\vec{t}) \in E^n$ é variável controle. a variável $\vec{u}$ tem seus valores em um conjunto $\upsilon \quad \subset E^n$.

O segundo componente do problema do contgrole ótimo é a função performance ou função custo que funciona como um critério para a escolha de uma trajetória ótimo dentre as infinitas trajetórias geradas pelo sistema de equações diferenciais.A função performance ou a função custo é uma medida

de avaliação das trajetórias geradas pelo sistema e que são parametrizadas pela variável de controle u que é uma função do tempo. Essa medida associa um valor a cada trajetória parametrizada pela variável controle. A medida de avaliaçãop é o funcional V tal $V : u \to R$. Como representado acima, esse funcional é representado por uma integral que associa uma função a um número real (relacionado com a área sob a função).

$$V(\vec{u}) = \int t_i{}^{t_f} F(t, \vec{y}, \vec{u})dt + G(t_f, y_f) \tag{7.1}$$

Ambas as funções $F(t, \vec{y}, \vec{u})$ e $G(t_f, y(t_f))$ são dadas. A função F é denominada de função objetivo enquanto G é denominada de função de valor ou de custo terminal. O objetivo do problema fundamental da teoria do controle ótimo é encontrar um trajetória para a variável controle $\vec{u}$, entre todas as trajetórias possíveis da variável controle, que otimiza, maximiza ou minimiza, a função medida de performance ou funçao medida de custo $V(u)$. A construção dos fundamentos do problema exige que definamos as propriedades tanto da funçâo f quanto da função variável controle $\vec{u}$. Há aqui dois pontos de vista sobre o princípio da otimização. O ponto de vista de uma reflexão sobre quais são os princípios sob os quais a natureza funciona em que podemos assumir que as leis fundamentais da física pode ser obtidas de princípios de otimização. Além deste ponto de vista, podemos ter o ponto de vista dos engenheiros que são construtores de equipamentos e máquinas. Para estes os princípios de otimização são princípios para a construção e desenho de equipamentos e máquinas. Neste último caso, o controle tem por fim modificar o comportamento de um sistema de tal modo a fazer com que ele se comporta de uma meneira específica desejado ao longo do tempo.

Um dos exemplos mais simples que podemos apresentar é aquele de implementar um determinado comportamento para carro, como por exemplo, manter uma velocidade média em torno $80km/h$. Um conjunto de instrumentos de controle para que o carro tenha tal performance pode ser alcançado

por meio do uso da aceleração e do breque. Com esses dois instrumentos de controle podemos fazer com que um carro em uma auto estrada permaneça próxima da velocidade de $80km/h$, mesmo, com lombadas e ventos adversos. Do mesmo modo, podemos pensar em manter o movimento e a estabilidade de um lancha numa determinada velocidade em situações de mar agitado sujeita a ondas altas e ventanias. No que nos interessa um tipo de comportamento econômico desejado é o comportamento da inflação, ou da dívida pública, ou ainda da taxa de juros. Todos esses casos de determinação de um específico comportamento, descritos por quantidades como velocidades, temperatura, corrente, voltagem, pressão, volume, taxas de juros, quantidade de moeda, inflação, etc, são feitos por meio de métodos de controle. Ás vezes esses métodos são formados de sistemas de controles automáticos que funcionam sem a intervenção humana.

Desenvolvendo o exemplo da implementação de um determinado comportamento para o carro sob condições adversas como uma introdução ao conhecimento de sistemas de controle. Este exemplo é bastante adequado pois todos tem como sua propria experiência em dirigir um carro sob circunstâncias adversas e conseguir dar um determinado comportamento para o carro.

Um tipo de sistema de controle é aquele que funciona pelo recurso a uma função erro ou de diferença entre o alvo que se deseja e o resultado real. O sistema de controle envolve um procedimento de tomada de decisão que é implementado pelo controlador. O modelo do sistema de controle envolve tanto sensores como um mecanismo de feedback capaz de fazer essa avaliação comparativa do resultado real com o alvo do sistema de controle. O sistema de controle funciona buscando reduzir o erro a zero, e, portanto, trazendo o resultado real a ser equivalente ao alvo do controle.

O motorista de um carro que se propõe a manter o carro numa determinada velocidade sob circunstâncias adversas é um sistem de controle que

contem todos os elementos característicos. A velocidade pretendida é o comportamento desejado do sistema enquanto a velocidade real é o resultado do sistema. O velocimetro é um sensor, parte do mecanismo de feedback, que detecta a velocidade resultante e envia a informação para o motorista. O motorista compara a velocidade real com a velocidade que se pretende do sistema. AQ diferença ou o desvio do valor alvo da velocidade é o erro. Obtido o desvio o motorista pode fazer uso tanto da aceleração (instrumento para injetar fluxo de gasolina no motor) quando do breque para aumentar o diminuir a velocidade do carro aproximando-se do valor pretendido.

Por analogia com o controle do comportamento de um carro podemos imaginar o controle do processo ou do comportamento de crescimentode uma economia. A primeira atitude que temos para dar uma abordagem de controle para o comportamento de crescimento da economia é fazer uma modelagem do sistema econômico em questão. A modelagem do sistema econômico consiste em construir um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem relacionadas com as variáveis que descrevem o estado do sistema econôimico.A segunda atitude importante é aquela de construir uma medida para avaliar as trajetórias do sistema de equações. Essa medida é denominada de função custo ou um funcional objetivo que se propõe associar a cada trajetória do sistema de equações um número real. Obtem-se um critério de escolha de uma trajetória com a demanda de otimização desta função.

$$\begin{cases} V(\vec{u}) & = & \int_{t_i}^{t_f} F(t,\vec{y},\vec{u})dt \\ \dot{\vec{y}} & = & f(t,\vec{y},\vec{u}) \\ \vec{y}(t_i) & = & \vec{y_i} \\ \vec{u} & \in & U \subset E^n \\ \vec{y} & \in & R^n \end{cases}$$

Como nos problemas com a abordagem do cálculo variacional, e, anteriormente, nos problems com a abordagem da programação clássica buscamos

sempre as CONDIÇÕES DE PRIMEIRA E DE SEGUNDA ORDEM para a otimização das funções objetivos envolvidas. Na abordagem da teoria do controle não será diferente. Desta forma, já adiantamos as condições de primeira ordem, denominada de Princípio de Máximo, para o problema fundamental da teoria do controle ótimo:

1. Construção da função hamiltoniana:$H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$
   (a) $Max_u H(t, y, u, \lambda)$
2. As equações canônicas:
   (a) $\lambda' = \dfrac{\partial H}{\partial y'}$
   (b) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$
3. Condição de Transversalidade
   (a) $\lambda(T) = 0$

7.1 Fundamentos da condição de primeira ordem da teoria do controle ótimo denominada de Princípio de màximo

Vamos adotar, como faz Chiang cuja abordagem seguimos aqui, a tecnica de construção de vizinhanças, cujo laboratório fizemos com a programação clássica e nao linear. No laboratório da programação clássica e não linear seguindo de algum modo a abordagem do Intriligator.

Seja novamente o problema fundamental da teoria do controle ótimo. Seja n=1 no espaço eucliadiano. y é uma função continua e diferenciável por

partes. u é uma função continua por partes no interval $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} V(u) &= \int_0^T F(t,y,u)dt \\ \dot{y} &= f(t,y,u) \\ y(0) &= y_0 \\ y(T) &= y_T \quad \text{y(T) livre e T dado} \end{cases}$$

Vamos reduzir o problema a uma problema sem restrição. Para isso, recorremos à utilização do multiplicador de Lagrange.

$$\begin{cases} V(u) = & \int_0^T F(t,y,u)dt + 0 \\ 0 = & \lambda(f(t,y,u) - y') \\ y(0) = & y_0 \\ y(T) = & y_T \quad \text{y(T) livre e T dado} \end{cases}$$

Introduzindo a integral na restrição

$$\begin{cases} V(u) = & \int_0^T F(t,y,u)dt + 0 \\ 0 = & \int_0^T \lambda(f(t,y,u) - y')dt \\ y(0) = & y_0 \\ y(T) = & y_T \quad \text{y(T) livre e T dado} \end{cases}$$

Deixando de lado as condições de contorno, e, colocando a restrição no integrando, uma vez que ele iguala a zero, podemos reescrever o problema fundamental do controle na seguinte forma

$$V(u) = \int_0^T F(t,y,u)dt + \int_0^T \lambda(f(t,y,u) - y')dt \tag{7.2}$$

Reagrupando as integrais, temos

$$V(u) = \int_0^T (F(t,y,u) + \lambda(f(t,y,u))dt - \int_0^T \lambda y')dt \tag{7.3}$$

Integrando o ultimo termo por partes, com o uso de que $\int_0^T d(uv) = \int_0^T udv + \int_0^T vdu$ obtemos

$$\int_0^T \lambda y')dt = \lambda(T)y(T) - \lambda(0)y(0) - \int_0^T y\lambda' dt \tag{7.4}$$

Substituindo esse resultado na penúltima expressão, esta toma a seguinte forma,

$$V(u) = \int_0^T (F(t,y,u) + \lambda(f(t,y,u))dt - (\lambda(T)y(T) - \lambda(0)y(0) - \int_0^T y\lambda' dt) \tag{7.5}$$

