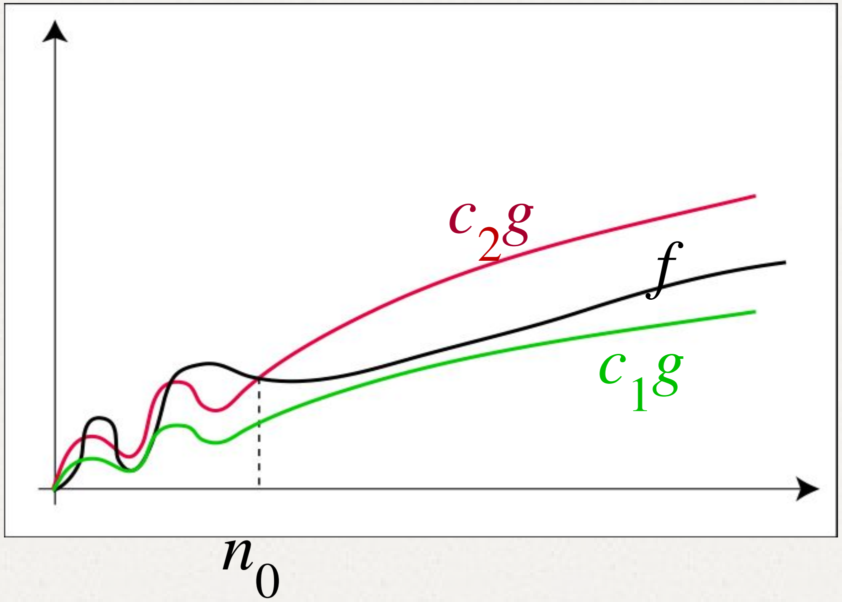
Tópico 2: Crescimento de Funções

Notação - Θ

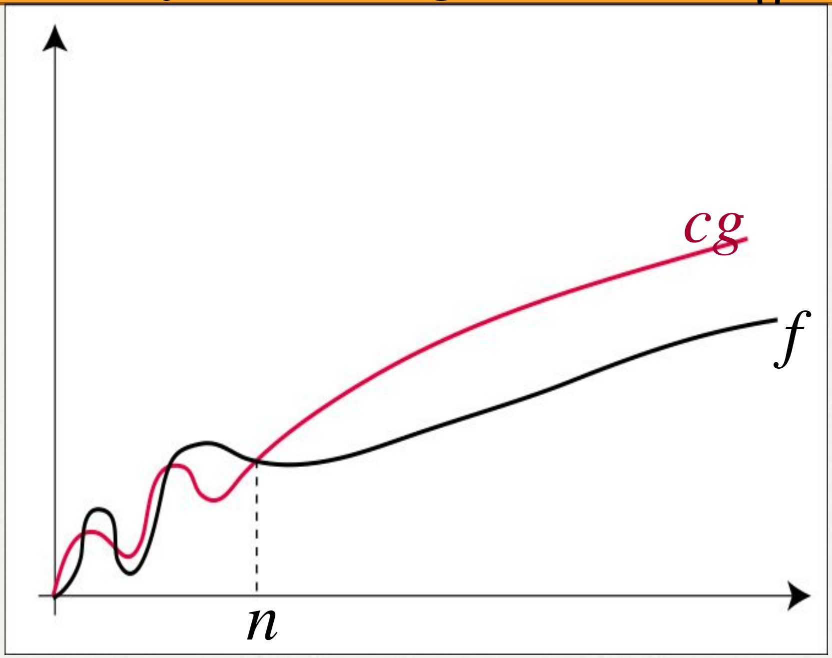
$$\Theta(\boldsymbol{g(n)}) = \{ f(n) : \exists\, c_1, c_2 > 0, n_0 > 0 \text{ tais que } 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0 \}$$



Notação - *O*

$\mathbf{O}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n})) = \{ f(n) : \exists\, c > 0, n_0 > 0$ tais que

$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall\, n \geq n_0 \}$



0

Notação - O

- $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
  - $an^2+bn+1 \in \Theta(n^2) \Rightarrow an^2+bn+1 \in O(n^2)$.
  - $an+b \in O(n^2)$, mas $an+b \notin \Theta(n^2)$.
- $f(n)=\Theta(g(n))$ define limitantes assintoticamente apertados (tight) para f(n).
- $f(n)=O(n)$ define limitantes superiores, ou seja, alguma constante c define g(n) como um limitante superior para f(n). Não há nehuma argumento a respeito de quão apertado é esse limitante superior.

