**$3^a$ Prova — Eletromagnetismo II — Diurno**
**Duração: 120 min**

**Q1 [4.0]:** Uma onda plana monocromática $\psi_I = \psi_0\, e^{ikz}$ incide de modo normal sobre um anteparo que ocupa o plano $z' = 0$. No anteparo há um orifício com um formato qualquer, de área $A$, como indicado na figura abaixo.

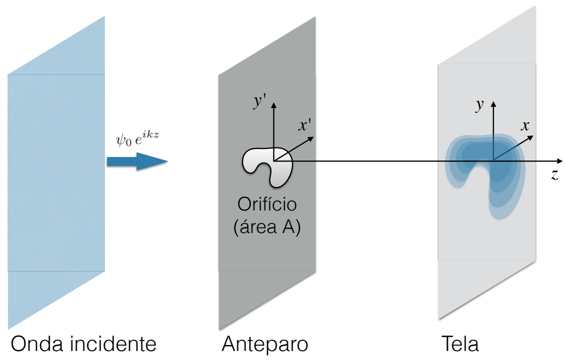


Figura 1: Uma onda plana incide sobre um anteparo, no qual foi cortado um orifício, e depois é projetada numa tela. A potência da onda que passa pelo orifício acaba projetada na tela.

A integral de difração de Kirchhoff-Helmholtz é dada por:

$$\psi(x,y) = -i\frac{k\,\psi_0}{2\pi}\,\frac{e^{i\phi}}{r}\int_{S_0} dx'\,dy'\,e^{i\frac{k}{2r}\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]} \,,$$

onde $\phi$ é uma fase irrelevante, que cancela quando tomamos $|\psi(x,y)|^2 = \psi(x,y)\times\psi^*(x,y)$.

**A potência transmitida pela onda incidente através do orifício é dada por $P = |\psi_0|^2 \times A$. Demonstre que há conservação de energia nesse problema – ou seja, mostre que a potência total projetada na tela, $P_T = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, |\psi(x,y)|^2$, é igual à potência transmitida através do orifício.**

*Dica:* use que $\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{iqu} = 2\pi\,\delta_D(q)$, onde $\delta_D$ é a função delta de Dirac. Talvez você também precise usar a propriedade: $\delta_D(c\,q) = (1/c)\delta_D(q)$ .

**Resposta**

Usando a notação simplificada $(\vec{x}\,' - x)^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$ temos:

$$\begin{aligned}
P_T &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\,\psi(x,y)\times\psi^*(x,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{-i\frac{k\,\psi_0}{2\pi}\,\frac{e^{i\phi}}{r}\int_{S_0} dx'\,dy'\,e^{+i\frac{k}{2r}(\vec{x}\,'-\vec{x})^2}\right\} \times \left\{+i\frac{k\,\psi_0^*}{2\pi}\,\frac{e^{-i\phi}}{r}\int_{S_0} dx''\,dy''\,e^{-i\frac{k}{2r}(\vec{x}\,''-\vec{x})^2}\right\} .
\end{aligned}$$

Os termos quadráticos $x^2$ e $y^2$ que aparecem em cada uma das exponenciais acima cancelam, já que em cada uma delas esses termos aparecem com sinais diferentes. Além disso, na integral de Helmholtz-Kirchhoff é implícita a aproximação de que o raio do orifício até a tela permanece aproximadamente constante, $r = \sqrt{x^2+y^2+L^2} \to L$, e portanto podemos escrever, após inverter a ordem das integrações:

$$P_T = \frac{k^2\,|\psi_0|^2}{(2\pi r)^2}\int_{S_0} dx'\,dy'\,e^{+i\frac{k}{2r}(\vec{x}\,')^2} \times \int_{S_0} dx''\,dy''\,e^{-i\frac{k}{2r}(\vec{x}\,'')^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\; e^{+i\frac{k}{r}(\vec{x}\,'-\vec{x}\,'')\cdot\vec{x}} \,.$$