Nesta etapa introduzimos a principal função da teoria do controle que é a função hamiltoniana H. Esta função é definida como

$$H(t,y,u,\lambda) = F(t,y,u) + \lambda f(t,y,u) \tag{7.6}$$

Fazendo uso desta definição e substituindo na penúltima expressão, encontramos

$$V(u) = \int_0^T H(t,y,u,\lambda)dt - \lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0) + \int_0^T y\lambda' dt \tag{7.7}$$

Reagrupando novamente os diversos componentes dessa expressão, temos a forma final desse organização do funcional objetivo do problema fundamental da teoria do controle ótimo,

$$V(u) = \int_0^T (H(t,y,u,\lambda + y\lambda')dt - \lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0) \tag{7.8}$$

Nesta etapa,assumimos a hipótese de que existe uma solução ótima para o problema, isto é, existe (u^*, y^*, T^*, y_T^*), e, procedemos a construção da

vizinhança em torno desses pontos.

$$\begin{cases} u(t) &= u^*(t) + \eta p(t) & t \in [0, T \\ y(t) &= y^*(t) + \eta p(t) & t \in [0, T] \\ T &= T^* + \eta \Delta T & t = T \\ y_T &= y_T^* + \eta \Delta y_T & t = T \end{cases}$$

Aplicando essas vizinhanças no funcional $V[u]$ com o objetivo de transformá-lo numa função de uma variável

$$V(\eta) = \int_0^{T(\eta)} (H(t, y^* + \eta p, u^* + \eta q), \lambda) + (y^* + \eta q)\lambda')dt - \lambda(T(\eta))(y(T)^* + \eta \Delta y(T) + \lambda(0)y(0) \tag{7.9}$$

Decompondo a integral em dois domínios $[0, T^*]$ e $[T^*, T^* + \eta\Delta]$, podemos reescrever essa expressão como

$$\begin{cases} V(\eta) = \int_0^{T^*} (H(t, \overbrace{y^* + \eta p}^{y}, \overbrace{u^* + \eta q)}^{u}, \lambda) + \overbrace{(y^* + \eta q)}^{y} \lambda')dt \\ + \int_{T^*}^{T^* + \eta \Delta T} (H(t, \overbrace{y^* + \eta p}^{y}, \overbrace{u^* + \eta q)}^{u}, \lambda) + \overbrace{(y^* + \eta q)}^{y} \lambda')dt \\ -\lambda(T(\eta))(y(T)^* + \eta \Delta y(T)) + \lambda(0)y(0) \end{cases}$$

A segunda integral que tem por extremos $[T^*, T^* + \eta\Delta T]$ é uma integral num intervalo infinitesimal de largura $\eta\Delta T$. Esta área corresponde à area sob a curva definida pelos extremos mencionados $[T^*, T^* + \eta\Delta T]$. Desta forma, ela é a área de um retângulo calculada com o valor do integrando no extremo T^* multiplicado pela largura do intervalo $\eta\Delta T\cdot$ Com esta interpretação em mente, reescrevemos a expressão anterior do seguinte modo,

$$\begin{cases} V(\eta) = \int_0^{T^*} (H(t, \overbrace{y^* + \eta p}^{y}, \overbrace{u^* + \eta q}^{u}), \lambda) + \overbrace{(y^* + \eta q)}^{y} \lambda')dt \\ +[H(t, \overbrace{y^* + \eta p}^{y}, \overbrace{u^* + \eta q}^{u}), \lambda) + \overbrace{(y^* + \eta q)}^{y} \lambda']_{T^*} dt \\ -\lambda(T(\eta)) \overbrace{(y(T)^* + \eta \Delta y(T))}^{y} + \lambda(0) y(0) \end{cases}$$

Pela construção da vizinhança com o parâmetro η transformamos o problema fundamental do controle num problema depende de uma única variável η seguindo a mesma estratégia de solução de problema adotada na otimização clássica assim como no cálculo variacional.

Aplicamos à expressão acima a condição de primeira ordem para encontrar um ótimo, ou seja, $\frac{dV(\eta)}{d\eta} = 0$. Como a integral tem extremos que são 0 e T^* que assumimos existir, segue-se que podemos, com outros cuidados adicionais, trocar a integral pela derivada. Portanto,

$$\begin{cases} \frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^{T^*} \frac{d}{d\eta}(H(t, \overbrace{y^* + \eta p}^{y}, \overbrace{u^* + \eta q}^{u}, \lambda)) + \frac{d}{d\eta}(\overbrace{(y^* + \eta q)}^{y})\lambda')dt \\ +[H(t, y(T^*), u(T^*, \lambda) + y(T^*)\lambda'(T^*)]\frac{d}{\eta}(\eta \Delta T) \\ -\frac{d}{d\eta}(\lambda(T(\eta)))y(T) + \lambda(T\eta))\frac{d}{d\eta}(y(T(\eta)) = 0 \end{cases}$$

Derivando os componentes desta expressão, obtemnos

$$\begin{cases} \frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^{T^*} (\frac{d}{d\eta}(H(t, \overbrace{y^* + \eta p}^{y}, \overbrace{u^* + \eta q}^{u}, \lambda)) + q\lambda')dt \\ +[H(t, y(T^*), u(T^*), \lambda) + y(T^*)\lambda'(T^*)]\Delta T \\ -\frac{d\lambda(T)}{dT}\frac{dT}{d\eta}y(T) + \lambda(T)\Delta y_T = 0 \end{cases}$$

Realizando as derivadas

$$\begin{cases} \frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^{T^*} ((\frac{d}{dy}H(t, y, u, \lambda)\frac{dy}{d\eta} + \frac{d}{du}H(t, y, u, \lambda)\frac{du}{d\eta}) + q\lambda')dt \\ +[H(t, y(T^*), u(T^*), \lambda) + y(T^*)\lambda'(T^*)]\Delta T \\ -\lambda'(T)\Delta T y(T) + \lambda(T)\Delta y_T = 0 \end{cases}$$

Concluindo a derivação e separando os termos dos colchetes em dois, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^{T^*}((\frac{d}{dy}H(t,y,u,\lambda)p + \frac{d}{du}H(t,y,u,\lambda)q) + q\lambda')dt \\ +[H(t,y,u,\lambda)]_T\Delta T + y(T)\lambda'(T)\Delta T \\ -\lambda'(T)\Delta T y(T) + \lambda(T)\Delta y_T = 0 \end{cases}$$

Cancelando o antepenultimo e o penúltimo termo, e reunindo os mesmos coeficientes sob a integral, chegamos a uma forma final para a CONDIÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM do problema fundamental

$$\begin{cases} \frac{dV(\eta)}{d\eta} = \int_0^{T^*}(\frac{d}{dy}H(t,y,u,\lambda) + \lambda')pdt + \int_0^T \frac{d}{du}H(t,y,u,\lambda)qdt \\ +[H(t,y,u,\lambda)]_T\Delta T + \lambda(T)\Delta y_T = 0 \end{cases}$$

O problema fundamental com os recursos da técnica de construção de vizinhanças pode ser organizada em quatro componentes, o primeiro componente é aquele do coeficiente da vizinhança $p(t)$, o segundo componente é o coeficiente da vizinhança $q(t)$, o terceiro componente é o coeficiente da vizinhança ΔT enquanto o quarto e último componente é o coeficiente da vizinhança descrita por Δy_T

Considerando que tratamos com o problema fundamental com n=1

$$\begin{cases} V(u) = & \int_0^T F(t,y,u)dt + 0 \\ y' = & \lambda f(t,y,u) \\ y(0) = & y_0 \\ y(T) = & y_T \quad \text{y(T) livre e T dado} \end{cases}$$

Combinando as restrições do problema fundamental com as vizinhanças $\forall p(t) \quad t \in [0,T]$, $\forall \quad q(t) \in [0,T]$, $\forall \quad \Delta y(T)$, e, $\forall \Delta T$ segue-se que de T fixo $\Delta T = 0$ e de $y(T)$ livre $\Delta y(T)$ é qualquer.

Portanto, como $q(t)$ é qualquer segue-se que o coeficiente deste termo, no problema fundamental com as vizinhanças, é

$$\frac{dH}{du} = 0 \quad \forall t \in [0, T] \tag{7.10}$$

Como $p(t)$ é qualquer, segue-se que o coeficiente deste termo

$$\frac{dH}{dy} + \lambda' = 0 \quad \forall t \in [0, T] \tag{7.11}$$

Como a condição do problema fundamental é que $y(T)$ é livre segue-se que $\Delta y(T)$ é livre, portanto, seu coeficiente, para garantir que $\frac{dV}{d\eta} = 0$, deve se anular, ou seja,

$$\lambda(T) = 0 \tag{7.12}$$

O mesmo não acontece com o coeficiente de ΔT, pois, no problema fundamental T é fixo, e, neste caso,$\Delta T = 0$, fazendo com todo o termo se anula, ou seja, $[H(t, y, u, \lambda)]_T \Delta T = 0$. Desta forma, por meio da técnica de construção de vizinhanças em torno do ponto ótimo, obtemos as quadtro condições que formam o PRINCÍPIO DE MÁXIMO que é a expressão da CONDIÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM do problema fundamental do controle ótimo.