Notação - *O*

- Observe que *$O(n^2)$* significa que há uma função que é *$O(n^2)$* tal que para qualquer valor de *n*, não importa o tamanho específico da entrada n escolhido, o tempo de execução daquela entrada é *$O(n^2)$.*

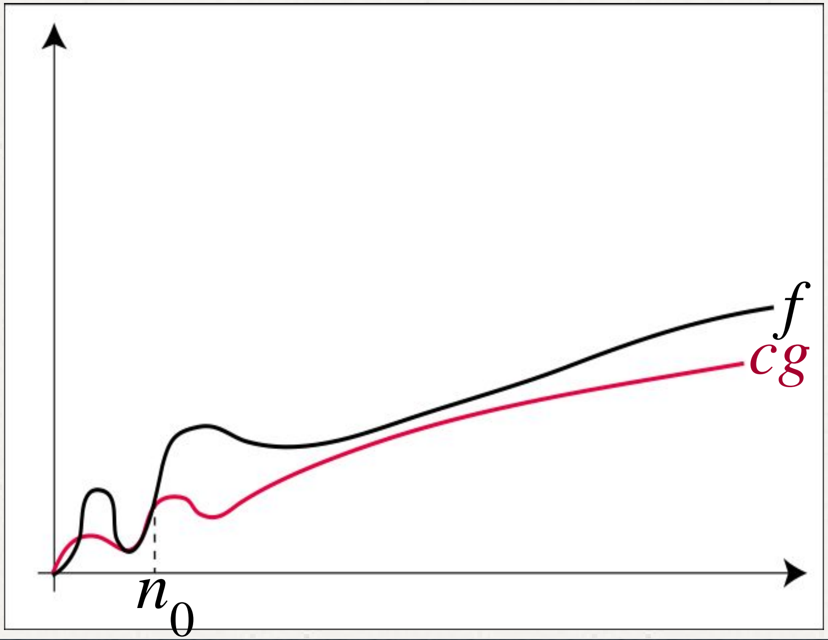
- Isso significa que o tempo de execução no pior caso é $O(n^2)$.

Notação - *O*

- Por exemplo, dizer que o tempo de execução do *insertion-sort* é $O(n^2)$ é uma abuso já que seu tempo de execução depende da entrada.
  - Se os dados de entrada estão ordenadas, o *insertion-sort* é $O(n)$ - melhor caso !
  - Logo, o *insertion-sort* é $O(n^2)$ no pior caso.

Notação - Ω

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) : \exists\, c > 0, n_0 > 0 \text{ tais que } 0 \le c \cdot g(n) \le f(n) \;\; \forall n \ge n_0 \}$$



EXEMPLOS:

(1) $\boldsymbol{3n^3+2n^2} = \Omega(n^3)$: $n>0$ e $c=1$

(2) Seja $f(n)=n$ para n ímpar e $f(n)=n^2/10$ para n par

$f(n)= \Omega(n^2)$: n par e $c=1/10$.

- **Teorema**: Para duas funções f(n) e g(n), f(n)=Θ(g(n)) se e somente se, f(n)=O(g(n)) e f(n)=Ω(g(n)).

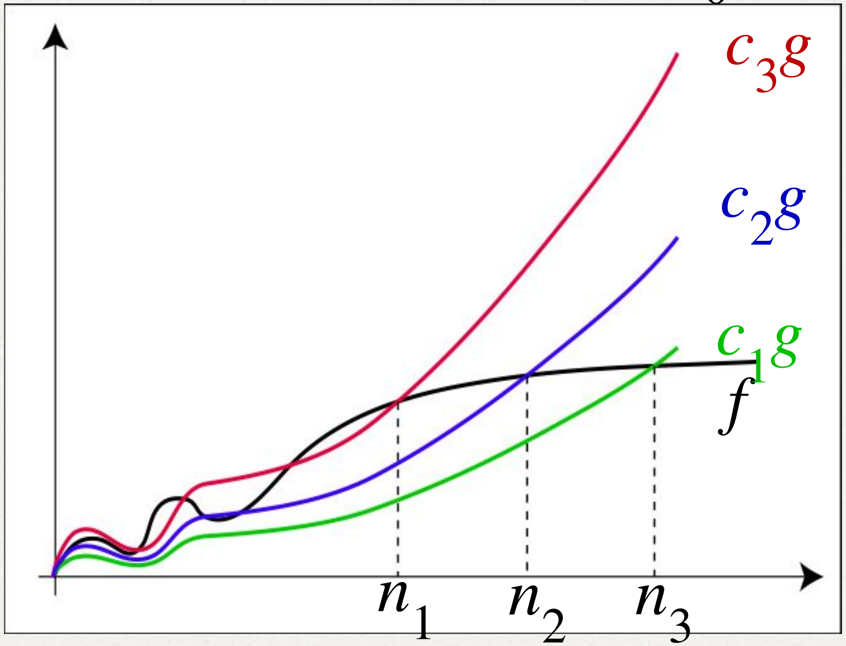
- Temos que Θ(g(n)) = O(g(n)) ∩ Ω(g(n)).

