P3/Noturno – 01/07/2015 – Eletromagnetismo II

Q1 - Trata-se de matéria vista em sala de aula – a derivação pode ser encontrada nas notas de aula.

Q2 - Uma onda plana $\psi_0 \, e^{ikz}$ incide normalmente em um anteparo com orifício retangular de lados $2a$ e $2b$, como mostra a figura 1.a.

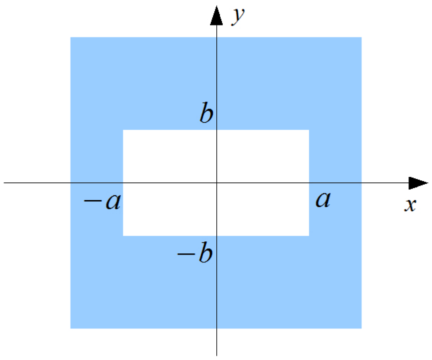


Figura 1.a

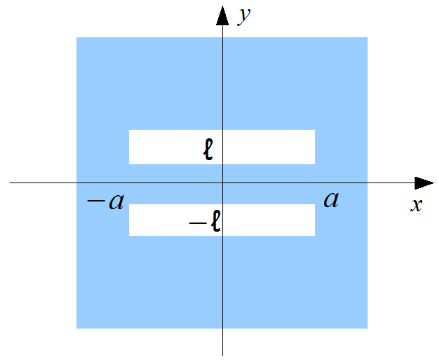


Figura 1.b

a) Utilizando a integral difração escrita como:

$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{I_0}{4A^2}} e^{ik\phi} \int_{S_0} dS' \, e^{-ik\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]/2r},$$

onde ϕ é uma fase sem importância, encontre a função de onda ψ emergente da abertura na aproximação de Fraunhofer.

b) Considere agora a situação é representada pela figura 1.b. Na região central desta abertura é colocado um retângulo de largura 2ℓ (na prova foi utilizado $\ell \to c$), feito do mesmo material do anteparo e que, portanto, impede a passagem da luz. Nesta configuração a função de onda ψ emergente é dada (como mostraremos mais adiante) por:

$$sen(x) - sen(y) = 2sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \, cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

é dado por:

$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{I_0}{4A^2}} \, e^{ik\phi} \, \frac{sen\left(\dfrac{kax}{r}\right)}{\dfrac{kx}{r}} \, \frac{2sen\left(\dfrac{ky(b-\ell)}{2r}\right) \, cos\left(\dfrac{ky(b+\ell)}{2r}\right)}{\dfrac{ky}{2r}}$$

Explique sua resposta.

c) Suponha que os seguintes limites são tomados:

$$\left.\begin{array}{r} a \to \infty \\ \\ \Delta d = (b - \ell) \to 0 \end{array}\right\} \qquad \text{tal que} \qquad \lim_{\substack{a\to\infty \\ \Delta d \to 0}} A = \lim_{\substack{a\to\infty \\ \Delta d \to 0}} a \times \Delta d = constante.$$

Descreva a situação após o emprego dos limites descritos acima. Neste "novo problema", ψ poderá depender de x? Dica, um desenho poderá ajudar na explicação.

d) Em termos puramente algébricos, o limite $a \to \infty$ é equivalente à $x \to 0$ no próximo passo; Sabendo disso e definindo $sen\theta = x/r$, calcule a intensidade para ψ (encontrado no item **b**) nos limite $x \to 0$ e $\Delta d \to 0$. Você reconhece o resultado final? Ele é compatível com a situação que descrevestes no item **c** deste mesmo problema?

SOLUÇÃO:

a) Feito em sala de aula:

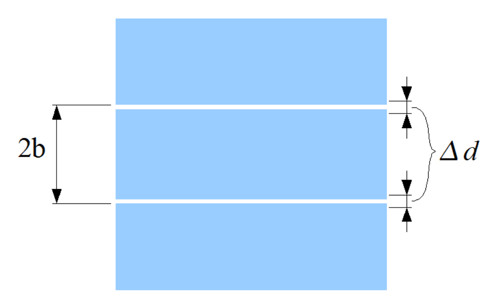
$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{I_0}{4A^2}} e^{ik\phi} \frac{2sen\left(\dfrac{kax}{r}\right)}{\dfrac{kx}{r}} \frac{2sen\left(\dfrac{kby}{r}\right)}{\dfrac{kby}{r}}$$

b) Direto por Babinet, basta utilizar a resposta do item **a** corretamente, como mostrado a seguir:

$$\psi \;=\; \psi_{a)}(x,y;a,b) - \psi_{a)}(x,y;a,\ell) = \sqrt{\frac{I_0}{4A^2}} e^{ik\phi} \frac{2sen\left(\dfrac{kax}{r}\right)}{\dfrac{kx}{r}} \underbrace{\left[\frac{2sen\left(\dfrac{kby}{r}\right)}{\dfrac{ky}{r}} - \frac{2sen\left(\dfrac{k\ell y}{r}\right)}{\dfrac{ky}{r}}\right]}_{\text{Expressão trigonométrica dada}}$$

$$= \sqrt{\frac{I_0}{4A^2}}\, e^{ik\phi} \frac{2sen\left(\dfrac{kax}{r}\right)}{\dfrac{kx}{r}} \frac{sen\left(\dfrac{ky(b-\ell)}{2r}\right) cos\left(\dfrac{ky(b+\ell)}{2r}\right)}{\dfrac{ky}{2r}}$$

c) O resultado será duas fendas infinitamente finas e longas. Como na direção x a fenda deve se estende infinitamente, o problema será simétrico nesta direção e, portanto, não deverá depender da variável x.



d) Definindo $y/r = sen\,\theta$ temos:

$$\begin{aligned}
\psi &= \sqrt{\frac{I_0}{4A^2}}\, e^{ik\phi}\, \overbrace{(a\,\Delta d)}^{=A}\, \frac{2sen\left(\dfrac{kax}{r}\right)}{\dfrac{kax}{r}}\, \frac{sen\left(\dfrac{ky\Delta d}{2r}\right)\, cos\left(\dfrac{kyb}{r}\right)}{\dfrac{ky\Delta d}{2r}} \\
\therefore I &= I_0 \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{sen^2\left(\dfrac{kax}{r}\right)}{\left(\dfrac{kax}{r}\right)^2}\right)}_{=1} \underbrace{\left(\lim_{\Delta d\to 0} \frac{sen^2\left(\dfrac{ky\Delta d}{2r}\right)}{\left(\dfrac{ky\Delta d}{2r}\right)^2}\right)}_{=1} cos^2\left(k\,b\,sen\,\theta\right) \\
\therefore I &= I_0\, cos^2\left(k\,b\,sen\,\theta\right)
\end{aligned}$$

Este é o resultado do experimento de Young que vismo em classe, cuja exata descrição foi apresentada no item **c**.