1. Construção da função hamiltoniana:

   (a) $H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$

   (a) $Max_u \quad H(t, y, u, \lambda)$

2. As equações canônicas ou equações do movimento

   (a) $\lambda' = \dfrac{\partial H}{\partial y'}$

   (b) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$

3. Condição de Transversalidade

   (a) $\lambda(T) = 0$

No caso em que o problema fundamental tivesse a restrição no valor da variável estado, ou seja, se, $y(T)$ fosse fixo, então,

$$\begin{cases} V(u) = & \int_0^T F(t,y,u)dt + 0 \\ y' = & \lambda f(t,y,u) \\ y(0) = & y_0 \\ y(T) = & y_T \quad \text{y(T) é dado e T livre} \end{cases}$$

As condições de primeira ordem, ou seja, O PRINCÍPIO DE MÁXIMO,

1. Construção da função hamiltoniana:$H(t,y,u,\lambda) = F(t,y,u)+\lambda f(t,y,u)$

   (a) $Max_u H(t,y,u,\lambda)$

2. As equações canônicas:

   (a) $\lambda' = \dfrac{\partial H}{\partial y'}$

   (b) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$

3. Condição de Transversalidade

   (a) $[H]_T = 0$

Finalmente, se o problema tem ambas as restrições liberadas assumindo a forma,

$$\begin{cases} V(u) = & \int_0^T F(t,y,u)dt + 0 \\ y' = & \lambda f(t,y,u) \\ y(0) = & y_0 \\ y(T) = & y_T \quad \text{y(T) é livre e T livre} \end{cases}$$

1. Construção da função hamiltoniana
   (a) $H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$
   (a) $Max_u \quad H(t, y, u, \lambda)$
2. As equações canônicas:
   (a) $\lambda' = \dfrac{\partial H}{\partial y'}$
   (b) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$
3. Condições de Transversalidade
   (a) $[H]_T = 0$
   (b) $\lambda(T) = 0$

7.2 Sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de 1 ordem

Chapter 8

Aplicações

8.1 Modelo de Solow- Ramsey: sem tecnologia

Uma das principais aplicações da teoria do controle ótimo é a solução do modelo de Solow-Swan como uma proposta de explicação do crescimento econômico.

O modelo de Solow-Swan é um modelo neoclássico da teoria do crescimento econômico desenvolvido a partir do modelo de Solow. A característica é ter uma função de produção descrita por $Y = F(K, L)$ assumida como uma função homogênea de grau um ou linear em ambas as variáveis.

Nesta parte do manual todas as informações sobre modelos de crescimento econômico foram extraídos da literatura vigente, particularmente, dos artigos originais, dos livros do Blanchard, Carlin, Stone, Chiang, Intriligator, Chow, Blanchard-Fisher que serão devidamente mencionados na bibliografia, não havendo aqui nenhuma possibilidade de originalidade, mas, apenas uma tentativa de apresentar de forma mais didática os modelos tratados. Tentamos demonstrar e apresentar os detalhes de passagens nas demonstrações que muitos autores consideram pressupostos.

O modelo de Solow para o crescimento econômico introduz é o primeiro

modelo de crescimednto econômico e que serviu de paradigma para os demais modelos de crescimento econômico, particularmente, o modelo de Cass, Ramsey e Koopmans. O modelo de Solow introduz uma dimensão dinâmica na teoria neoclássica da economia iniciada com a teoria do equilíbrio geral de Walras. A teoria do equilíbrio geral de Walras é uma abordagem estática da economia de mercado, prticularmente, da estrutura de mercado de competição perfeita. Ele particularmente trata do problema da existência e unicidade do equilíbrio que será retomada em bases mais sólidas e rigorosas com a abordagem de Arrow Debreu. O modelo de Solow para o crescimento econômico é um modelo que pretende descrever qual é a alocação eficiente do recurso escasso, descrito pela produção de um país, entre seus fins alternativos que são o consumo presente dos indivíduos e o investimento para garantir o consumo futuro.

O modelo de Solow constitui de duas equações: a função de produção e o equação de acumulação do capital é uma equação diferencial. Ela é a equação fundamental da teoria neoclássica do crescimento. Essa equação formará o núcleo do sistema de controle do modelo de Solow abordado com os instrumentos da teoria do controle ótimo.

8.1.1 A função de produção

As empresas, que transformam os fatores de produção em produto, são descritas por uma função denominada de função de produção.

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \tag{8.1}$$

O argumento da função é dado pelos fatores de produção capital, $K(t)$, e trabalho, $L(t)$. A função F descreve a tecnologia que transforma os fatores de produção no produto. A função de produção, no modelo de Solow é assumida como um elemento exógeno deste modelo de crescimento econômico tanto na abordagem estática como dinãmica. Uma hipótese neoclássica importante é

que o mercado de fatores é considerado um mercado de competição perfeita assim como o mercado do produto. Portanto, tanto o preço do produto quanto os preços dos fatores são considerados como dados do ponto de vista das empresas. A função de produção pode ser considerada como resultado de uma agregação das diversas funções de produção descrevendo as empresas da economia.

Propriedades da função de produção:

1. A função de produção tem a propriedade da homogeneidade de grau 1 ou retornos constantes de escala, ou seja,

   $\lambda Y = \lambda F(K(t), L(t)) = F(\lambda K(t), \lambda L(t))$

2. A função de produção pode ser escrita, fazendo $\lambda = \frac{i}{L}$, em termos per capita como $y = \phi(k)$ onde $y = \dfrac{Y}{L}$ e $k = \dfrac{K}{L}$

3. A função de produção tem a propriedade que o produto marginal do capital e o produto marginal do trabalho são positivos ou seja,

   $PM_L = \left(\dfrac{\partial F)}{\partial L}\right)_K > 0$ e $PM_K = \left(\dfrac{\partial F}{\partial K}\right)_L > 0$

4. A função de produção é uma função continuamente diferenciável ao menos até segunda ordem.

5. A função de produção tem a propriedade dos retornos marginais decrescentes, ou seja, $\dfrac{\partial F}{\partial L} < 0$ assim como $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0$

6. A função de produção tem a propriedade que seus produtos marginais do trabalho e do capital satisfazem as condições de Inada.

7. Uma função de produção diferenciável $\phi(k) : R_+ \to R_+$ é dita satisfazer as condições de Inada se

(a) $\lim_{k\to 0} \phi_k(k) = \infty$

(b) $\lim_{k\to \infty} \phi_k(k) = 0$

8. As condições de Inada implicam as condições fracas de Inada. Uma função de produção diferenciável $\phi(k) : R_+ \to R_+$ é dita satisfazer as condições fracas de Inada se

(a) $\lim_{k\to 0} \phi_k(k) = \infty$,

(b) $\lim_{k\to \infty} \phi_k(k) = 0$

(c) $\phi(0) = 0$

(d) $\phi(k \to \infty) \to \infty$

8.1.2 A equação da acumulação do capital-A equação fundamental do movimento de Solow

Assumindo o mercado de bens e serviços como um mercado de competição perfeita temos inicialmente uma importante decisão a ser feita

$$Y(t) = C(t) + I(t)_{gross} \tag{8.2}$$

Temos que o investimento em questão é o investimento bruto, formado de dois termos

$$I_{gross} = \frac{dK(t)}{dt} + \delta.K \tag{8.3}$$

Substituindo essa equação na anterior, obtemos

$$Y = C + \dot{K} + \delta.K \tag{8.4}$$

Transformando em variáveis per capita, ou seja, dividindo ambos os lados por L, obtemos,

$$\frac{Y}{L} = \frac{C}{L} + \frac{\dot{K}}{L} + \frac{\delta.K}{L} \tag{8.5}$$

Segue-se, portanto, pelas simplificações, que

$$y = c + \frac{\dot{K}}{L} + \delta.k \tag{8.6}$$

Onde $k = \frac{K}{L}$ e $y = \frac{Y}{L}$.

$$\frac{dk}{dt} = \dot{k} = \frac{K}{L} = \frac{\frac{dK}{dt}L - K\frac{dL}{dt}}{L^2} \tag{8.7}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L} \tag{8.8}$$

Como definimos $\frac{\dot{L}}{L} = n$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk \tag{8.9}$$

Segue-se que

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk \tag{8.10}$$

Substituindo na equação acima obtemos a equação neoclassica fundamental da acumulação do capital

$$y = c + \dot{k} + nk\delta.k \tag{8.11}$$

Finalmente,

$$\dot{k} = y - c - (n + \delta)k \tag{8.12}$$

Com isso, chegamos na forma final para a equação fundamental neoclassica que é uma equação de acumulação do capital.