Pelas fórmulas dadas no enunciado, as últimas duas integrais acima (em $x$ e $y$) são simplesmente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{+i\frac{k}{r}(x'-x'')x} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{+i\frac{k}{r}(y'-y'')y} = \left[2\pi\delta_D\left(\frac{k}{r}(x'-x'')\right)\right]\left[2\pi\delta_D\left(\frac{k}{r}(y'-y'')\right)\right] = \left(\frac{2\pi r}{k}\right)^2 \delta_D(x'-x'')\delta_D(y'-y'') \,. \quad (1)$$

Substituindo essa expressão de volta na equação para $P_T$ temos que:

$$\begin{aligned} P_T &= |\psi_0|^2 \int_{S_0} dx'\, dy'\, e^{+i\frac{k}{2r}(x'^2+y'^2)} \times \int_{S_0} dx''\, dy''\, e^{-i\frac{k}{2r}(x''^2+y''^2)} \times \delta_D(x'-x'')\delta_D(y'-y'') \\ &= |\psi_0|^2 \int_{S_0} dx'\, dy' = |\psi_0|^2\, A \,. \end{aligned}$$

---

**Q2 [6.0]:** Uma onda plana monocromática $\psi_0\, e^{ikz}$ incide normalmente em um anteparo que ocupa todo o plano $(x', y' < 0)$, como na figura abaixo[1]. A luz é projetada numa tela a uma distância $L$ do anteparo. A intensidade da luz na tela obedece um padrão de difração $I(y)$, aproximadamente como está indicado no painel da esquerda da Fig. 2 (na próxima página).

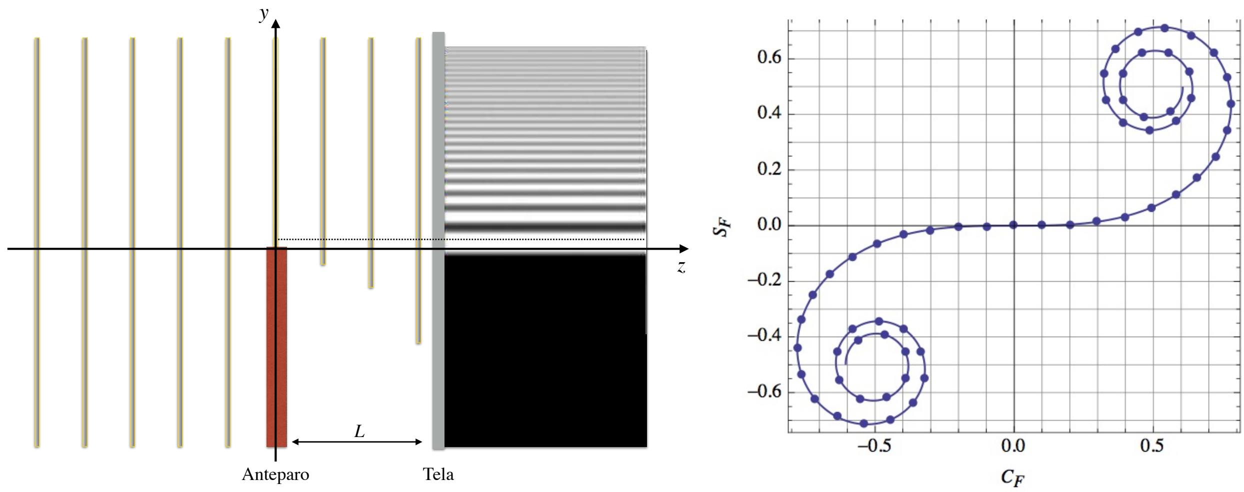


Figura 2: Esquerda: uma onda plana incide sobre um anteparo limitado ao semi-plano infinito $y < 0$, sendo depois projetada na tela. Direita: cosseno $C_F(u)$ e seno $S_F(u)$ de Fresnel. Os pontos marcam intervalos de $\Delta u = 0.1$, com $u = 0$ sendo a origem. A posição $\{C_F = -1/2, S_F = -1/2\}$ corresponde a $u \to -\infty$, e a posição $\{C_F = 1/2, S_F = 1/2\}$ corresponde a $u \to \infty$.

