

Estatística Quântica

Sistema físico com muitos componentes \Rightarrow tratamento detalhado complexo \Rightarrow abordagem estatística. Usada com sucesso na física clássica para descrever sistemas termodinâmicos. Relação entre propriedades observadas e o comportamento provável do sistema.

Sistema com N partículas em equilíbrio térmico \Rightarrow descrito por $6N$ parâmetros ($3N$ posições e $3N$ velocidades – que podem ser considerados pontos em um espaço 6D, o espaço de fase).

Gás ideal: Maxwell concentrou-se nas velocidades (mais importantes que as posições – aleatórias, se não se considera a gravidade). Ele desenvolveu uma função de distribuição de velocidades, definida como: $f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v} \rightarrow$ probabilidade de se encontrar uma partícula com velocidade entre \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d^3\mathbf{v}$, sendo que $d^3\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$. O fato de \mathbf{v} ser um vetor implica em 3 condições: $f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v}$ é a probabilidade de encontrar uma partícula com v_x entre v_x e $v_x + dv_x$, e analogamente para v_y e v_z . Maxwell mostrou que essa função de distribuição pode ser escrita como:

$$f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v} = C \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m\mathbf{v}^2\right)d^3\mathbf{v}$$

sendo C uma constante, $\beta = (kT)^{-1}$, k a constante de Boltzmann, T a temperatura do sistema e m a massa da molécula.

Podemos escrever a função de distribuição em termos das componentes da velocidade, uma vez que: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Assim,

$$f(\mathbf{v})d^3v = C \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m v_x^2 - \frac{1}{2}\beta m v_y^2 - \frac{1}{2}\beta m v_z^2\right)d^3v$$

Que, por sua vez, pode ser escrita como o produto de 3 termos:

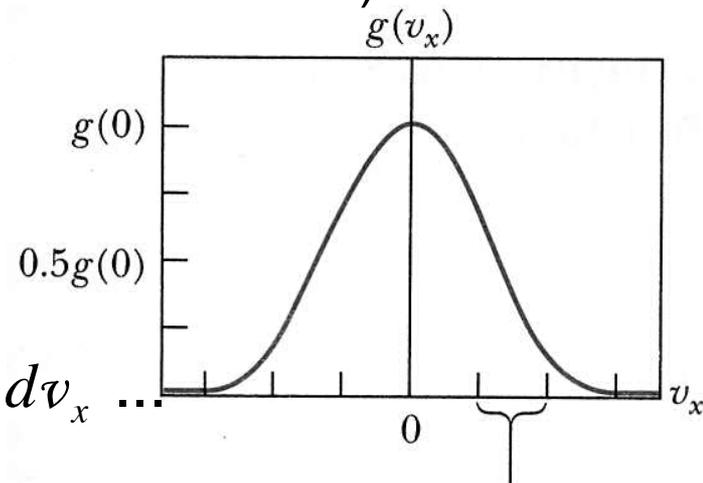
$$f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = g(v_x)g(v_y)g(v_z)dv_x dv_y dv_z$$

$$g(v_x)dv_x = C' \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m v_x^2\right)dv_x \dots \quad \text{com } C' = C^{1/3}.$$

A constante é determinada pela normalização (uma vez que a probabilidade de se encontrar uma partícula com velocidade entre $-\infty$ e $+\infty$ é 1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(v_x)dv_x = C' \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{1/2} = 1 \Rightarrow C' = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{1/2}$$

$$\text{E, portanto: } g(v_x)dv_x = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m v_x^2\right)dv_x \dots$$



$$\sqrt{\frac{1}{\beta m}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Podemos, a partir desses resultados, determinar propriedades do sistema, como a velocidade média, etc. ...

$$\bar{v}_x = \langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x g(v_x) dv_x = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m v_x^2\right) dv_x = 0$$

v_x é ímpar

Velocidade quadrática média:

$$\begin{aligned} \overline{v_x^2} = \langle v_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m v_x^2\right) dv_x \\ &= 2 \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m v_x^2\right) dv_x = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{\beta m} \right)^{3/2} = \frac{1}{\beta m} = \frac{kT}{m} \end{aligned}$$

É claro que resultados análogos valem para as outras direções, uma vez que não há nada de especial com a x . Por isso podemos juntá-las e calcular a energia cinética média (translacional) da partícula:

$$\overline{E_K} = \langle E_K \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} m \left(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \right) = \frac{1}{2} m \left(\frac{3kT}{m} \right) = \frac{3}{2} kT$$

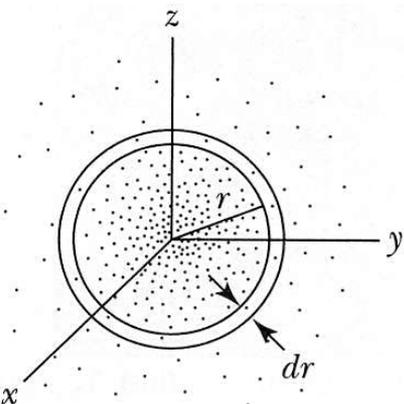
Vemos que existe uma energia média de $kT/2$ associada a cada um dos graus de liberdade da partícula.

Teorema da equipartição da energia: em um sistema em equilíbrio a uma temperatura T , existe uma energia média de $kT/2$, por molécula, associada a cada termo quadrático independente na energia da molécula.

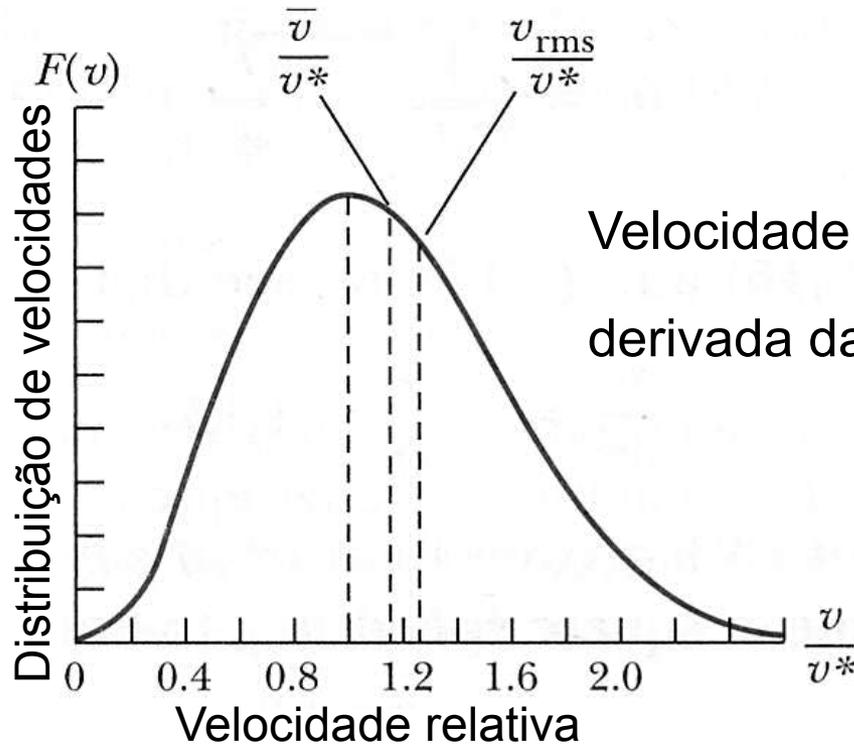
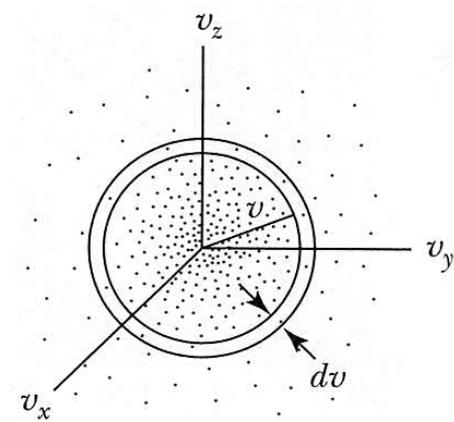
Vimos a função distribuição de velocidades considerando o vetor \mathbf{v} . Mas podemos fazer o mesmo considerando apenas o módulo das velocidades, uma vez que a distribuição depende apenas dos módulos.