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n + \delta)k \tag{8.13}$$

Essa equação pode ser reescrita na forma de um sistema de controle, que é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com k sendo a variável estado e c a variável de controle.

$$\dot{k} - \phi(k) + (n + \delta)k = c \tag{8.14}$$

Essa equação pode ser solucionada produzindo muitas trajetórias possíveis. Supondo que um governo central ou um indivíduo pode escolher qualquer consumo c, ou poupança, no caso, $s = \phi(k) - c$ coloca-se a questão da decisão de qual trajetória ele deveria escolher. Aqui está um das características do modelo de Ramsey Cass e Koopmans, ou seja, introruzir fundamentos microeconômicos no modelo de Solow. Seguindo essa linha podemos assumir que tanto o objetivo do governo quando do indivíduo é maximizar o bem estar identificado aqui com a maximização do consumo. Para desenvolver o quadro no qual essa escolha deve ser feita é preciso introduzir uma medida de performance ou uma função custo que associaria a cada trajetória um número real. Vamos assumir uma função de utilidade do consumo do indivíduo. Vamos assumir que se trata de uma sociedade e que a escolha é feita por um governo central. Desta forma ele deve levar em conta a utilidade de todos os membros da sociedade que podemos escrever como $L(t)U(c(t))$. Nesta expressão está pressuposto que as utilidades dos indivíduos são independentes e somáveis. Contudo,o interesse envolve também em encontrar a soma dessas utiliidades ao longo de uma determinada trajetória. Mas, não se pode somar utilidades diferentes que é o que elas são quando consideradas em instantes diferentes do tempo. Esse problema pode ser resolvido utilizando o momento presente como um sistema de referência, e trazendo todas as utilidades consideradas em momentos diferentes do presente para o presente. Isso pode ser feito por meio de uma taxa de desconto. Assim, finalmente, para calcular o

valor presente da trajetória das utilidades do consumo de um indivíduo no tempo chegamos à expressão $L(t)U(c(t))\exp(-\rho t)$ enquanto para calcular a soma das utilidades de todos os indivíduos devemos fazer

$$\int_0^\infty L(t)U(c)\exp(-\rho t)dt \tag{8.15}$$

Assumindo que a taxa de crescimento da população que identificamos com a população trabalhadora é constante e dado por $\dfrac{\dot{L}}{L} = n$, reescrevemos a expressão acima

$$\int_0^\infty L_0\exp(nt)U(c)\exp(-\rho t)dt = \int_0^\infty U(c(t))\exp(-(\rho-n)t)dt \tag{8.16}$$

Fizemos $L_0 = 1$ na expressão acima. Juntando a medida de performance, representando por um funcional objetivo, com a equação fundamental da acumulação do capital montamos o modelo de Solow com a abordagem da teoria do controle que é o modelo de Cass, Koopmans e Ramsey.

$$\begin{cases} Max_c \int_0^\infty U(c(t))\exp(-(\rho-n)t)dt \\ \textbf{s.a} \quad \dot{k} = \phi(k) - c - (n+\delta)k \\ k(0) = k_0 \\ u \in U \\ 0 \leq c \leq \phi(k) \end{cases}$$

Aplicando as condições de primeira ordem para o problema da teoria do controle ótimo ou seja o Princípio do Máximo, começamos pela construção da hamiltoniana do sistema. Lembrando que k é a variável estado, c é a

variável de controle e λ é a variável do-estado.

$$\begin{cases} H(t,c,k,\lambda) = U(c)\exp(-rt) + \lambda(\phi(k) - c - (\delta+n)k \\ Max_c \quad H = \dfrac{\partial H}{\partial c} = \dfrac{\partial U}{\partial c}\exp(-rt) - \lambda = 0 \\ \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial k} = -\lambda(\dfrac{d\phi(k)}{dk} - (\delta+n)) \\ \\ \dot{k} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = \phi(k) - c - (\delta+n)k \\ \\ \lambda(\infty) = 0 \quad \textbf{se } y_\infty \textbf{ é livre} \quad \text{e} \quad [H]_\infty = 0 \quad \textbf{pois} \quad T \to \infty \end{cases}$$

Obtemos assim três equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial c}\exp(-rt) = \lambda \\ \dot{\lambda} = -\lambda(\dfrac{d\phi(k)}{dk} - (\delta+n)) \\ \dot{k} = \phi(k) - c - (\delta+n)k \end{cases}$$

O objetivo é encontrar duas equações canônicas, sistema de equações diferenciais de primeira ordem que sejam autônomas, como descreve o princípio de maximo da forma

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k,c) \\ \dot{c} = g(k,c) \end{cases}$$

Precisamos então eliminar a presença do tempo nas três equações e transformá-las em duas equações envolvendo, por exemplo, as variáveis estado e controle que formam o espaço importante do modelo de solow com fundamentos microeconômicos.

Uma técnica para eliminar a presença do t e transformar as equações em equações autônomas é multiplicar as duas primeiras equações por $\exp(rt)$ e fazer uma mudança de variáveis com $H_c = \exp(rt)H$e $\theta = \lambda\exp(rt)$. Tomando a derivada desta última expressaão obtemos

$$\dot{\theta} = \dot{\lambda}\exp(rt) + r\lambda\exp(rt) = \dot{\lambda}\exp(rt) + r\theta \tag{8.17}$$

Multiplicando ambos os lados da equação da hamiltoniana por $\exp(rt)$, obtemos

$$H_c = \exp(rt)H = U(c)+\exp(rt)\lambda(\phi(k)-c-(\delta+n)k) = U(c)+\theta(\phi(k)-c-(\delta+n)k)$$

Do mesmo modo, multiplicando ambos os lados da equação canônica para λ'.

$$\exp(rt)\dot{\lambda} = -\exp(rt)\lambda(\phi_0(k) - (\delta + n))$$

Fazendo uso das mudanças de variáveis, inserindo elas nas condições de primeira ordem acima e procedendo com manipulações algébricas,obtemos um sitema de três equações autônomas,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_c}{\partial c} = \dfrac{dU}{dc} - \theta = 0 \\ \dot{\theta} = -\theta(\phi_k(k) - (\delta + n + r) \\ \dot{k} = \phi(k) - c - (\delta + n)k \end{cases}$$

Finalmente, pretendemos reduzir o sistema de três equações em duas equações autônomas. Para isso vamos eliminar a variável θ das duas primeiras equações. Fazemos

$$\dot{\theta} = \frac{dU}{dc}\frac{dc}{dt} = \frac{dU}{dc}\dot{c} = U'(c)\dot{c} \tag{8.18}$$

Substituindo acima, obtemos finalmente um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem nas variáveis k e C autônomas.

$$\begin{cases} \dot{c} = -\dfrac{U'(c)}{U''(c)}(\phi_k(k) - (\delta + n + r)) \\ \dot{k} = \phi(k) - c - (\delta + n)k \end{cases}$$

Ainda que não há uma forma funcional tanto para as funções $\phi(k)$ quanto para $U(c)$, podemos avaliar se há ponto crítico e se este ponto crítico é estável ou instável a partir das propriedades das funções $\phi(k)$ e $U(c)$. Fazendo $\dot{c} = 0$ e $\dot{k} = 0$. Ainda que, dados os pressupostos do problemas, estamos diante de uma sistema de equações diferenciais nao lineares, podemos linearizar tal sistema e inferir a estabilidade ou instabilidade do sistema nao linear a partir de sua forma linearizada. Com o objetivo de obter a forma linear do sistema de equações diferenciais canônicas não linear e autônoma do problema seguimos a técnica da expansão de Taylor em torno do ponto de crítico (c^*, k^*).

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k,c) = f(k^*,c^*) + \dfrac{\partial f}{\partial k}|_{k^*,c^*}(\Delta k) + \dfrac{\partial f}{\partial c}|_{k^*,c^*}(\Delta c) \\ \dot{c} = g(k,c) = g(k^*,c^*) + \dfrac{\partial g}{\partial k}|_{k^*,c^*}(\Delta k) + \dfrac{\partial g}{\partial c}|_{k^*,c^*}(\Delta c) \end{cases}$$

Desta forma, podemos escrever o sistema acima na forma matricial, levando em conta que (k^*, c^*) é o ponto crítico

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial k} & \dfrac{\partial f}{c} \\ \dfrac{\partial g}{\partial k} & \dfrac{\partial g}{\partial c} \end{bmatrix}_{(k^*,c^*)} \begin{bmatrix} \Delta k \\ \Delta c \end{bmatrix}$$

Temos assim a jacobiana do sistema de equações diferenciais lineares dado por

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial k} & \dfrac{\partial f}{c} \\ \dfrac{\partial g}{\partial k} & \dfrac{\partial g}{\partial c} \end{bmatrix}_{(k^*,c^*)}$$

Construindo os componentes do Jacobiano do sistema de equações diferenciais que representa o sistema de controle, obtemos

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}|_{(k^*,c^*)} = \phi'(k) - (\delta + n) = r \\ \frac{\partial \dot{k}}{\partial c}|_{(k^*,c^*)} = -1 \\ \frac{\partial \dot{c}}{\partial k}|_{(k^*,c^*)} = -\frac{U'(c)}{U''(c)}(\phi_{kk}(k)) < 0 \\ \frac{\partial \dot{c}}{\partial c}|_{(k^*,c^*)} = 0 \end{array}\right.$$

Construindo a matriz jacobiana com esses valores obtemos

$$J = \left[\begin{array}{ll} r & -1 \\ -\frac{U'(c)}{U''(c)}(\phi_{kk}(k) & 0 \end{array}\right]_{(k^*,c^*)}$$

