

3ª Prova — Eletromagnetismo II — Noturno

Duração: 120 min

Q1 [4.0]: Uma onda plana monocromática $\psi_I = \psi_0 e^{ikz}$ incide de modo normal (ou seja, perpendicularmente) sobre um anteparo que ocupa o plano $z = 0$, no qual há um orifício com um formato qualquer. A luz que passa pelo orifício é então projetada numa tela que ocupa o plano $z = L$.

A integral de difração obtida em sala de aula é dada por:

$$\psi(\vec{r}) = -i \frac{k \psi_0}{2\pi} \int_{S_0} dS' \frac{e^{ikR}}{R},$$

onde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ é a distância desde um ponto qualquer na tela (\vec{r}) e um ponto qualquer no orifício (\vec{r}').

(a) Demonstre que no limite $r \gg r'$ a integral de difração se reduz à expressão de Kirchhoff-Helmholtz:

$$\psi(x, y) \simeq -i \frac{k \psi_0}{2\pi} \frac{e^{i\phi}}{r} \int_{S_0} dx' dy' e^{i \frac{k}{2r} [(x'-x)^2 + (y'-y)^2]}.$$

Em particular, determine quem é a fase ϕ na expressão acima¹. **(2.0)**

(b) Com base na expressão acima, determine em que regiões valem as aproximações de Fraunhofer, e quando é necessário usar Fresnel. Em particular, encontre o critério que permite tomar a aproximação de Fraunhofer (o “número de Fresnel”). **(2.0)**

¹Sim, a fase ϕ é irrelevante quando tomamos a intensidade da onda, $I = |\psi|^2$!

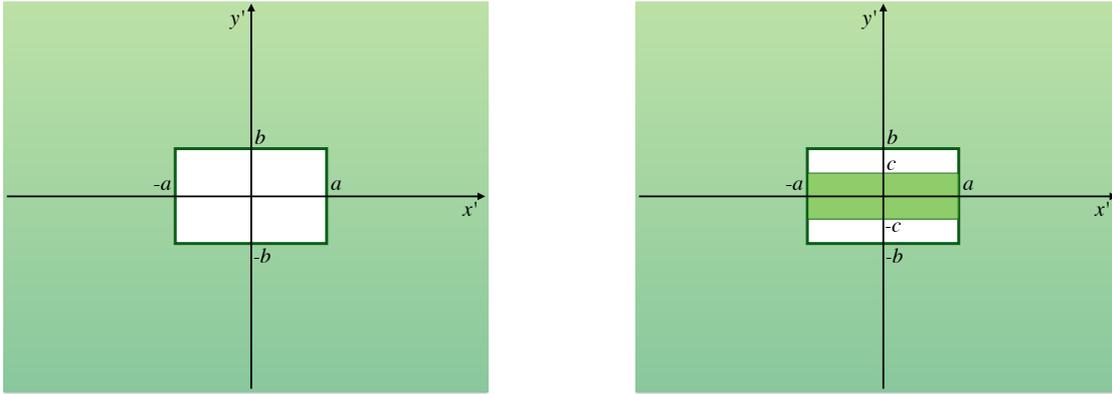


Figura 1: Esquerda: anteparo (no plano $\{x', y'\}$) e abertura retangular de largura $2a$ e altura $2b$. Direita: um anteparo retangular de largura $2a$ e altura $2c$ é colocado na abertura original, deixando abertas duas fendas, de largura $2a$ e largura $b - c$.

Q2 [6.0]: Uma onda plana monocromática $\psi_0 e^{ikz}$ incide num anteparo que ocupa todo o plano $z = 0$, no qual é recortada uma abertura retangular – veja o painel esquerdo da Figura acima. A luz é então projetada numa tela plana, paralela ao anteparo, a uma distância L do mesmo.

Na aproximação de Fraunhofer (que você deve ter re-obtido na questão anterior) temos que:

$$\psi(x, y) \simeq -i \frac{k \psi_0}{2\pi} \frac{e^{i\tilde{\phi}}}{r} \int_{S_0} dx' dy' e^{-i \frac{k}{r} (xx' + yy')} .$$

A partir dessa expressão, responda:

- Qual é a intensidade da luz projetada na tela, como função de x e y ? **(1.0)**
- Considere agora que um anteparo retangular de largura $2a$ e altura $2c$ é colocado na abertura original, de forma que a abertura fica limitada a duas fendas, de largura $2a$ e altura $d = b - c$ (veja o painel da direita da Figura). Encontre a intensidade de luz que é projetada na tela nessa nova configuração. **(2.0)**

Dica: Você talvez ache útil empregar a identidade $\sin(X) - \sin(Y) = 2 \sin[(X - Y)/2] \cos[(X + Y)/2]$.

- Usando a resposta obtida no item anterior, considere a situação onde as duas fendas ficam muito largas ($a \rightarrow \infty$) e muito finas ($d \rightarrow 0$), mas de tal modo que a área de cada uma das fendas, $A = ad$, permanece constante. Nesse limite o padrão de difração depende de x ? Qual a situação física que corresponde a esse limite? **(2.0)**
- Matematicamente, deveríamos obter o mesmo resultado do item (c) se, em lugar de tomar os limites $a \rightarrow \infty$ e $d \rightarrow 0$ (com A constante) na expressão encontrada no item (b), tomássemos os limites $x \rightarrow 0$ e $d \rightarrow 0$ (sempre mantendo A constante) na expressão obtida no item (b). Utilize esses limites ($x \rightarrow 0$ e $d \rightarrow 0$) para calcular a intensidade da onda projetada na tela. Esse resultado é compatível com o que você obteve no item (c)? **(1.0)**