Queremos determinar $F(v)$ a partir de $f(\mathbf{v})$, já conhecida. Sendo $F(v)dv$ a probabilidade de se encontrar uma partícula com o módulo da velocidade entre v e $v + dv$ (lembrando que, agora, v varia entre 0 e ∞). Mas $F(v) \neq f(\mathbf{v})$. Vamos usar o conceito de espaço de fase e vamos começar com um problema análogo no espaço 3D. Suponhamos que exista uma distribuição, $f(x,y,z)$, de partículas no espaço. Então $f(x,y,z)d^3\mathbf{r}$ é a probabilidade de encontrar a partícula entre \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d^3\mathbf{r}$, sendo $d^3\mathbf{r} = dxdydz$. Vamos agora mudar para uma distribuição $F(r)$, tal que $F(r)dr$ seja a probabilidade de encontrar a partícula entre r e $r + dr$.

O espaço entre r e $r + dr$ é o de uma casca esférica de raio r e espessura dr . O volume dessa casca é $4\pi r^2 dr$. Assim: $F(r)dr = f(x,y,z)4\pi r^2 dr$. Voltando à nossa distribuição de velocidades, teremos:



$F(v)dv = f(v)4\pi v^2 dv$. Assim, a distribuição de Maxwell de velocidades, fica: $F(v)dv = 4\pi C \exp\left(-\frac{1}{2} \beta m v^2\right) v^2 dv$



Velocidade mais provável, v^* , \Rightarrow ponto em que a derivada da distribuição é nula: $v^* = \sqrt{\frac{2}{\beta m}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

Um corolário interessante desse resultado é que a energia cinética de uma molécula que se move com a velocidade mais provável é exatamente 2/3 da energia cinética média:

$$E_K^* = \frac{1}{2} m (v^*)^2 = kT$$

Nessa distribuição (que não é mais centrada em 0), a velocidade média é:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v F(v) dv = 4\pi C \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{1}{2} \beta m v^2\right) dv = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Assim, a razão: $\frac{\bar{v}}{v^*} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 1,13$

nos mostra que, em qualquer temperatura, a velocidade média é ~13% maior que a velocidade mais provável. A velocidade quadrática média é:

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = 4\pi C \int_0^{\infty} v^4 \exp\left(-\frac{1}{2} \beta m v^2\right) dv = \frac{3kT}{m}$$

E sua raiz quadrada (velocidade rms):

$$v_{\text{rms}} = \left(\overline{v^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \Rightarrow \frac{v_{\text{rms}}}{v^*} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$$

Assim, temos também que: $\overline{E_K} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$

E, finalmente, podemos calcular o desvio padrão das velocidades moleculares:

$$\sigma_v = \left(\overline{v^2} - \bar{v}^2\right)^{1/2} = \left(\frac{3kT}{m} - \frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} = \left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2} \left(3 - \frac{8}{\pi}\right)^{1/2} \approx 0,48v^*$$

Podemos escrever a distribuição de Maxwell como uma função da energia, $F(E)dE$ em vez de $F(v)dv$. Como temos:

$$F(v)dv = 4\pi C \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m v^2\right) v^2 dv$$

Para um gás monoatômico (e não-relativístico), temos:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$dE = m v dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dv = \frac{dE}{m v} = \frac{dE}{\sqrt{2mE}} \quad \text{Substituindo na função de distribuição, temos:}$$

$$F(v)dv = F(E)dE \quad \text{desde que:}$$

$$F(E) = \frac{8\pi C}{\sqrt{2m}^{3/2}} \exp(-\beta E) E^{1/2}$$

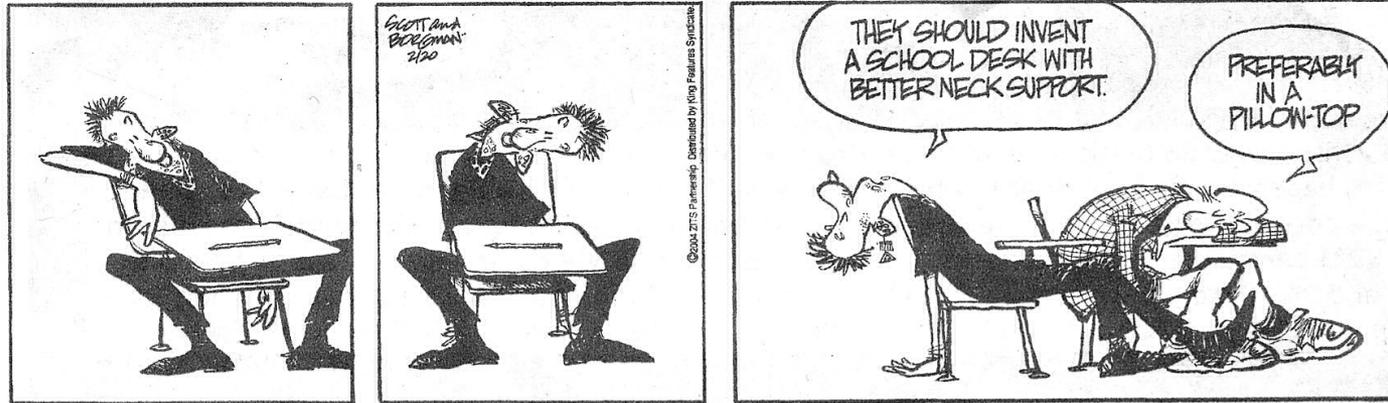
A expressão acima apresenta 2 fatores que dependem de E : o $E^{1/2}$, que vem das características do espaço de fase e do fato de que $E = m v^2/2$. Já o outro fator, $\exp(-\beta E)$, tem importância mais fundamental, percebida por Boltzmann.

Boltzmann mostrou que esse fator é uma característica de qualquer sistema clássico, independentemente de como outras grandezas, além das velocidades, possam afetar a energia do sistema.

Boltzmann pode ser considerado o criador da Mecânica Estatística, à qual dedicou a maior parte de sua vida. Morreu em 1906, suicidando-se. Paul Ehrenfest deu continuidade a seu trabalho e, em 1933, também suicidou-se.

David L. Goodstein (States of Matter, Dover, NY, 1985), recomenda que esse assunto seja estudado com muito cuidado.