Uma das técnicas para avaliar a estabilidade do sistema é o conhecimento das raízes da jacobiana do sistema de equações diferenciais que representa o sistema de controle. Para obter as raízes, fazemos

$$|J| = \left[\begin{array}{ll} r-\lambda & -1 \\ -\frac{U'(c)}{U''(c)}(\phi_{kk}(k) & 0-\lambda \end{array}\right]_{(k^*,c^*)}$$

$$|J| = (r-\lambda)(-\lambda) - \frac{U'(c)}{U''(c)}(\phi_{kk}(k) \tag{8.19}$$

$$|J| = (\lambda)^2 - r\lambda - \frac{U'(c)}{U''(c)}(\phi_{kk}(k) \tag{8.20}$$

$$\lambda = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4\frac{U'(c)}{U''(c)}(\phi_{kk}(k))}}{2} \tag{8.21}$$

Como o discriminante é positivo,$\Delta = r^2 + 4\frac{U'(c)}{U''(c)}(\phi_{kk}(k)) > 0$, dado as propriedades das funções $\phi(k)$ e $U(c)$, obtemos duas raízes reais com sinais

opostos. Portanto, estamos diante de uma solução de ponto de sela. Essa informação já estava imbutida no determinante |J| do jacobiano. Uma vez que o determinante |J|<0, portanto, que o produto das raízes deve ser negativo, do qual se segue que as raízes tem sinais opostos. A solução de ponto de sela diz que há duas trajetórias dos quais uma delas tem fluxo emergente do ponto crítico enquanto a outra tem fluxo convergente. A literatura reconhece que esse ramo da solução de ponto de sela é um ramo que apresenta estabiliade uma vez que a trajetória converge para o ponto crítico, e, neste caso, apresenta uma estabilidade assintótica. Desta forma, as condições e pressupostos do modelo de Solow Ramsey garante que existe uma trajetória estável convergindo para o ponto crítico. Se os valores iniciais (k_0, c_0) da sociedade são tais que eles caem sobre essa trajetória estável então a dinâmica dessa sociedade é tal que ela será conduzida a uma situação de equilíbrio steady state (c^*, k^*) no qual $(\dot{k} = 0, \dot{c} = 0)$

Um outro modo de mostrar essa estabilidade do ponto crítico é por meio do método do diagrama de fase que protelamos para outro momento.

8.2 Modelo de Solow com tecnologia

8.3 Modelo de dois setores

Vamos continuar trabalhando a teoria do crescimento econômico cujo objetivo é encontrar as trajetórias dinâmica das variáveis macroeconômicas.Ele tem foco apenas nas tendências de longo alcance.VAmos assumir aqui a diferença que se encontra implicita nos trabalhos de Schumpeter para o qual uma coisa é teoria do desenvolvimento economico submetido a um tipo de regime de acumulação outra coisa é a teoria do crescimento economico que está submetido a um outro regime econômico.

O modelo abordado aqui é do crescimento de dois setores. Faremos uso

intensivo enfoque desenvolvido por Intriligator[1], . Como o modelo de crescimento econômico de Solow Ramsey trata de um único setor o modelo de dois setores pode ser considerado uma generalização do modelo de Solow Ramsey. Introduzir dois setores é introduzir duas funções de produção produzindo dois tipos de produtos. Cada técnica diferente produz um dos dois produtos. Um dos setores produzira um bem de investimento homogêneo, $Y_I(t)$, enquanto o outro produz um bem de consumo homogêneo $Y_c(t)$. Como não podemos somar produção de consumo com produção de bens de investimento vamos considerar a produção de bens de investimento avaliado em termos de bens de consumo, $pY_I(t)$ com p sendo o preço do bem de investimento em termos de bens de consumo. Desta forma, temos a relação

$$Y(t) = Y_C + pY_I(t) \tag{8.22}$$

Do mesmo modo que no modelo de um único setor, cada setor produz seu produto com o uso de dois fatores de produção que são, o capital K e o trabalho L.

$$Y_i = F_i(K_i, L_i), \text{tal que} \quad i = 1, 2 \tag{8.23}$$

Onde $(K_i(t), L_i(t))$ é o capital e o trabalho empregados no setor i. Cada dessas funções de produção obtedecem as condições estipuladas. As funções de produção não exibem externalidade no sentido que a produção de um setor não depende da produção ou dos inputs do outro setor.

Os fatores de produção são homogêneos e podem se deslocar livremente entre os setores

$$\begin{cases} K_C(t) + K_I(t) = K(t) & (8.24) \\ L_C(t) + L(t) = L(t) & (8.25) \end{cases}$$

[1] Intriligator

Onde $(K(t), L(t))$ são o estoque de capital agregado e o força de trabalho total disponível no tempo t.

O estoque de capital total é aumentado pelo investimento e sujeito a depreciação a uma taxa constante δ

$$\dot{K} = Y_I - \delta.K \tag{8.26}$$

A força de trabalho cresce a uma taxa constante n

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \tag{8.27}$$

Como é mais adequado para aplicações e avaliações práticas, o modelo deve ser reformulado em termos de trabalhadores per capita.Como as funções de produção tem a propriedade dos retornos constantes a escala, podemos escrever

$$\begin{cases} \dfrac{Y_C}{L_C} = F_C(\dfrac{K_C}{L_C}, 1) = f_C(k_C) & (8.28) \\ \dfrac{Y_I}{L_I} = F_I(\dfrac{K_I}{L_I}, 1) = f_I(k_I) & (8.29) \end{cases}$$

Onde (k_C, k_I) são os níveis setoriais de capital per capita

$$\begin{cases} k_i = \dfrac{K_i}{L_i} \geq 0 \qquad \text{i=C,I} & (8.30) \\ l_i = \dfrac{L_i}{L} > 0 \qquad \text{i=C, I} & (8.31) \\ l_C + l_I = 1 & (8.32) \end{cases}$$

Consumo e investimento per capital são dados por

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_C = \dfrac{Y_C}{L} = \dfrac{Y_C}{L_C}\dfrac{L_C}{L} = \dfrac{L_C}{L} f_C(k_c) = l_C f_C(k_C) & (8.33) \\ y_I = \dfrac{Y_I}{L} = \dfrac{Y_I}{L_I}\dfrac{L_I}{L} = \dfrac{L_I}{L} f_I(k_I) = l_I f_I(k_I) & (8.34) \end{array}}$$

Como

$$Y = Y_C + pY_I \tag{8.35}$$

$$\frac{Y}{L} = \frac{Y_C}{L} + p\frac{Y_I}{L} \tag{8.36}$$

$$\frac{Y}{L} = \frac{Y_C}{L_C}.\frac{L_C}{L} + p\frac{Y_I}{L_I}.\frac{L_I}{L} \tag{8.37}$$

Portanto

$$\frac{Y}{L} = f_c(k_C).l_C + pf_I(K_I)l_I = y_C + py_I \tag{8.38}$$

O capital agregado

$$k = \frac{K}{L} = \frac{K_C + K_I}{L} = \frac{L_C}{L}.\frac{K_C}{L_C} + \frac{L_I}{L}\frac{K_I}{L_I} = k_C.l_C + k_I l_I \tag{8.39}$$

Vamos, agora, obter a equação de acumulação do capital em termos per capita

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{Y_I}{L} - \delta.\frac{K}{L} \tag{8.40}$$

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{Y_I}{L_I}\frac{L_I}{L} - \delta k = f_I(k_I).l_1 - \delta k \tag{8.41}$$

Fazendo

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} = \frac{\dot{K}.L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - k.\frac{\dot{L}}{L} \tag{8.42}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - k.n \tag{8.43}$$

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + n.k \tag{8.44}$$

Portanto

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + n.k = \frac{Y_I}{L} - \delta.\frac{K}{L} \tag{8.45}$$

Assim,

$$\dot{k} = l_I f_I(k_I) - n.k - \delta.k = y_I - (n+\delta).k \tag{8.46}$$

$$\dot{k} = y_I - (n+\delta).k \tag{8.47}$$

ou

$$\dot{k} = y_I - \lambda.k \tag{8.48}$$

Com os recursos estabelecidos acima o objetivo agora é a CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA DO CRESCIMENTO ECONÔMICO ÓTIMO para o modelo de crescimento de dois setores com um horizonte de tempo terminal infinito e utilidade marginal constante.