De um modo totalmente geral, usando a integral de difração (dada também no enunciado da **Q1**), podemos expressar a função de onda em termos das funções Seno e Cosseno de Fresnel (painel da direita da Fig. 2):

$$\int_0^u dt\, e^{i\frac{\pi}{2}t^2} = F(u) = C_F(u) + iS_F(u) \,.$$

Usando $F(-u) = -F(u)$, para uma geometria retangular qualquer $\{x'_{min} \le x' \le x'_{max}\,,\, y'_{min} \le y' \le y'_{max}\}$

[1] Este exercício fornece as bases de uma técnica astronômica conhecida como **ocultação**. Considere um corpo celeste (a fonte de luz — por exemplo, uma estrela) que está escondido atrás de um outro, que bloqueia a luz (o anteparo — por exemplo, a Lua). À medida que a Lua se desloca no céu e vai revelando a fonte que estava "oculta" por trás dela, os detectores apontados para a estrela medem uma curva de intensidade que corresponde ao padrão de difração de uma aresta, como indicado na Fig. 2. Essa técnica foi muito utilizada no passado para determinar com precisão a posição de fontes de rádio no céu. Variantes dessa técnica são atualmente utilizadas em coronógrafos (instrumentos que observam o Sol), e também para estudar planetas extra-solares, já que a técnica permite medir as velocidades de rotação dos planetas em torno das estrelas.

temos que:

$$\psi(x,y) = -i\frac{k\,\psi_0}{2\pi}\frac{e^{i\phi}}{r}\frac{\pi r}{k}\left[F(u_x^+) - F(u_x^-)\right]\left[F(u_y^+) - F(u_y^-)\right] \ ,$$

onde definimos $u_x^+ = \sqrt{\frac{k}{\pi r}}\,(x'_{max} - x)$, $u_x^- = \sqrt{\frac{k}{\pi r}}\,(x'_{min} - x)$, e analogamente para $u_y^{\pm}$.

Para responder as questões abaixo você vai precisar dos limites assintóticos do Seno e Cosseno de Fresnel:

$$\lim_{u\to 0} F(u) \approx u + i\frac{\pi}{6}u^3 + \mathcal{O}(u^5) \ ,$$

e também:

$$\lim_{u\to\infty} F(u) \approx \frac{1}{2}(1+i) - \frac{i}{\pi\,u}e^{i\frac{\pi}{2}u^2} + \mathcal{O}(u^{-3}) \ .$$

(a) Obtenha a intensidade da onda projetada na tela como função de $y$, para qualquer valor de $y$. Expresse essa intensidade em termos da intensidade da onda incidente ($I_0 = |\psi_0|^2$). **(1.0)**

(b) Qual o valor de $I(y=0)$? Expresse sua resposta em termos de $I_0$. **(1.5)**

(c) Qual a intensidade da luz projetada na tela quando $y \to \infty$? E quando $y \to -\infty$? Justifique suas respostas com cálculos, utilizando os limites assintóticos acima. **(1.5)**

(d) O gráfico da direita da Fig. 2 mostra as funções seno e cosseno de Fresnel como funções do parâmetro $u$, em intervalos de $\Delta u = 0.1$ . Encontre (graficamente) a posição $y_1$ que marca o primeiro máximo da intensidade da luz projetada na tela (linha pontilhada no diagrama da esquerda da Fig. 2). Qual o valor dessa intensidade máxima $I_1 = I(y_1)$? Expresse o resultado em termos de $I_0$. **(2.0)**