ZITS, by Jerry Scott & Jim Borgman

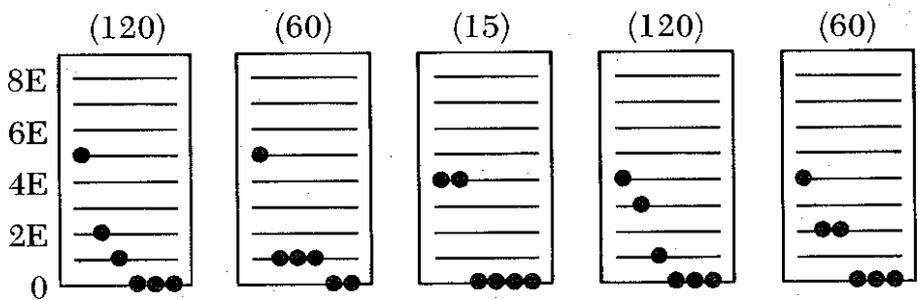
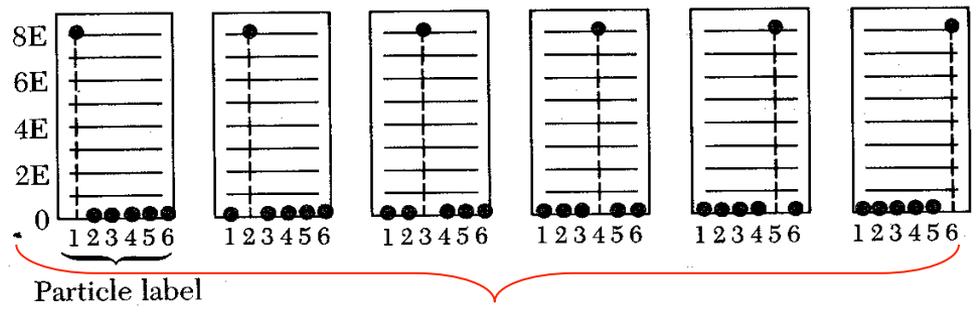
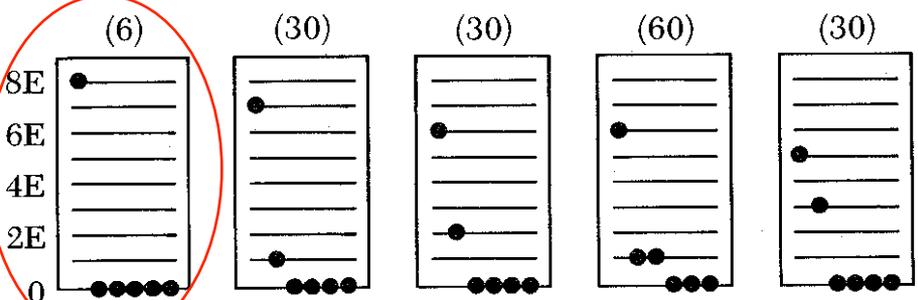


Boltzmann → sistema com número muito grande de partículas idênticas. Partículas são idênticas, mas distinguíveis, desde que estejam em estados de energia diferentes.

Todos os micro-estados são igualmente prováveis.

A presença de uma partícula em um estado particular, não altera a probabilidade de outra partícula ocupar aquele estado.

Exemplo: $E_{total} = 8E$ $N = 6$ partículas



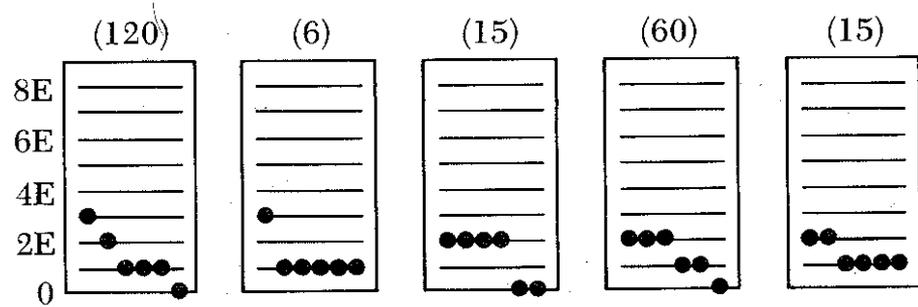
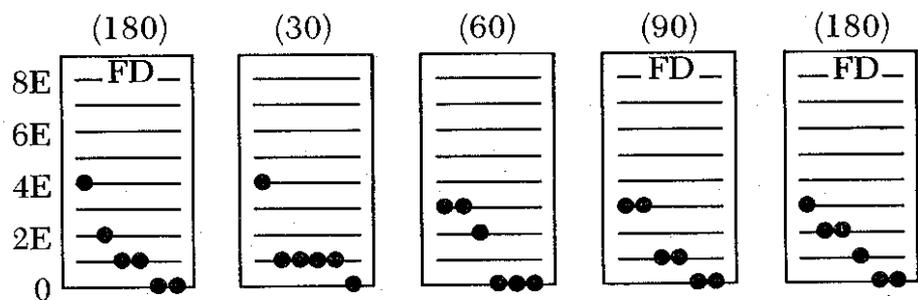
Número de micro-estados em cada arranjo:

$$N_{\text{Boltz}} = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!\dots}$$

Número médio de partículas com uma determinada energia:

$$\bar{n}_j = n_{j_1} p_1 + n_{j_2} p_2 + \dots$$

Número total de micro-estados: 1287.
Podemos, então, calcular o número médio de partículas com energia nula:



$$\begin{aligned}
\bar{n}_0 &= (5)(6/1287) + (4)(30/1287) + (4)(30/1287) + (3)(60/1287) \\
&+ (4)(30/1287) + (3)(120/1287) + (2)(60/1287) + (4)(15/1287) \\
&+ (3)(120/1287) + (3)(60/1287) + (2)(180/1287) + (1)(30/1287) \\
&+ (3)(60/1287) + (2)(90/1287) + (2)(180/1287) + (1)(120/1287) \\
&+ (0)(6/1287) + (2)(15/1287) + (1)(60/1287) + (0)(15/1287) \\
&= 2,307
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\bar{n}_1 = 1,54$$

