

Mecânica Clássica 2 (Semestre 2 de 2017): Lista 3

1. A partir da Lagrangeana do oscilador harmônico simples, obtenha a Hamiltoniana e as equações de Hamilton.

2. Considere uma partícula que se move sob a ação de um campo de força central. Determine a Hamiltoniana, as equações de Hamilton e determine a equação de movimento da partícula. Compare com o resultado obtido pelo método de Lagrange.

3. Dada a Lagrangeana

$$L = \frac{\dot{x}}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{s} - \alpha x^3 + \beta \dot{x}^2, \quad (1)$$

obtenha a Hamiltoniana. Em que condições ela se reduz à função de um oscilador harmônico?

4. Determine a Hamiltoniana de uma partícula que se move sob a ação do potencial de Weber

$$V = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right). \quad (2)$$

5. Encontre as equações de movimento de uma partícula cuja Hamiltoniana é

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{p}, \mathbf{r})}, \quad (3)$$

onde  $n(\vec{p}, \vec{r})$  é uma função escalar e  $c$  uma constante.

6. (**Invariância Adiabática**): Considere um sistema governado pela Hamiltoniana  $H(q, p)$ , que tenha coordenadas e momentos limitados a uma região com limites finitos, e que variam quase-periodicamente (na verdade, é possível mostrar que todo sistema limitado a uma região finita é periódico), com a variação de um período a outro dependendo de um parâmetro  $\lambda$ . Vamos supor que esse parâmetro varia muito pouco no intervalo de tempo  $T$ , onde  $T$  é o período de oscilação do sistema, isto é,

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \quad (4)$$

Nessas condições dizemos que o sistema varia adiabaticamente.

a) Mostre que

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{d\bar{H}}{d\lambda}, \quad (5)$$

onde

$$\frac{d\bar{H}}{d\lambda} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dH}{d\lambda} dt. \quad (6)$$

b) A partir do resultado anterior, mostre que

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\int \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial H}{\partial p} dq}{\int \frac{\partial p}{\partial H} dq} \quad (7)$$

c) Para  $\lambda$  fixo,  $E$  é constante e  $p$  é bem definido, com  $E = H(q, p, \lambda)$ . Mostre que então

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\int \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\int \frac{\partial p}{\partial E} dq}. \quad (8)$$

d) Se  $d\lambda/dt \sim \text{const.}$ , mostre que

$$\int \left[ \frac{\partial p}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right] dq = 0. \quad (9)$$

e) Definindo  $I = (2\pi)^{-1} \int_0^T pdq$ , mostre que  $d\bar{I}/dt=0$ .

f) Mostre que  $E = I\omega$ , onde  $\omega = 2\pi/T$ .

7. Uma função  $f(y, y')$  é o extremo de uma quantidade  $F = \int f(y, y')dx$ , sendo que  $f$  depende apenas implicitamente (através de  $y$  e  $y'$ ) de  $x$ . Mostre que

$$\frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right). \quad (10)$$

8. (**Catenária**) Uma corrente de comprimento  $C$  e massa  $M$  está suspensa entre os pontos  $(0, a)$  e  $(L, b)$ . Ache a forma de equilíbrio.

9. Mostre que  $F_2(q, P, t)$ ,  $F_3(p, Q, t)$  e  $F_4(p, P, t)$  são transformadas de Legendre da função  $F_1(q, Q, t)$ .

10. Mostre que se  $F_1(q, Q)$ , então  $H = H'$  e  $dF$  é uma diferencial exata.

11. Mostre que a transformação  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  é canônica se e somente se a forma bilinear

$$\sum_k \delta p_k dq - k - \delta q_k dp_k \quad (11)$$

é invariante, onde  $\delta q_k$  e  $\delta p_k$  são deslocamentos virtuais quaisquer enquanto  $dq_k$  e  $dp_k$  são deslocamentos reais realizados num intervalo de tempo  $dt$ .

12. Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad (12)$$

Uma função geratriz  $F_1 = (m/2)\omega q^2 \cotg Q$  é utilizada para obter novas coordenadas  $(Q, P)$ .

a) Obtenha os momentos generalizados  $p$  e  $P$ .

b) Mostre que  $F_1$  é uma transformação canônica.

c) Como fica a nova Hamiltoniana em termos de  $P$  e  $Q$ ?

13. Mostre que  $F = \sum_i q_i Q_i$  é a função geratriz da transformação identidade.

14. Mostre que a transformação  $P = (1/2)(p^2 + q^2)$  e  $Q = \text{arctg}(q/p)$  é canônica.

15. Dada a transformação  $P = 2(1 + \sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p$  e  $Q = \log(1 + \sqrt{p}\cos p)$ :

a) Mostre que a transformação é canônica.

b) Mostre que a função geratriz dessa transformação é  $F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p$ .

16. Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2, \quad (13)$$

que descreve, no espaço de fase, uma elipse.

a) Mostre que a equação de uma elipse pode ser escrita na forma  $p = R(\theta)\sin\theta$  e  $q = R(\theta)\cos\theta$ .

b) Pode-se encontrar uma função geratriz  $F_1(q, \theta)$  para a transformação  $(q, p) \rightarrow (\theta, P)$ .  
Mostre que essa função é  $F(q, \theta) = (m\omega/2)q^2 \cot\theta$