**Resposta**

(a) Levando em conta que quando $x \to \infty$ temos $C_F = S_F = 1/2$, a função de onda fica expressa como:

$$\psi(y) = \frac{-i\psi_0\,e^{i\phi}}{2}\,[1+i]\left[\frac{1}{2}(1+i) + C_F\left(\sqrt{\frac{k}{\pi\,r}}\;y\right) + iS_F\left(\sqrt{\frac{k}{\pi\,r}}\;y\right)\right] \ . \tag{2}$$

(b) Quando tomamos $y \to 0$ temos $C_F = S_F = 0$, e assim:

$$\psi(y=0) = \frac{-i\psi_0\,e^{i\phi}}{2}\,[1+i]\left[\frac{1}{2}(1+i)\right] \ . \tag{3}$$

Portanto,

$$I(y=0) = |\psi(y=0)|^2 = |\psi_0|^2\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}|\psi_0|^2 \ . \tag{4}$$

(c) Quando tomamos $y \to \infty$ temos $C_F = S_F = 1/2$. Portanto:

$$\psi(y\to\infty) = \frac{-i\psi_0\,e^{i\phi}}{2}\,[1+i]\,[1+i] = \psi_0\,e^{i\phi} \ , \tag{5}$$

o que significa que $I(y\to\infty) = |\psi_0|^2 = I_0$. Ou seja, muito acima da fresta a onda incidente segue sem obstrução alguma e termina projetada na tela, com a intensidade original $I_0$.

Por outro lado, Quando tomamos $y \to -\infty$ temos $C_F = S_F = -1/2$. Portanto:

$$\psi(y\to\infty) = \frac{-i\psi_0\,e^{i\phi}}{2}\,[1+i] \times 0 = 0 \ , \tag{6}$$

o que significa que $I(y\to-\infty) = 0$. Ou seja, muito abaixo da fresta nenhuma luz está passando, e a intensidade é nula.

(d) A intensidade será máxima quando a amplitude (o módulo) da função de onda atingir um máximo. Isso ocorre quando $|(1+i)/2 + C_F(u) + iS_F(u)|^2 = |C_F(u) + iS_F(u) - [-(1+i)/2]|^2$ é máximo. Ou seja, a questão é: qual ponto nesse gráfico corresponde à maior distância ao ponto $\{C_F, S_F\} = \{-1/2, -1/2\}$? Claramente, esse ponto pode ser encontrado traçando uma reta inclinada a $45^o$ desde o centro da espiral de baixo, passando pelo centro da espiral de cima.
Olhando para o gráfico da "espiral de Cornu" (Fig. 2, painel da direita) vemos que o esse ponto está aproximadamente em $u_1 \simeq 1.35$, onde $C_F(u_1) \simeq S_F(u_1) \simeq 0.65$ (Obs: eu aceitarei qualquer resposta que esteja próxima desses valores, desde que a argumentação seja correta.)
O próximo ponto onde teremos um máximo vai acontecer quando a espiral der uma volta completa e cruzar novamente a reta a $45^o$. Isso deve ocorrer para $u_2 \simeq 2.45$, onde $C_F(u_2) \simeq S_F(u_2) \simeq 0.6$. E assim por diante.
A posição $y_1$ é, portanto, dada por $u_1 = \sqrt{k/\pi r}\, y_1 \simeq 1.35$, ou seja, $y_1 \simeq 1.35\sqrt{\pi r/k} = 1.35\sqrt{\lambda r/2}$.
A amplitude da onda naquele ponto é:

$$\psi(y_1) \simeq \frac{-i\psi_0\, e^{i\phi}}{2} [1+i] [0.5(1+i) + 0.65(1+i)] = 1.15\ \psi_0\, e^{i\phi} \,, \tag{7}$$

o que significa que a intensidade naquele ponto de "máximo" é um pouco maior do que a intensidade da onda incidente, $I(y_1) \simeq (1.15)^2\ I_0 \simeq 1.3\ I_0$.