$$\bar{n}_2 = 1,00$$

$$\bar{n}_3 = 0,587$$

$$\bar{n}_4 = 0,326$$

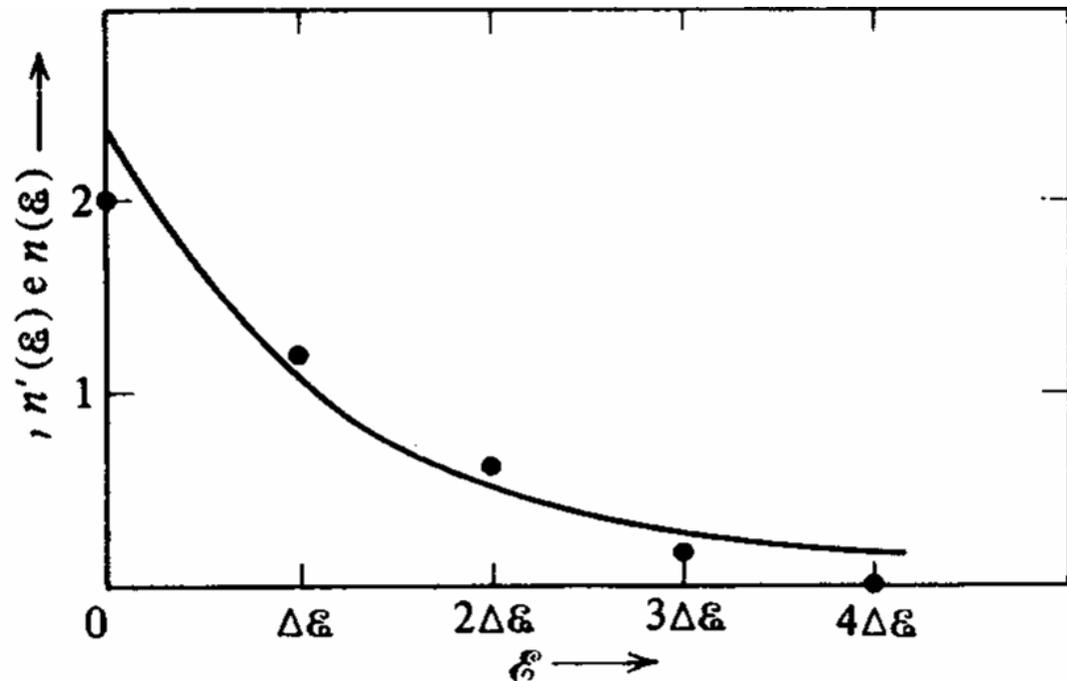
$$\bar{n}_5 = 0,163$$

$$\bar{n}_6 = 0,0699$$

$$\bar{n}_7 = 0,0233$$

$$\bar{n}_8 = 0,00466$$

Boltzmann: $P(\varepsilon_i) = Ae^{-\varepsilon_i/kT} = Ae^{-\beta\varepsilon_i}$



Número de partículas com energia ε_i : $n_i = g_i P(\varepsilon_i)$

Normalização: $\sum n_i = N$

Muitos estados com energias próximas \Rightarrow variação \rightarrow contínua \Rightarrow

$$g_i \rightarrow g(\varepsilon)d\varepsilon \quad \text{e} \quad P(\varepsilon_i) \rightarrow P(\varepsilon) = A e^{-\varepsilon/kT}$$

$$n_i \rightarrow n(\varepsilon)d\varepsilon \quad \text{e} \quad \sum n_i = N \rightarrow \frac{N}{V} = \int_0^{\infty} n(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^{\infty} g(\varepsilon)P(\varepsilon)d\varepsilon$$

Voltando à distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann:

$$n(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi(N/V)}{(\pi kT)^{3/2}} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

Limites de validade da distribuição de Maxwell-Boltzmann:

- partículas não relativísticas, pois usamos $E_K = mv^2/2$;
- $\lambda \ll d$ (distância intermolecular muito maior que o comprimento de onda de de Broglie).

Mas: $\lambda = h/p$ e $p^2/2m = 3kT/2$. Portanto: $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$. Assim:

$$\frac{h}{\sqrt{3mkT}} \ll \sqrt[3]{\frac{V}{N}} \quad \text{ou,} \quad \left(\frac{N}{V}\right) \frac{h^3}{(3mkT)^{3/2}} \ll 1$$

Densidade

4300376 - Física Moderna 2
Aula 7

Massa e
temperatura

Estatística Quântica

Boltzmann → física clássica

- partículas idênticas distinguíveis quando em estados de energia diferentes;
- a presença de uma partícula em um estado particular, não altera a probabilidade de outra partícula ocupar aquele estado.

MQ → partículas indistinguíveis \Rightarrow a presença de uma partícula em um determinado estado influencia drasticamente o comportamento das outras.

Férmions (partículas com spin semi-inteiro): se existem n férmions em um estado quântico, a probabilidade de que um outro se junte a eles é reduzida por um fator $(1 - n)$ do que seria a probabilidade se não houvesse a exigência de indistinguibilidade.

Bósons (partículas com spin inteiro): se existem n bósons em um estado quântico, a probabilidade de que um outro se junte a eles é aumentada por um fator $(1 + n)$ do que seria a probabilidade se não houvesse a exigência de indistinguibilidade.

Vamos ver o caso de 2 bósons. A autofunção simétrica (indistinguibilidade) é dada por:

Vamos ver o caso de 2 bósons. A autofunção simétrica (indistinguibilidade) é dada por:

$$\psi_S(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) + \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)]$$

2 partículas no mesmo estado \Rightarrow basta fazer $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\psi_S(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\beta(1)\psi_\beta(2) + \psi_\beta(1)\psi_\beta(2)] = \frac{2}{\sqrt{2}} \psi_\beta(1)\psi_\beta(2) = \sqrt{2} \psi_\beta(1)\psi_\beta(2)$$

Portanto a probabilidade de encontrar as partículas é:

$$P_S = \psi_S^* \psi_S = |\psi_S|^2 = 2\psi_\beta^*(1)\psi_\beta^*(2)\psi_\beta(1)\psi_\beta(2) = 2|\psi_\beta(1)|^2 |\psi_\beta(2)|^2$$

No caso de não se exigir a indistinguibilidade, temos:

$$\psi(1,2) = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) \quad \text{Fazendo } \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \psi(1,2) = \psi_\beta(1)\psi_\beta(2)$$

Portanto, nesse caso, a probabilidade de encontrar as partículas é:

$$P = \psi^* \psi = |\psi|^2 = \psi_\beta^*(1)\psi_\beta^*(2)\psi_\beta(1)\psi_\beta(2) = |\psi_\beta(1)|^2 |\psi_\beta(2)|^2$$

$$\Rightarrow P_S = 2P_{\text{clássica}}$$

No caso de 3 bósons $\Rightarrow P_S = 3!P_{\text{clássica}}$.

Caso não existisse reforço: se P_1 é a probabilidade de se colocar 1 bóson em 1 estado, para colocar n bósons: $P_n = (P_1)^n$.

Mas existe o reforço. Nesse caso:

$P_n^{\text{bóson}} = n!P_n = n!(P_1)^n \Rightarrow$ para $(n + 1)$ bósons, teremos:

$$P_{n+1}^{\text{bóson}} = (n + 1)!P_{n+1} = (n + 1)n!P_nP_1 \Rightarrow P_{n+1}^{\text{bóson}} = (1 + n)P_1P_n^{\text{bóson}}$$

Assim, se já existirem n bósons no estado, a probabilidade de entrar mais 1 sofre um reforço de $(1 + n)P_1$.

De acordo com o que vimos antes:

Bósons (partículas com spin inteiro): se existem n bósons em um estado quântico, a probabilidade de que um outro se junte a eles é aumentada por um fator $(1 + n)$ do que seria a probabilidade se não houvesse a exigência de indistinguibilidade.

Vamos ver o que acontece com as funções de distribuição quando alteramos a hipótese clássica de que a presença de uma partícula em um estado não altera a probabilidade de outra vir a ocupar aquele estado.

Para isso vamos começar pela análise do comportamento de 2 estados, clássicos, ε_1 e ε_2 , com número médio de partículas n_1 e n_2 , em equilíbrio térmico.

