EAE 5706: Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Aula 2: Teoria dos Jogos: Elementos Básicos

Marcos Y. Nakaguma

09/08/2017

Revisão

- Na aula passada, vimos que um jogo é descrito pelos seguintes aspectos:

  i. Jogadores

  ii. Regras

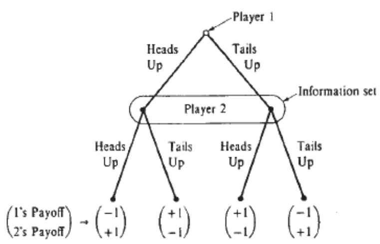
  iii. Resultados

  iv. Payoffs

Revisão

- Definimos o conceito de conjunto de informação para representar situações em que as escolhas dos demais jogadores não são observadas.

- Intuitivamente, um jogador não é capaz de distinguir entre os nodos de decisão pertencentes a um mesmo conjunto de informação:



- Definição: Um jogo é de informação perfeita se cada conjunto de informação possui um único nodo de decisão. Caso contrário, o jogo é de informação imperfeita.

Representação na Forma Extensiva

Representação na Forma Extensiva

Formalmente, um jogo na forma extensiva é caracterizado pelos seguintes elementos:

1. Um conjunto finito de jogadores, $I = \{0, 1, ..., I\}$.
2. Um conjunto finito de possíveis ações, $\mathcal{A}$.
3. Um conjunto finito de nodos, $\mathcal{X}$.
4. Uma função $p : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \cup \emptyset$ especificando um único nodo imediatamente predecessor para cada $x \in \mathcal{X}$.
   - Os nodos imediatamente sucessores de x são definidos como: $s(x) = \{y \in \mathcal{X} : p(y) = x\}$.
   - O conjunto de nodos terminais é dado por $T = \{x \in \mathcal{X} : s(x) = \emptyset\}$.

Representação na Forma Extensiva

(Cont.)

5. Uma função $\alpha : \mathcal{X} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathcal{A}$ especificando, para cada nodo x, a ação que leva de $p(x)$ para x.
   - A função $\alpha(\cdot)$ é tal que se $x', x'' \in s(x)$, com $x' \neq x''$, então $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$, i.e. a partir de um nodo qualquer, uma determinada ação leva a um único sucessor.
   - O conjunto de ações possíveis em um determinado nodo x é dado por $c(x) = \{a \in \mathcal{A} : a = \alpha(x') \text{ para algum } x' \in s(x)\}$

Representação na Forma Extensiva

(Cont.)

6. Uma coleção de conjuntos de informação, $\mathcal{H}$, e uma função $H : \mathcal{X} \backslash T \rightarrow \mathcal{H}$ especificando, para cada nodo de decisão x, um conjunto de informação $H(x) \in \mathcal{H}$.

    - Os conjuntos de informação em $\mathcal{H}$ formam uma partição de $\mathcal{X}$.
    - A função $H(\cdot)$ é tal que se $H(x) = H(x^{'})$, então $c(x) = c(x^{'})$, i.e. todos os nodos pertencentes ao mesmo conjunto de informação possuem o mesmo conjunto de ações possíveis.
    - As ações disponíveis em um conjunto de informação H são dadas por $C(H) = \{a \in \mathcal{A} : a \in c(x) \text{ para qualquer } x \in H\}$.

Representação na Forma Extensiva

(Cont.)

7. Uma função $\imath : \mathcal{H} \rightarrow I$ especificando o jogador (possivelmente a natureza) a atuar em cada um dos nodos de um dado conjunto de informação.

8. Um distribuição de probabilidade $\rho(H)$ designando probabilidades às ações possíveis em um conjunto de informação onde a natureza atua.

9. Um conjunto de funções payoff $u = \{u_1(\cdot), ..., u_I(\cdot)\}$ especificando as utilidades dos jogadores em cada um dos possíveis nodos terminais, i.e. cada $u_i : T \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função utilidade Bernoulli.

Representação na Forma Extensiva

- Assim, formalmente um jogo na forma extensiva é definido por:

$$\Gamma_E = \{\underbrace{\mathcal{X}, \mathcal{A}, I, p(\cdot), \alpha(\cdot), \mathcal{H}, H(\cdot), \imath(\cdot), \rho(\cdot)}_{\textit{Forma do Jogo}}, \underbrace{u}_{\text{Payoffs}}\}$$

Representação na Forma Extensiva

- Seguindo Aumann (1976), um postulado básico da teoria dos jogos é que todos os jogadores conhecem a forma do jogo, sabem que seus oponentes conhecem a estrutura do jogo, sabem que seus oponentes sabem que eles conhecem a estrutura do jogo, e assim por diante.
- Neste caso, dizemos que a forma do jogo é de conhecimento comum ou ("common knowledge").
- Definição: Um jogo é de informação completa se todos os seus aspectos, inclusive os payoffs dos jogadores, são de conhecimento comum.
- Dizemos que uma informação é privada se ela não é de conhecimento comum entre os jogadores.

