Exercícios de MAP2321- 2017 | Lista 1

1. Ache a linearização da equação diferencial em torno do ponto de equilíbrio.

$$\ddot{x} + (x-1)\dot{x} + x = 0$$

2. No modelo de uma partícula sujeita à ação de um campo de forças central as equações do movimento são:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} + u_r & (1) \\ r\ddot{\theta} &= -2\dot{r}\dot{\theta} + u_\theta & (2) \end{aligned}$$

onde r é a distância da partícula até o centro do movimento e θ o ângulo formado pelo segmento da partícula até o centro e uma reta fixa. Escreva a linearização do sistema em torno do movimento circular uniforme com $r(t) = 1$. Obs: Massa da partícula é 1, e calcule a velocidade angular.

3. Considere a equação:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= A\omega_2\omega_3 + u_1 & (3) \\ \dot{\omega}_2 &= -A\omega_1\omega_3 + u_2 & (4) \\ \dot{\omega}_3 &= u_3 & (5) \end{aligned}$$

Verifique que para $\mathbf{u} = 0$ temos a solução particular:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \cos(\omega_0 A t) & (6) \\ \omega_2(t) &= -\sin(\omega_0 A t) & (7) \\ \omega_3(t) &= \omega_0 & (8) \\ & & (9) \end{aligned}$$

Linearize o sistema em torno desta solução

4. Considere um modelo de sistema de controle com tempo discreto onde a função transição de estados é dada pela equação:

$$X_{n+1} = AX_n + u_n B$$

onde $X \in \mathbb{R}^n$ e o controle admissível é uma sequência $u_i \in \mathbb{R}$. Achar a função transição de estados $\varphi(n, 0, X_0, u_i)$.

5. *Lema de Gronwall-Bellman:* suponha que $x(t) > 0$ é uma função real positiva, $\psi(t)$ uma função qualquer tal que $\phi(t)$ satisfaça o desigualdade implícita

$$\phi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t x(s)\phi(s)ds$$

então vale a desigualdade explícita:

$$\phi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t x(s)\psi(s)\exp\left[\int_s^t x(u)du\right]ds$$

Faça a demonstração olhando a sugestão do livro do Brockett na página 19. Este lema eu não vou dar em aula, mas é importante vocês saberem.