Vamos definir o parâmetro $R_{1 \rightarrow 2}$, que é a probabilidade de transição do estado $1 \rightarrow 2$ (por partícula e por unidade de tempo).

$R_{2 \rightarrow 1}$ é a probabilidade de transição do estado $2 \rightarrow 1$.

A taxa total com que partículas do estado 1 vão para o 2 é: $n_1 R_{1 \rightarrow 2}$.

A taxa total $2 \rightarrow 1$: $n_2 R_{2 \rightarrow 1}$.

Como o sistema está em equilíbrio térmico $\Rightarrow n_1 R_{1 \rightarrow 2} = n_2 R_{2 \rightarrow 1}$. Postulado, conhecido como *balanço detalhado*, que leva a resultados compatíveis com a observação experimental. Portanto:

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}}$ Mas, no caso de partículas clássicas, o número de partículas em um certo estado é dado pela distribuição de Boltzmann:

$$n_1 = n(\varepsilon_1) = A e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \quad \text{Assim, a razão fica: } \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}}{e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}}$$

No caso de um sistema de bósons em equilíbrio térmico, teremos uma situação análoga:

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2}^b = n_2 R_{2 \rightarrow 1}^b$$

A diferença, no caso dos bósons, está na relação entre a probabilidade de transição e o número de partículas que já ocupam o estado:

$$R_{1 \rightarrow 2}^b = (1 + n_2)R_{1 \rightarrow 2} \quad \text{e} \quad R_{2 \rightarrow 1}^b = (1 + n_1)R_{2 \rightarrow 1}$$

Substituindo em $n_1 R_{1 \rightarrow 2}^b = n_2 R_{2 \rightarrow 1}^b$

$$\Rightarrow n_1(1 + n_2)R_{1 \rightarrow 2} = n_2(1 + n_1)R_{2 \rightarrow 1}$$

$$\Rightarrow \frac{n_1(1 + n_2)}{n_2(1 + n_1)} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}}{e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}} \Rightarrow \frac{n_1}{(1 + n_1)} e^{\frac{\varepsilon_1}{kT}} = \frac{n_2}{(1 + n_2)} e^{\frac{\varepsilon_2}{kT}}$$

Cada lado dessa equação só depende de propriedades de 1 estado \Rightarrow membros independentes \Rightarrow valor comum deve depender de propriedades gerais do sistema $\Rightarrow T$. Assim, podemos escrever:

$$\frac{n_1}{(1 + n_1)} e^{\frac{\varepsilon_1}{kT}} = e^{-\alpha} \quad \text{sendo que } \alpha = \alpha(T). \quad \text{Portanto: } \frac{n_1}{(1 + n_1)} = e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} \Rightarrow$$

$$n_1 = (1 + n_1)e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} = n_1 e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} + e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} \Rightarrow n_1 \left[1 - e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} \right] = e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)}$$



$$\Rightarrow n_1 = \frac{e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)}}{1 - e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)}} = \frac{1}{e^{\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}} - 1}$$

Como podemos fazer um procedimento análogo para n_2 , o resultado deve ser geral, independente do índice. Assim, chegamos ao resultado para a distribuição de Bose:

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^\alpha e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}$$

Essa expressão especifica o número médio de bósons no estado de energia ε , quando temos o sistema em equilíbrio à temperatura T .

No caso de **férmions**, teremos: $n_1 R_{1 \rightarrow 2}^f = n_2 R_{2 \rightarrow 1}^f$ e, assim:

$$R_{1 \rightarrow 2}^f = (1 - n_2) R_{1 \rightarrow 2} \quad \text{e} \quad R_{2 \rightarrow 1}^f = (1 - n_1) R_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow n_1 (1 - n_2) R_{1 \rightarrow 2} = n_2 (1 - n_1) R_{2 \rightarrow 1}$$

$$\Rightarrow \frac{n_1 (1 - n_2)}{n_2 (1 - n_1)} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}}{e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}} \Rightarrow \frac{n_1}{(1 - n_1)} e^{\frac{\varepsilon_1}{kT}} = \frac{n_2}{(1 - n_2)} e^{\frac{\varepsilon_2}{kT}}$$

$$\text{Novamente, teremos: } \frac{n_1}{(1 - n_1)} e^{\frac{\varepsilon_1}{kT}} = e^{-\alpha} \Rightarrow$$

$$n_1 = (1 - n_1)e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} = e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} - n_1 e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} \Rightarrow n_1 \left[1 + e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)} \right] = e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)}$$

dividindo \Rightarrow

$$\Rightarrow n_1 = \frac{e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)}}{1 + e^{-\left(\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}\right)}} = \frac{1}{e^{\alpha + \frac{\varepsilon_1}{kT}} + 1}$$

E, finalmente, chegamos ao resultado para a distribuição de Fermi:

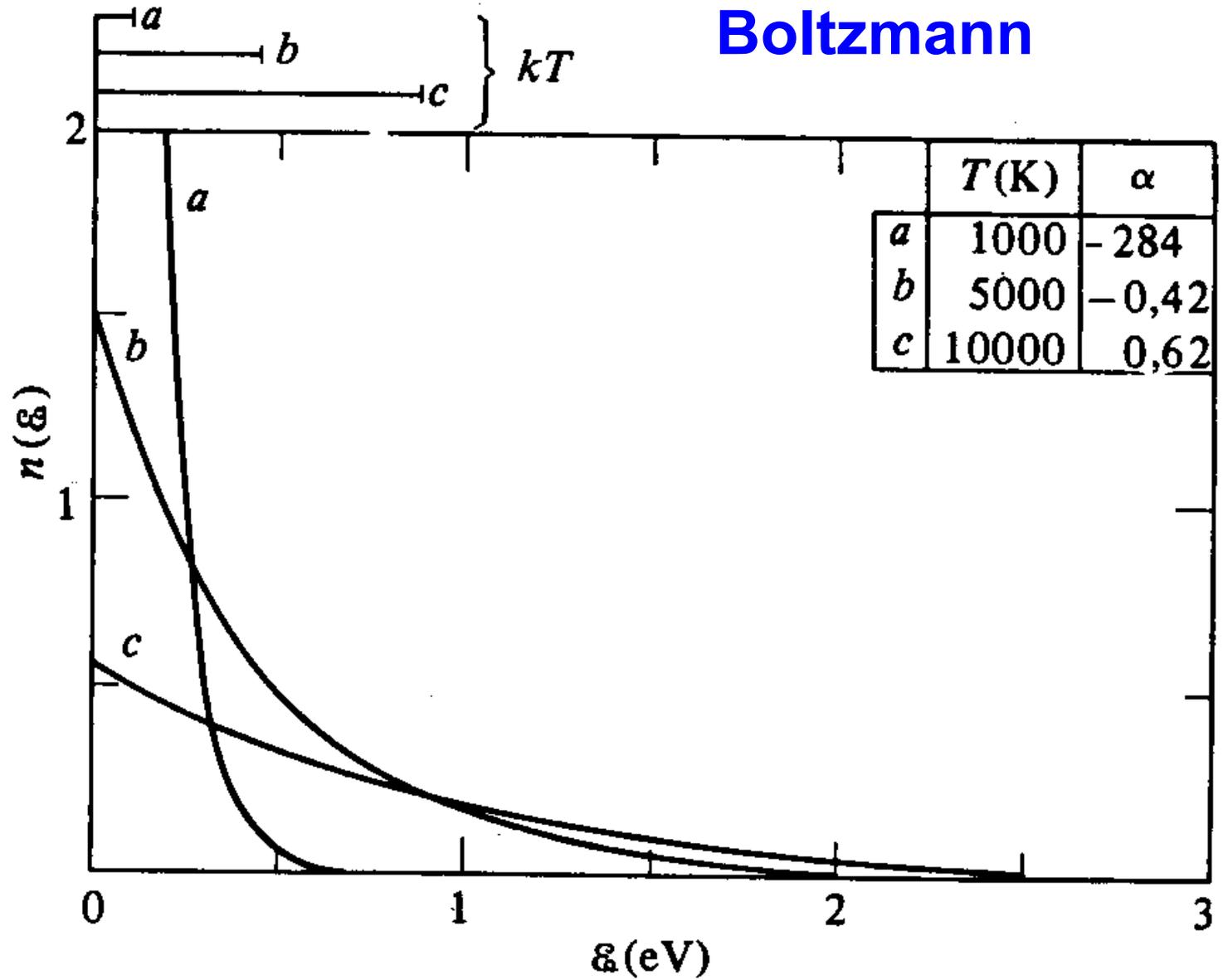
$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\frac{\varepsilon}{kT}} + 1} \quad \text{Definindo } \varepsilon_F = -\alpha kT \Rightarrow n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} + 1}$$