O problema consiste em escolher as trajetória ótimas para a distribuição do trabalho (l_C, l_I) e do capital (k_C, k_I) entre os dois setores consumo e investimento.

$$\begin{cases} maxW = \int_{t_0}^{\infty} \exp(-\rho(t-t_0).y_C(k_C(t))dt & (8.49) \\ \dot{k} = y_I - \lambda k & (8.50) \\ k(t_0) = k_0 & (8.51) \\ y_C = l_C f_C(k_C) & (8.52) \\ y_I = l_I f_I(k_I) & (8.53) \\ l_I + l_C = 1 & (8.54) \\ k = k_I l_I + k_C l_C & (8.55) \\ l_I \geq 0 & (8.56) \\ l_C \geq 0 & (8.57) \\ k_I \geq 0 & (8.58) \\ k_C \geq 0 & (8.59) \\ l_I \quad , \quad l_C, \quad k_C \text{t} \quad k_I \quad \text{são funções contínuas por partes} & (8.60) \end{cases}$$

No problema definido acima k é a variável estado enquanto l_I, l_C, k_I, e, k_C são as variáveis de controle. As funções (f_C e f_I) são estritamente côncovas. Os mercados de fatores e de produto são considerados de competição perfeita. Se, além disso, w e r são os preços dos fatores de produção, trabalho e capital, entao, da maximização de lucro, temos

$$r = \frac{\partial Y_C}{\partial K_C} = \frac{\partial F(K_C, L_C)}{\partial K_C} = \frac{\partial (L_C f_C)}{\partial K_C} = L_C \frac{\partial f_C}{\partial K_C} \tag{8.61}$$

Portanto, desenvolvendo com mais detalhe, obtemos

$$r = L_C \frac{\partial f_C(k_C)}{\partial k_C} . \frac{\partial k_C}{\partial K_C} = L_C . f'_C(k_C) . \frac{1}{L_C} = f'_C(k_C) \tag{8.62}$$

$$r = p\frac{\partial Y_I}{\partial K_I} = p\frac{\partial F(K_I, L_I)}{\partial K_I} = p\frac{\partial (L_I f_I)}{\partial K_I} = pL_I \frac{\partial f_I}{\partial K_I} \tag{8.63}$$

$$r = pL_I \frac{\partial f_I(k_I)}{\partial k_I} \frac{\partial k_I}{\partial K_I} = L_I.f'_I(k_I).\frac{1}{L_I} = pf'_I(k_I) \tag{8.64}$$

Do mesmo modo, para w, que iniciamos com sua definição,

$$w = \frac{\partial Y_C}{\partial L_C} = \frac{\partial F(K_C, L_C)}{\partial L_C} = \frac{\partial (L_C f(k_C)}{\partial L_C} = f_C(k_C) + L_C \frac{\partial f_C(k_C)}{\partial L_C} \tag{8.65}$$

Desenvolvendo com mais detalhe a expressão acima, temos

$$w = f_C(k_C) + L_C \frac{\partial f_C(k_C)}{\partial k_C}.\frac{\partial k_C}{\partial L_C} = f_C(k_C) + L_C.f'_C(k_C).\frac{\partial (\frac{K_C}{L_C})}{\partial L_C} \tag{8.66}$$

Desenvolvendo ainda um pouco mais a expressão acima, temos

$$w = f_C(k_C) - L_C f'_C(k_C).K_C.\frac{1}{L_C^2} = f_C(k_C) - \frac{K_C}{L_C}.f'_C(k_C) = f_C(k_C) - k_C.f'_C(k_C) \tag{8.67}$$

Do mesmo modo, temos

$$w = p\frac{\partial Y_I}{\partial L_I} = p\frac{\partial F(K_I, L_I)}{\partial L_I} = p(\frac{\partial (L_I f_I(k_I))}{\partial L_I}) = p(f_I(k_I) + L_I \frac{\partial f_I}{\partial L_I}) \tag{8.68}$$

Avançando um pouco mais no desenvolvimento da expressão, temos

$$w = p(f_I(k_I) + L_I \frac{\partial f_I(k_I)}{\partial k_I} \frac{\partial k_I}{\partial L_I}) = p(f_I(k_I) + L_I.f'_I(k_I).\frac{\partial (\frac{K_I}{L_I})}{\partial L_I}) \tag{8.69}$$

Ainda com mais detalhes na expressão acima, chegamos, finalmente, a obter a expressão

$$w == p(f_I(k_I) - L_I f'_I(k_I).K_I.\frac{1}{L_I^2}) = p(f_I(k_I) - \frac{K_I}{L_I}.f'_I(k_I)) = p(f_I(k_I) - k_I.f'_I(k_I)) \tag{8.70}$$

Suponha agora que $\omega = \dfrac{w}{r}$ é a razão salário taxa de juros

Fazendo uso das definições acima, reescrevemos que

$$\omega = \frac{w}{r} = \frac{f_C(k_C) - k_C.f'_C(k_C)}{f'_C(k_C)} \tag{8.71}$$

Do mesmo modo

$$\omega = \frac{w}{r} = \frac{p(f_I(k_I) - k_I.f'_I(k_I))}{= pf'_I(k_I)} \tag{8.72}$$

Segue-se, das simplificações entre o numerador e o denominador

$$\omega = \frac{f_C(k_C)}{f'_c(k_C)} - k_C = \omega = \frac{f_I(k_I)}{f'_I(k_I(k_I)} - k_I \tag{8.73}$$

De modo geral, temos então que

$$\omega(k_i) = \frac{f_i(k_i)}{f'_i(k_i)} - k_i \quad i = C, I \tag{8.74}$$

É fácil ver que essa função é monotonicamente crescente. Para isso isso basta encontrar a derivada em relação à sua variável independente k_i, ou seja,

$$\frac{dw}{dk_i} = \frac{\frac{df_i(k_i)}{dk_i}.f'_i(k_i) - f_i(k_i).f''_i(k_i)}{[f'_i(k_i)]^2} - 1 \tag{8.75}$$

Simplificando

$$\frac{dw}{dk_i} = 1 - \frac{f_i(k_I)f''_i(k_i)}{[f''_i(k_i)]^2} - 1 = -\frac{f_i(k_I)f''_i(k_i)}{[f''_i(k_i)]^2} > 0 \tag{8.76}$$

Como se trata de uma função monotônica crescente podemos pensar na função inversa, ou seja, uma funão que para cada w corresponde apenas um único k_i em cada setor.

$$k_i = k_i(w) \quad \text{com} \quad k'_i(w) > 0 \tag{8.77}$$

Para essa função podem ser encontradas as seguintes propriedades, semelhantes àquelas da função produção

$$\begin{cases} k_i(0) = 0 & (8.78) \\ k_i(\infty) = \infty & (8.79) \end{cases}$$

Neste ponto, fazemos um pressuposto extra. Será assumido que ou o setor de bens de consumo é mais capital intensive do que o setor de bens de capital para qualquer razão $\frac{w}{r}$ ou o setor de bens de capital é mais capital intensivo. Em termos formais

$$k_C(w) > k_I(w) \quad \text{para todo} \quad 0 < w < \infty \tag{8.80}$$

Ou

$$k_I(w) > k_C(w) \quad \text{para todo} \quad 0 < w < \infty \tag{8.81}$$

É rejeitado a propriedade de que onde $k_C > k_I$ para algum w, assim como $k_I > k_C$ para algum outro w.

Considerando que $k_C \neq k_I$ segue-se que podemos resolver, para (l_C, l_I) as duas equações

$$\begin{cases} l_I + l_C = 1 & (8.82) \\ k_I l_I + k_C l_C = k & (8.83) \end{cases}$$

Inicialmente, substituindo $l_I = l_C - 1$ na segunda equação, temos, depois de algumas passagens algébricas

$$l_C = \frac{k - k_I}{k_C - k_I} \tag{8.84}$$

Do mesmo modo para

$$l_I = \frac{k_C - k}{k_C - k_I} \tag{8.85}$$

Assim, reescrevemos, a produção nos dois setores,

$$\begin{cases} y_C = l_C f_C(k_C) = \dfrac{k - k_I}{k_C - k_I} f_C(k_C) & (8.86) \\ y_I = l_I f_I(k_I) = \dfrac{k_C - k}{k_C - k_I} f_I(k_I) & (8.87) \end{cases}$$

Na mesma linha, se ambos os bens são produzidos, podemos calcular ou obter o preço dos bens de investimento em termos dos bens de consumo, p. O caminho é olhar para as relações envolvendo o retorno do capital, r.

$$p(\omega) = \frac{r}{f_I'(k_I)} = \frac{f_C'(k_C)}{f_I'(k_I)} = \frac{f_C'(k_C(w))}{f_I'(k_I(w))} \tag{8.88}$$

Tomando o logaritmo, obtemos

$$logp(w) = logf_C'(k_C(w)) - logf_I'(k_I(w)) \tag{8.89}$$

Vamos derivar a equação acima em relação a w

$$\frac{dp}{p.d\omega} = \frac{1}{f_C'(k_C)} \frac{df_C'}{dw} - \frac{1}{f_I'(k_I)} \frac{df_I'}{dw} \tag{8.90}$$

Fazendo uso das relações acima

$$\frac{dp}{p.d\omega} = \frac{1}{f_C'(k_C)} \frac{df_C'}{dk_C} . \frac{dk_C(w)}{dw} - \frac{1}{f_I'(k_I)} \frac{df_I'}{dk_I(w)} \frac{dk_I(w)}{dw} \tag{8.91}$$

Novamente, fazendo uso das relaçoes envolvendo $\dfrac{dw}{dk_i}$, obtemos

$$\frac{dp}{p.d\omega} = \frac{1}{f_C'(k_C)} \frac{df_C'}{dk_C} . \frac{-[f_C'(k_C)]^2}{f_C(k_C).f_C''(k_C)} - \frac{1}{f_I'(k_I)} \frac{df_I'}{dk_I} . \frac{-[f_I'(k_I)]^2}{f_I(k_I) f_I''(k_I)} \tag{8.92}$$

Simplificando

$$\frac{dp}{p.d\omega} = \frac{1}{f_C'(k_C)} f_C''(k_C) . \frac{-[f_C'(k_C)]^2}{f_C(k_C).f_C''(k_C)} - \frac{1}{f_I'(k_I)} f_I''(k_I) . \frac{-[f_I'(k_I)]^2}{f_I(k_I) f_I''(k_I)} \tag{8.93}$$

$$\frac{dp}{p.d\omega} = \frac{1}{f'_C(k_C)}.\frac{-[f'_C(k_C)]^2}{f_C(k_C)} - \frac{1}{f'_I(k_I)}.\frac{-[f'_I(k_I)]^2}{f_I(k_I)} \tag{8.94}$$

$$\frac{dp}{pd\omega} = \frac{-[f'_C(k_C)]}{f_C(k_C)} - \frac{-[f'_I(k_I)]}{f_I(k_I)} \tag{8.95}$$

$$\frac{dp}{pd\omega} = -\frac{1}{w+k_C} + \frac{1}{w+k_I} = \frac{1}{w+k_I} - \frac{1}{w+k_C} \tag{8.96}$$

Se $k_C > k_I$ então

$$\frac{dp}{pd\omega} = -\frac{1}{w+k_C} + \frac{1}{w+k_I} = \frac{1}{w+k_I} - \frac{1}{w+k_C} > 0 \tag{8.97}$$

A hipótese sob a qual trabalhamos é que AMBOS OS BENS SÃO PRODUZIDOS.