- Na prática, utiliza-se os limitantes assintóticos superior O(g(n)) e inferior Ω(g(n)) para se chegar a um limitante assintótico firme (*tight*) Θ(g(n)).

EXEMPLO3: $\frac{1}{2}n^2 - 2n = \Theta(n^2)$

Notação - *o*

$$\boldsymbol{o(g(n))} = \{ f(n) : \forall c > 0 \ \exists n_0 > 0 \text{ tais que } f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

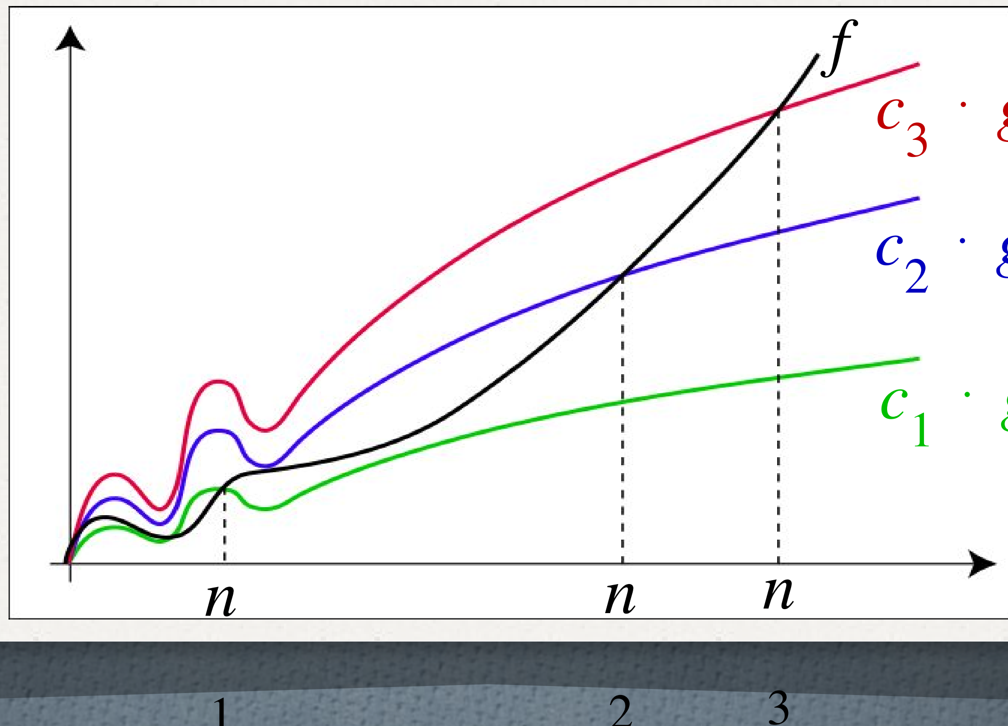


- $O(g(n))$ é um limite assintótico superior que pode ou não ser assintoticamente firme.
  - **Exemplo4**: $2n^2=O(n^2)$ é firme, $2n=O(n^2)$ não é firme.
- $o(g(n))$ define um limite superior que não é assintoticamente firme.
  - **Exemplo5**: $2n=o(n^2)$, mas, $2n^2 \neq o(n)$

- Para $f(n)=O(g(n))$, temos $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ sendo válida para alguma constante $c>0$.
- Para $f(n)=o(g(n))$, temos $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ sendo válida para toda constante $c>0$.

Notação - ω

$$\omega(\boldsymbol{g(n)}) = \{\, f(n) : \forall c > 0 \ \exists n_0 > 0 \text{ tais que } 0 \le c \cdot g(n) \le f(n) \ \forall n \ge n_0 \}$$



Propriedades

$$f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 .$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty ,$$

Propriedades

Transitividade:

$$f(n)=O(g(n)) \text{ e } g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$

$$f(n)=\Omega(g(n)) \text{ e } g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$$

$$f(n)=\Theta(g(n)) \text{ e } g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$$

Reflexividade:

$$f(n) = O(f(n))$$

$$f(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = \Theta(f(n))$$

Propriedades

Simetria:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

Reflexividade:

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$$

Teorema:

$$f(n) = O(g(n)) \text{ e } f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

Propriedades

- *Analogia entre f(n) e g(n) com a e b reais:*

  - $f(n)=O(g(n))$ é como a $\leq$ b.
  - $f(n)=\Omega(g(n))$ é como a $\geq$ b.
  - $f(n)=\Theta(g(n))$ é como a $=$ b.
  - $f(n)=o(g(n))$ é como a $<$ b.
  - $f(n)=\omega(g(n))$ é como a $>$ b.