Só para padronizar a nomenclatura, podemos fazer $A = e^{-\alpha}$ e a distribuição de Boltzmann fica:

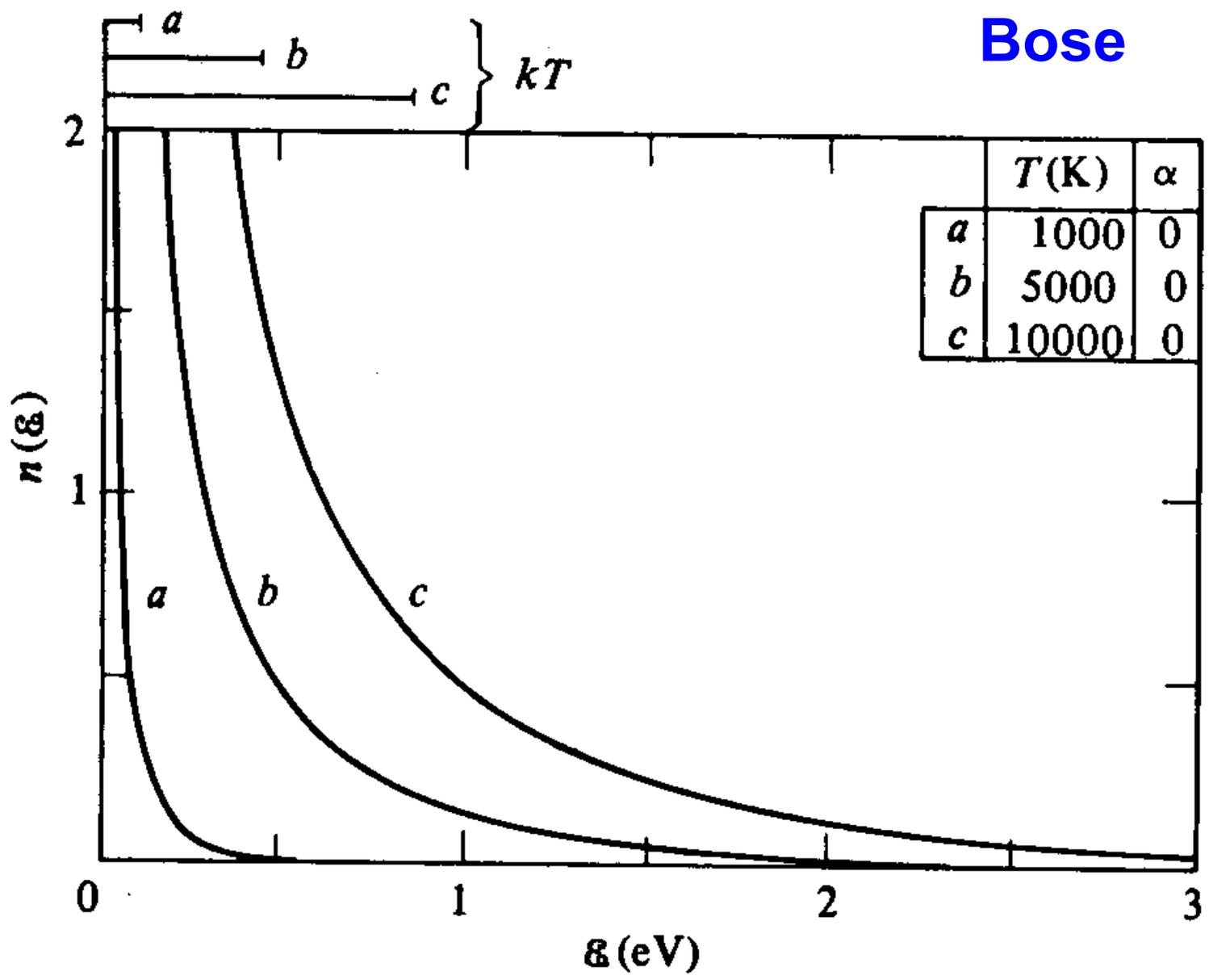
$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}$$

A é uma constante de normalização cujo valor, para uma dada T , depende do número total de partículas do sistema. Dessa forma, $n(\varepsilon)$ é o número médio de partículas no estado ε .