Contudo, por outro lado, a economia pode se especializar na produção dos bens, por exemplo, especializar na produção do bem de investimento. Neste caso,

$$\begin{cases} l_I = 1 \quad l_C = 0 & (8.98) \\ k_I = k \quad k_C = 0 & (8.99) \\ y_I = f_I \quad y_C = 0 & (8.100) \end{cases}$$

Mas, no caso em que ela se especializa na produção do bem de consumo, então,

$$\begin{cases} l_I = 0 \quad l_C = 1 & (8.101) \\ k_I = 0 \quad k_C = k & (8.102) \\ y_I = 0 \quad y_C = f_C(k) & (8.103) \end{cases}$$

Contudo, a especialização pode ser definida como função da razão salário renda do capital, ou seja, $\omega = \frac{w}{r}$.

Com este pressuposto, a economia especializa no setor de produção de bens de incestimento se

$$\omega = \frac{f_I(k)}{f_I'(k)} - k = w_I(k) \tag{8.104}$$

E, se especializa na produção de bens de consumo se

$$\omega = \frac{f_C(k)}{f_C'(k)} - k = w_C(k) \tag{8.105}$$

Fixando umm determinado nível de capital per capital, k, temos uma fronteira de eficiência descrita por meio dos pontos (y_I, y_C). Como sabemos nessa fronteira, a produção per capita de um bem é maximizado para uma dada produção per capital do outro bem. Esta fronteira de eficiência pode ser descrita na forma paramétrica, com os recursos de algumas relações anteriores,

$$\boxed{y_I = (\frac{k_C - k}{k_C - k_I}) f_I(k_I)} \tag{8.106}$$

$$\boxed{y_C = (\frac{k - k_C}{k_C - k_I}) f_C(k_C)} \tag{8.107}$$

Onde temos que $k_C = k_C(\omega)$ e $k_C = k_C(\omega)$.

Por outro lado, se ambos os bens são produzidos, então, o preço é dado pela inclinação da curva da fronteira de eficiência

$$\frac{dy_C}{dy_I} = -\frac{f_C'}{f_I'} = -p \tag{8.108}$$

Parte dessa relação pode ser obtida diretamente da relação dada no início desse modelo.

$$y = y_C + p y_I \tag{8.109}$$

Portanto,

$$dy = dy_C + pdy_I = 0 \tag{8.110}$$

Como estamos na fronteira de eficiência, y é fixo. Desta forma

$$\frac{dy_C}{dy_I} = -p \tag{8.111}$$

A outra parte da relação pode ser obtida da relação anterior e da afirmação que para um dado nível fixo de capital per capita, k, temos que a fronteira de eficiência é o conjunto de pontos (y_I, y_C) em que o produto per capita de um bem é maximizado para um dado produto per capita do outro bem. Da forma paramétrica representando a fronteira de eficiência obtemos, fazendo uso das relações no início do modelo,

$$y_I = (\frac{k_C - k}{k_C - k_I}) f_I(k_I) = l_I f_I(k_I) \tag{8.112}$$

$$y_C = (\frac{k - k_C}{k_C - k_I}) f_C(k_C) = l_C f_C(k_C) \tag{8.113}$$

$$\tag{8.114}$$

Portanto,

$$\frac{y_C}{y_I} = \frac{k - k_I}{k_C - k} . \frac{f_C(k_C)}{f_I(k_I)} \tag{8.115}$$

Se a economia se especializa na produção do bem de investimento temos que $w = w(k_I)$, não temos mais a hipótese competitiva, e, portanto,

$$p \geq \frac{f'_C}{f'_I} \tag{8.116}$$

E, do mesmo modo, se a economia se especializa na produção do bem de consumo, então, $w = w_C(k)$

$$p \geq \frac{f'_C}{f'_I} \tag{8.117}$$

Considerando a fronteira de eficiência os pontos de especialização são aqueles em que a fronteira intercepa tanto o eixo y_C, especializando na produção do bem de consumo, quando o eixo y_I especializando na produção do bem de investimento.

Vamos retormar agora o problema do crescimento econômico ótimo e reescrevêmos neste novo quadro.

$$\begin{cases} maxW = \int_{t_0}^{\infty} \exp(-\rho(t-t_0).(\frac{k-k_C}{k_C-k_I})f_C(k_C)dt & (8.118) \\ \dot{k} = (\frac{k_C-k}{k_C-k_I})f_I(k_I) - \lambda k & (8.119) \\ k(t_0) = k_0 & (8.120) \\ k_C = k_C(\omega) & (8.121) \\ k_I = k_I(\omega) & (8.122) \\ w_C(k) \leq \omega \leq w_I(k) & (8.123) \\ w(t) \quad \text{é uma função contínua por partes} & (8.124) \end{cases}$$

Novamente, k é a variável estado, como antes, contudo, houve uma mudança nas variáveis de controle que passou a ser a $\omega = \frac{w}{r}$.

Para resolver o problema do crescimento econômico ótimo vamos assumir como ponto de partida que $k_C(\omega) > k_I(\omega)$ e aplicar a condição do princípio do máximo. A primeira etapa da aplicação desse princípio consiste na construção do Hamiltoniano.

As condições de primeira ordem, ou seja, O PRINCÍPIO DE MÁXIMO,

1. Construção da função hamiltoniana:$H(t,k,\omega = F(t,k,\omega + qf(t,k,\omega)$

   (a) $Max_\omega H(t,k,\omega,q)$

2. As equações canônicas:

(a) $q' = \dfrac{\partial H}{\partial k}$

(b) $k' = \dfrac{\partial H}{\partial q}$

3. Condição de Transversalidade

   (a) $[H]_T = 0$

1. Construção da função hamiltoniana

   (a) $H(t, k, \omega, q) = F(t, k, \omega) + qf(t, k, \omega)$

   (a) $Max_{\omega} \quad H(t, k, \omega, q)$

2. As equações canônicas:

   (a) $q' = \dfrac{\partial H}{\partial k}$

   (b) $k' = \dfrac{\partial H}{\partial q}$

3. Condições de Transversalidade

   (a) $[H]_T = 0$

   (b) $q(T) = 0$

Assim, para construir o Hamiltonia para este problema devemos seguir a aplicação do princípio de máximo

$$H = \exp -\rho(t - t_o)[(\frac{k - k_I}{k_C - k_I})f_C(k_C) + q^*[(\frac{k_C - k}{k_C - k_I})f_I(k_I) - \lambda k]] \quad (8.125)$$

Onde $q^*(t)$ é a variável co-estado -o multiplicador de Lagrange. Vamos transformar a Hamiltonia numa Hamiltonia corrente.

$$H_c = \exp \rho(t - t_o)H \quad (8.126)$$

Portanto,

$$H_C = [(\frac{k - k_I}{k_C - k_I})f_C(k_C) + q[(\frac{k_C - k}{k_C - k_I})f_I(k_I) - \lambda k]] \tag{8.127}$$

Onde

$$q = q^* \exp \rho(t - t_o) \tag{8.128}$$

Do qual se segue que

$$\dot{q} = \dot{q^*} \exp \rho(t - t_o) + q^* \rho \exp \rho(t - t_o = \dot{q^*} \exp \rho(t - t_o) + \rho q \tag{8.129}$$

$$\dot{k} = \frac{\partial H}{\partial q^*} = (\frac{k_C - k}{k_C - k_I})f)I(k_I) - \lambda k \tag{8.130}$$

$$\dot{q^*} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\exp -\rho(t - t_o)\frac{f_C(k_C)}{k_C - k_I} - q^*(\frac{f_I(k_I)}{k_C - k_I} - \lambda) \tag{8.131}$$

Fazendo uso da transformação da variável co-estado, temos

$$\dot{q} = \tag{8.132}$$

8.4 Modelo de Diamond: overlaping generations (OLG

8.5 Modelos endogenos do crescimento econômico

8.5.1 Modelo AK

8.6 Modelo de Schumpeter

Chapter 9

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA:A EQUAÇÃO RECURSIVA DE HAMILTON-JACOBI-BELMAM

No que segue vamos estudar uma abordagem da teoria do controle conduzida por Belman, contudo, que a desenvolveu com vista a adaptar a teoria do controle aos poderosos recursos de cáculo do computador. Como estivemos fazendo até agora na busca das condições necessárias para o problema da otimização vamos repetir a abordagem na busca das condições necessárias para o problema da otimização da teoria do controle, contudo, com a aplicação a ele do princípio da otimizalidade. O núcleo do método de Bellman é, exatamente, o seu princípio da otimalidade. É mais ou menos uma conbenção denominar a condição necessária para esse problema, quando abordado de modo discreto, como equação de Bellman enquando o resultado para a abordagem contínua é a Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. A característica da abordagem de Bellman é a de produzir um resultado na forma de uma

equação recursiva. Um método recursivo tem duas propriedades:

1. construção de caso básico referencial simples
2. um conjunto de regras que reduz os demais casos, complexos, a esse caso básico referencial simples

Um dos exemplos mais significativos do método recursivo é o método gerador da sequência de números de fibonacci.