Propriedades

- *Nos reais temos que a>b ou a=b ou a<b.*
- *Porém, podemos ter* $f(n) \notin O(g(n))$ e $f(n) \notin \Omega(g(n))$.

- **Exemplo6**: Não podemos comparar n e $n^{1+sen(n)}$ usando notação assintótica.

Propriedades

$f(n) = o(g(n)) \Longrightarrow a^{f(n)} = o(a^{g(n)})$, for any $a > 1$.

$f(n) = \Theta(g(n)) \not\Longrightarrow a^{f(n)} = \Theta(a^{g(n)})$

$f_1(n)=O(g_1(n))$ e $f_2(n)=O(g_2(n))$

$\Rightarrow f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$

$f(n) = O(g(n)) \ \Rightarrow \ f(n) + g(n) = O(g(n))$

Conceitos

- Uma função $f(n)$ é monotonicamente crescente se $m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$.
- Uma função $f(n)$ é monotonicamente decresente se $m \leq n \Rightarrow f(m) \geq f(n)$.
- Uma função $f(n)$ é estritamente crescente se $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$.
- Uma função $f(n)$ é estritamente decrescente se $m < n \Rightarrow f(m) > f(n)$.

Conceitos

- Função Piso
  - $\forall x \in \Re$, o maior inteiro menor que ou igual a x é denotado por $\lfloor x \rfloor$.
- Função teto
  - $\forall x \in \Re$, o menor inteiro maior que ou igual a x é denotado por $\lceil \mathrm{x} \rceil$.
- $\forall x \in \Re, x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1.$
- As duas funções são monotonicamente crescentes.

Conceitos

- Aritmética modular
  - Se a e b são inteiros e n é um inteiro positivo, então a é congruente com b módulo n se n divide a−b.
  - $a \equiv b \bmod n$
    - $b \bmod n = b - b \lfloor b/n \rfloor$.
    - $0 \leq b \bmod n < n$
- **Exemplo7**: $17 \equiv 5 \bmod 6$?? $24 \equiv 14 \bmod 6$??
- n é um divisor de (b-a).

Conceitos

- ***Exponencial***
  - $\forall$ n e $a \geq 1$, f(n)= a^n .
  - f(n)= a^n é monotonicamente crescente.
- Para todas as constantes reais a e b tal que $a > 1$,

  $$n^b = o(a^n)$$

- Qualquer função exponencial com base a estritamente maior que 1 cresce mais rápido que qualquer função polinomial.

Conceitos

- Para e=2.71828… temos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

- Para todo real x temos $e^x \geq 1+x$
- Para $|x| \leq 1$ temos $1+x \leq e^x \leq 1+x+x^2$
- Para $x \to 0$ temos $e^x = 1+x+\Theta(x^2)$
- Para todo x, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x .$$

Conceitos

- ***Logaritmo***
  - $\lg n = \log_2 n$
  - $\ln n = \log_e n$
  - $\lg^k n = (\lg n)^k$
  - $\lg \lg n = \lg(\lg n)$
  - $\lg n + k = (\lg n) + k.$
- Para qualquer constantes reais a e b tal que $a>0$,
  $\lg^b n = o(n^a)$
- Qualquer função polinomial positiva cresce mais rápido que qualquer função polinomial logaritmica.

Conceitos

- ***Para todos os reais a>0, b>0, c>0 e n, temos***
  - $a = b^{logb(a)}$
  - $\log_c(ab) = \log_c(a) + \log_c(b)$
  - $\log_b a^n = n\log_b a$
  - $\log_b a = \log_c a / \log_c b$
  - $\log_b(1/a) = -\log_b a$
  - $\log_b a = 1/\log_a b$
  - $a^{logb(c)} = c^{logb(a)}$
- As bases dos logaritmos acima são diferentes de 1.

Conceitos

- Para |x|<1 temos:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots .$$

- Para x>-1 temos

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x ,$$

Conceitos

- ***Fatorial***
  - Para todo n, a função *n!* é dada por

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 2 \times 1$$

- Temos que:
  - $n! = o(n^n)$
  - $n! = \omega(2^n)$
  - $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$

Conceitos

- ***Função Iterativa***
  - A notação $f^{(i)}(n)$ representa a função $f(n)$ iterativamente aplicada *i* vezes a partir de um valor inicial *n*, ou, recursivamente:

    $f^{(i)}(n) = n$ if $n=0$

    $f^{(i)}(n) = f(f^{(i-1)}(n))$ if $n>0$
  - ***Exemplo:*** Para $f(n) = 2n$, *temos*

    $$f^{(2)}(n) = f(2n) = 2(2n) = 2^2 n$$

    $$f^{(3)}(n) = f(f^{(2)}(n)) = 2(2^2 n) = 2^3 n$$

    $$\ldots f^{(i)}(n) = 2^i n$$