Boltzmann

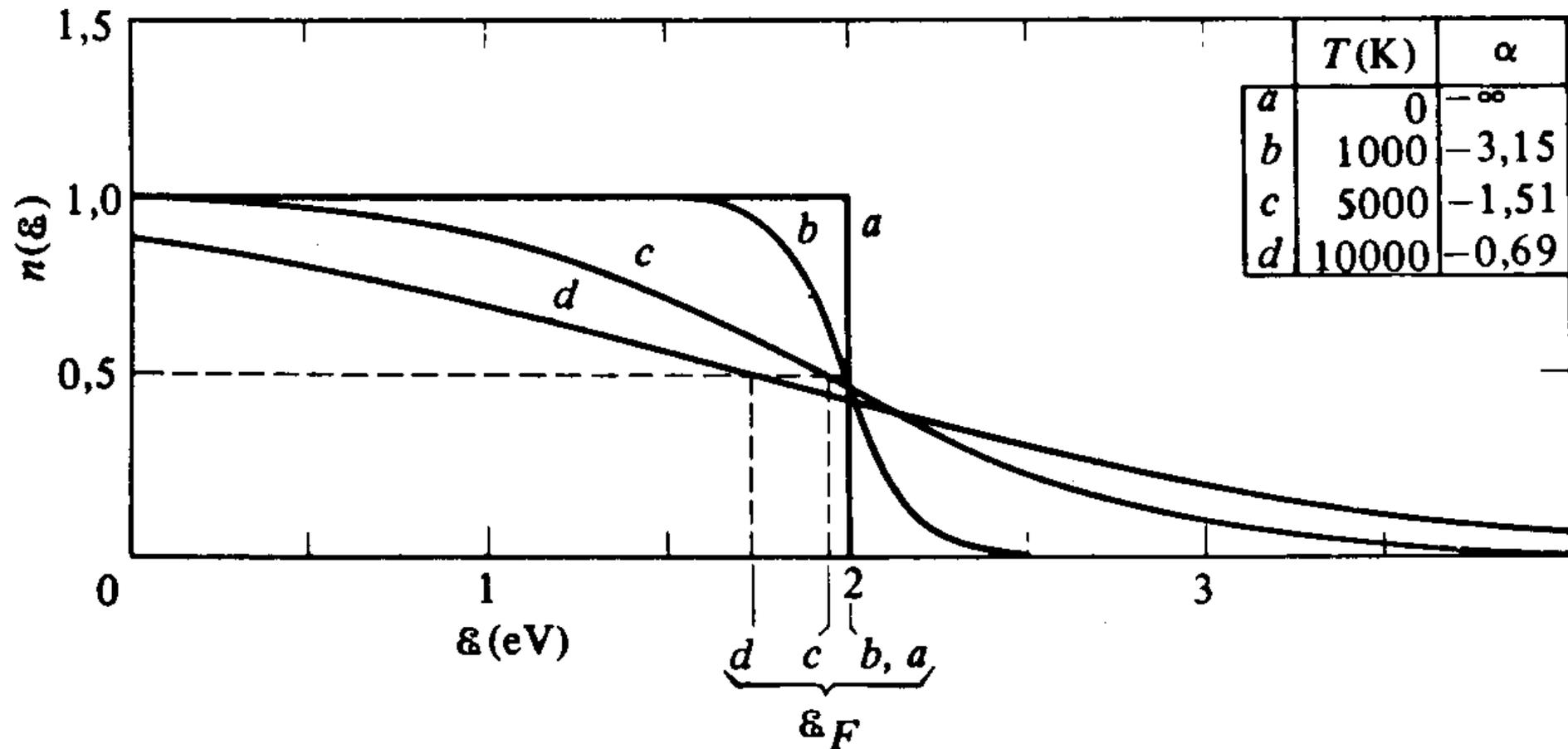
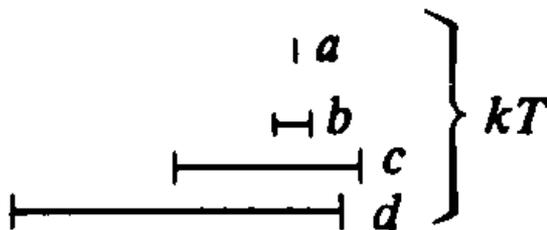