O importante é começar a desenvolver a abordagem da programação dinâmica para resolver problemas de teoria do controle com o estabelecimento da definição do princípio da otimalidade de Bellman. Ele diz,

> An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decisions are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision(**?**)

A abordagem de Bellman consiste em assumir que o problema da teoria do controle está já resolvido relativamente ao problema mais básico. O valor da integral é calculada nos pontos de ótimo, (y^*, u^*, λ^*) gerando uma função denominada de função valor das condições iniciais (t_0, y_0) a qual pode ser escrito como

$$J(t_0, y_0) = \int_{t_0}^{T} F(t, y^*, u^*)dt \tag{9.1}$$

$$\text{s.a} \quad \dot{y} = f(t, y^*, u^*) \tag{9.2}$$

$$y(t_0) = y_0 y(T) = y_T \text{T dado} \tag{9.3}$$

A aplicação do princípio da otimalidade ao problema mais básico da teoria do controle pode ser feito da seguinte maneira, sempre satisfazendo a equação do movimento $\dot{y} = f(t, y, u)$ em cada etapa,

$$J(t_0, y_0) = \max_{\substack{\mathrm{u} \\ \mathrm{t_0 \leq t \leq (t_0 + \Delta t)} \\ y(t_0) = y_0}} \left[\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(t, y^*, u^*) \right. \tag{9.4}$$

$$\left. + \max_{\substack{\mathrm{u} \\ \mathrm{t_0 + \Delta t \leq t \leq T} \\ y(t_0+\Delta t) = y_0 + \Delta y_0}} \int_{t_0+\Delta t}^{T} F(t, y^*, u^*) \right] \tag{9.5}$$

$$\tag{9.6}$$

Não é difícil perceber pela definição de função valor acima que a segunda integral satsfaz essa definição, ou seja,

$$J(t_0 + \Delta t_0, y_0 + \Delta y_0) = \max_{\substack{\mathrm{u} \\ \mathrm{t_0 + \Delta t_0 \leq t \leq T} \\ y(t_0+\Delta t) = y_0 + \Delta y_0}} \int_{t_0+\Delta t}^{T} F(t, y^*, u^*) \tag{9.7}$$

e, portanto, podemos reescrever a expressão anterior numa forma mais claramente recursiva

$$J(t_0, y_0) = \max_{\substack{\mathrm{u} \\ \mathrm{t_0 \leq t \leq (t_0 + \Delta t)} \\ y(t_0) = y_0}} \left[\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(t, y^*, u^*) \right. \tag{9.8}$$

$$\left. + J(t_0 + \Delta t_0, y_0 + \Delta y_0) \quad \right] \tag{9.9}$$

$$\tag{9.10}$$

Observamos que a primeira integral é relizada num intervalor de cumprimento infinetesimal, ou seja, Δt, isto significa que a integral é equivalente,, a uma área de um retângulo infinitesimal $F(t, yu)\Delta t$, pois nesse intervalor infinitesimal a funçãou é praticamente constante. Assim a integral é equivalente à area,

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(t, y^*, u^*) = F(t_0, y_0, u)\Delta t \tag{9.11}$$

Substituindo na expressão acima, temos que

$$J(t_0, y_0) = \max_{\substack{u \\ t_0 \le t \le (t_0+\Delta t) \\ y(t_0)=y_0}} [\tag{9.12}$$

$$F(t_0, y_0, u)\Delta + J(t_0 + \Delta t_0, y_0 + \Delta y_0) \quad] \tag{9.13}$$

$$\tag{9.14}$$

Novamente, recorremos a um dos principais instrumentos ou técnicas para tratar do problema das condições necessárias para que se tenha um ponto ou uma trajetória ótima: a expansão de Taylor. Vamos fazer uma expansão de Taylor da função valor para os valores inicias $(t_0+\Delta t_0, y(t_0+\Delta t_0) = y_0+\Delta y_0)$ em torno do ponto (t_0, y_0). Pela expansão, obtemos

$$J(t_0, y_0) = \max_{\substack{u \\ t_0 \le t \le (t_0+\Delta t) \\ y(t_0)=y_0}} [\quad F(t_0, y_0, u)\Delta \tag{9.15}$$

$$+J(t_0, y_0) + J_y|_{(t_0,y_0)}\Delta y + J_t|_{(t_0,y_0)}\Delta t + \text{termos de ordem superior} \quad] \tag{9.16}$$

$$\tag{9.17}$$

Podemos eliminar o termo $J(t_0, y_0)$ que aparece em ambos os lados da expressão uma vez que ele independe da função u.

$$0 = \max_{\substack{u \\ t_0 \leq t \leq (t_0+\Delta t) \\ y(t_0)=y_0}} [\quad F(t_0, y_0, u)\Delta t \tag{9.18}$$

$$+J_y|_{(t_0,y_0)}\Delta y + J_t|_{(t_0,y_0)}\Delta t + \text{termos de ordem superior} \quad] \tag{9.19}$$

$$\tag{9.20}$$

Desconsiderando os termos de ordem superio, e, como o termo Δt aparece duas vezes podemos dividir a expressão por esse termo. O resultado segue

$$0 = \max_{\substack{u \\ t_0 \leq t \leq (t_0+\Delta t) \\ y(t_0)=y_0}} [\quad F(t_0, y_0, u) \tag{9.21}$$

$$+J_y|_{(t_0,y_0)}\frac{\Delta y}{\Delta t} + J_t|_{(t_0,y_0)} \quad] \tag{9.22}$$

$$\tag{9.23}$$

Se tomarmos o $lim_{\Delta t \overset{\infty}{\longrightarrow}}$ obtemos $lim_{\Delta t \overset{\infty}{\longrightarrow}} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \dot{y}$. Contudo, $\dot{y} = f(t, y, u)$ da equação do movimento do problema. Substituindo na expressão anterior,

$$0 = \max_{\substack{u \\ t_0 \leq t \leq (t_0+\Delta t) \\ y(t_0)=y_0}} [\quad F(t_0, y_0, u) \tag{9.24}$$

$$+J_y|_{(t_0,y_0)}f(t, y, u) + J_t|_{(t_0,y_0)} \quad] \tag{9.25}$$

$$\tag{9.26}$$

Desta expressão podemos ver que podemos deslocar J_t para o lado esquerdo da igualdade uma vez que essa função(funcional) não depende da

função u. Este não é o caso do termo $J_y f(t, y, u)$. Portanto, chegamos à expressão denominada de EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN, que é uma equação diferencial parcial,

$$J_t|_{(t_0,y_0)} = \max_{\substack{\mathrm{u} \\ \mathrm{t_0 \leq t \leq (t_0+\Delta t)} \\ y(t_0)=y_0}} \quad [\quad F(t_0, y_0, u) + J_y|_{(t_0,y_0)} f(t_0, y_0, u) \quad] \tag{9.27}$$

$$\tag{9.28}$$

Eliminando o subscripto e entendendo o significado que (t, y) são os valores iniciais, reescrevemos a equações como

$$J_t = \max_{\substack{\mathrm{u} \\ \mathrm{t_0 \leq t \leq (t_0+\Delta t)} \\ y(t_0)=y_0}} \quad [\quad F(t, y, u) + J_y f(t, y, u) \quad] \tag{9.29}$$

$$\tag{9.30}$$

9.1 Programação Dinâmica: abordagem discreta

9.2 Aplicações

9.3 BIBLIOGRAFIA

Simon, Carl e Blume, Lawrence. Mathematics for Economists. 1994 Chiang, Alpha Elements of Dynamical Optimization Chiang, Alpha. Fundamental Methods of Mathematical Economics. Blanchard, Oliver Macroeconomia Mankiw, Grecory Macroeconomia 6 edição. Carlin, Wendi e Soskice,

David. Macroeconomics:Imperfections, Institutions and Policies. 2005 Heijdra, Ben and Ploeg, Frederick. The foundations of Modern Macroeconomics. 2002. Branson, William, Macroeconomic theory and policy. Second Edition Sargent, Thomas. Macroeconomic Theory. Second Edition. Intriligator, Michael Mathematical Optimization and Economic theory and