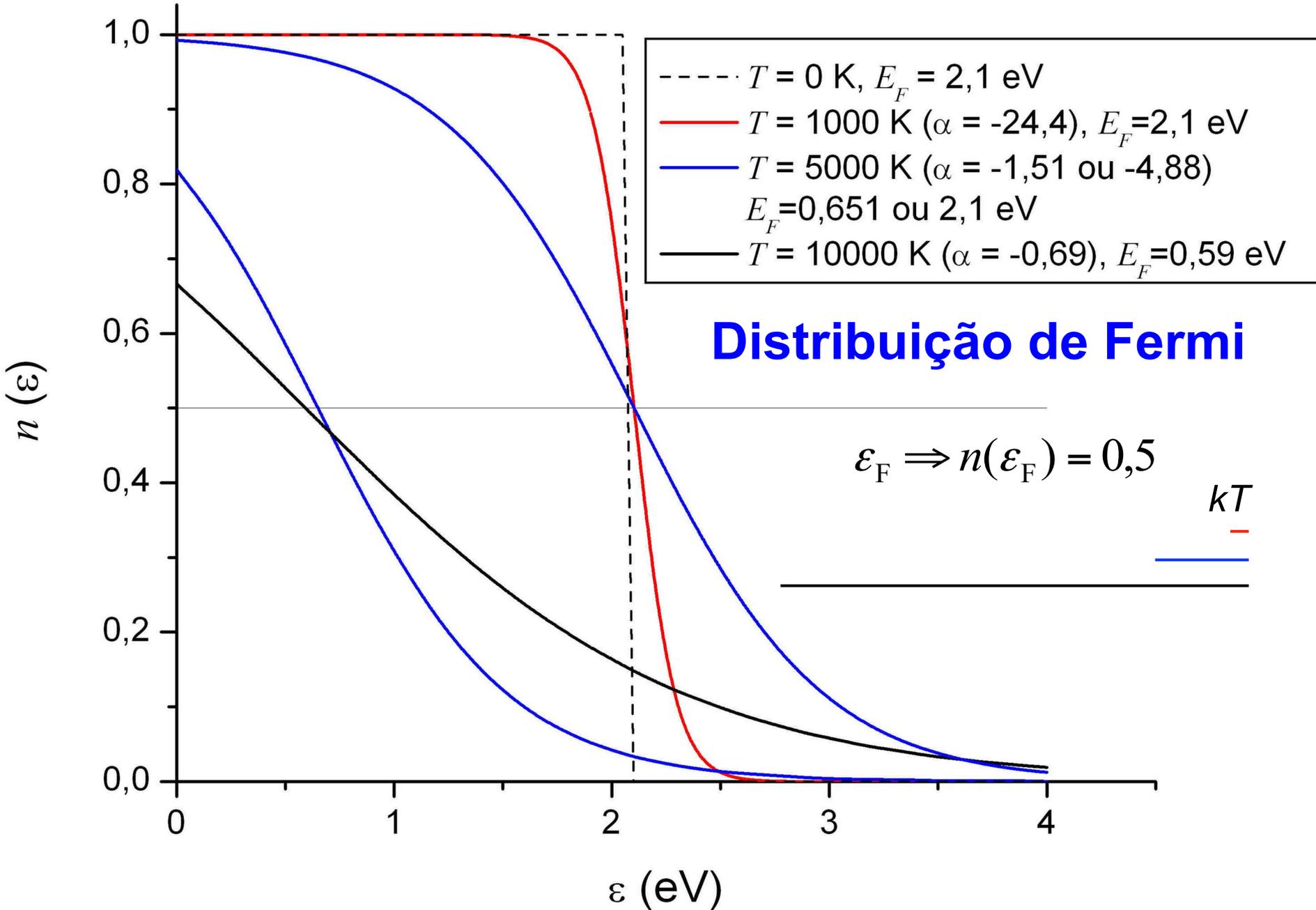
Bose

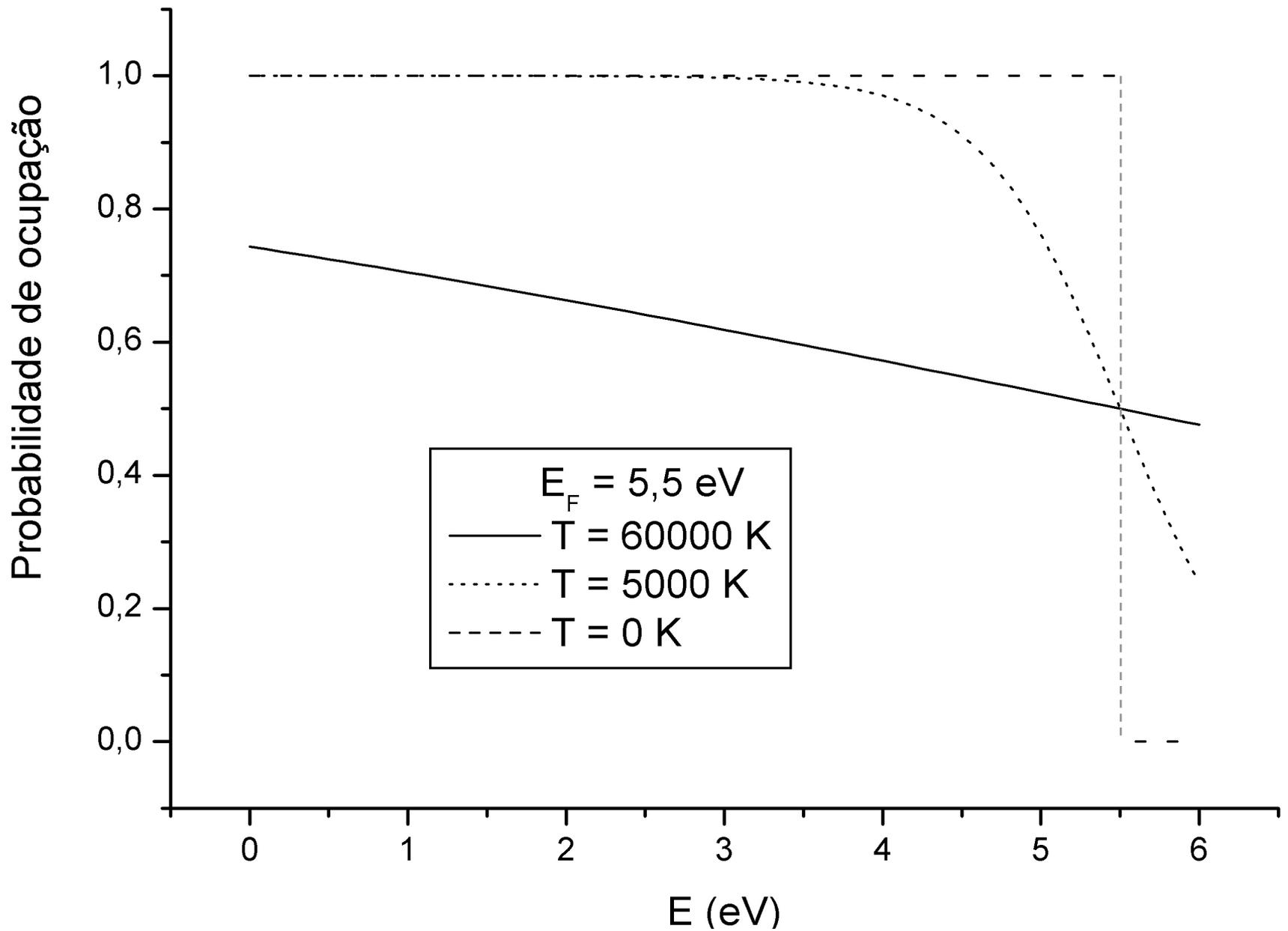


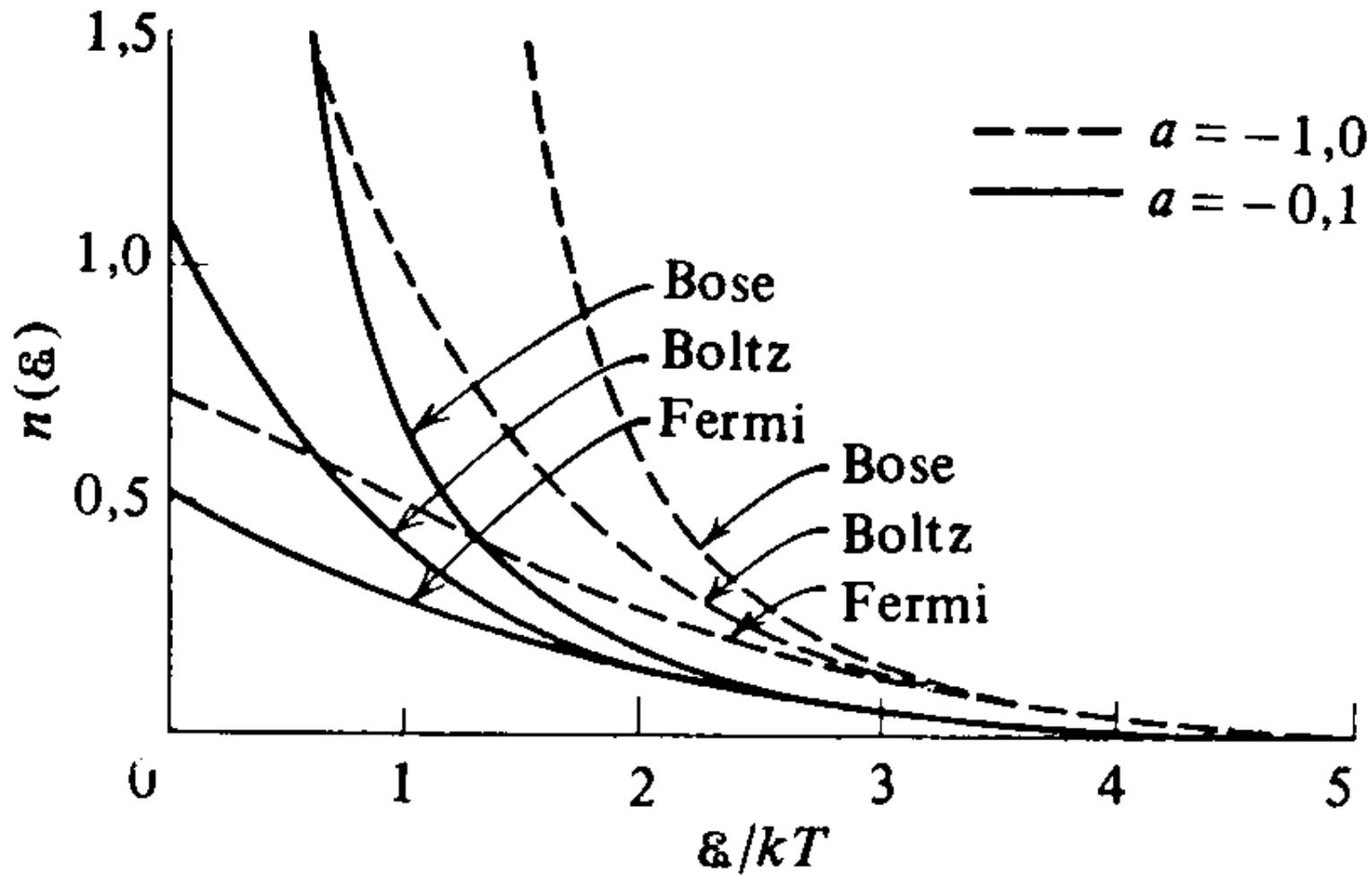
cuidado! gráfico errado!

Fermi









Limite $\epsilon \gg kT \Rightarrow n_{\text{Boltz}} \sim n_{\text{Bose}} \sim n_{\text{Fermi}} \ll 1$