Conhecimento Comum

- Podemos ilustrar a importância da hipótese de conhecimento comum através de uma fábula bastante conhecida em teoria dos jogos.
- Em um vilarejo distante, três casais formados por indivíduos racionais vivem de acordo com normas sociais bastante peculiares.
- Todas as noites, os três homens da vila se reunem para falar de suas mulheres.
- Se um homem acha que a sua mulher tem sido fiel, ele exalta as suas virtudes. Por outro lado, se ele tiver prova de que ela tem sido infiel, ele invoca a maldição dos deuses sobre ela.

Conhecimento Comum

- O costume dessa comunidade é tal que uma mulher infiel informa a sua infidelidade a todos os homens do vilarejo, exceto ao seu marido.
- Todos essas tradições são de conhecimento comum entre as pessoas.
- Ocorre que, neste vilarejo, todas as mulheres são infieis.
- Assim, todo homem é capaz de observar a infidelidade das demais mulheres, exceto a da sua própria esposa, e todos os maridos elogiam as suas mulheres todas as noites.

Conhecimento Comum

- Esta situação perdurou por vário anos até que um dia um viajante chega ao vilarejo e declara: "*Existe uma mulher infiel nesta vila!*".

- Nas duas noites seguintes, os homens continuaram a se encontrar e a elogiar as suas mulheres.

- Porém, na terceira noite, todos passaram a amaldiçoar suas esposas, certos de estarem sendo traídos.

- O que explica esse comportamento???

Conhecimento Comum

- Na primeira noite, um homem sabe que existem dois homens sendo traídos e sabe que todos sabem que existe um homem sendo traído:

$$\begin{tikzcd} * & \\ \boxed{*} \arrow[u] \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

Conhecimento Comum

- Na primeira noite, um homem sabe que existem dois homens sendo traídos e sabe que todos sabem que existe um homem sendo traído:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[dr] & \\ \boxed{*} & * \end{tikzcd}$$

Conhecimento Comum

- Na primeira noite, um homem sabe que existem dois homens sendo traídos e sabe que todos sabem que existe um homem sendo traído:

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ & \nwarrow & \\ \boxed{*} & & * \end{array}$$

Conhecimento Comum

- Além disso, observe que, dada a informação do viajante, um homem que não soubesse da existência de nenhum outro homem sendo traído, necessariamente deduziria que ele próprio está sendo traído:

$$\begin{array}{cc} * & \\ & \\ \boxed{*} & * \end{array}$$

Conhecimento Comum

- Portanto, como todos os homens observam pelo menos um outro homem sendo traído, todos continuam elogiando as suas mulheres.

- No entanto, ao final da primeira noite, todos sabem que todo homem sabe que pelo menos um outro homem está sendo traído.

- Assim, na segunda noite, um homem qualquer sabe que existem dois homens sendo traídos e sabe que todo homem sabe que pelo menos um homem está sendo traído.

Conhecimento Comum

- Observe que, dadas essas informações, um homem que soubesse da existência de apenas um outro homem sendo traído, necessariamente deduziria que ele próprio está sendo traído:

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ \uparrow & & \\ \boxed{*} & & * \end{array}$$

Conhecimento Comum

- Observe que, dadas essas informações, um homem que soubesse da existência de apenas um outro homem sendo traído, necessariamente deduziria que ele próprio está sendo traído:

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ \uparrow & \nwarrow & \\ \boxed{*} & & * \end{array}$$

Conhecimento Comum

- Observe que, dadas essas informações, um homem que soubesse da existência de apenas um outro homem sendo traído, necessariamente deduziria que ele próprio está sendo traído:

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ \updownarrow & \nwarrow & \\ \boxed{*} & & * \end{array}$$

Conhecimento Comum

- Como todos os homens observam dois outros homens sendo traídos, todos continuam elogiando as suas mulheres na segunda noite.
- Porém, ao final da segunda noite, todos sabem que todo homem sabe que pelo menos dois outros homens estão sendo traído.
- Assim, na terceira noite, um homem qualquer sabe que existem dois homens sendo traídos e sabe que todo homem sabe que dois outros homens estão sendo traídos.

Conhecimento Comum

- Portanto, na terceira noite, todo homem tem certeza de que está sendo traído:

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ \uparrow & & \\ \boxed{*} & \longrightarrow & * \end{array}$$

Conhecimento Comum

- Portanto, na terceira noite, todo homem tem certeza de que está sendo traído:

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \boxed{*} & & * \end{array}$$

Conhecimento Comum

- Portanto, na terceira noite, todo homem tem certeza de que está sendo traído:

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ & \nwarrow & \\ \boxed{*} & \leftarrow & * \end{array}$$

Representação na Forma Normal

Estratégias

- Uma estratégia, ou regra de decisão, é um plano contingente completo que especifica como um jogador deve atuar em cada um dos seus conjuntos de informação.

- Lembre-se de que cada conjunto de informação representa uma situação diferente (contingência) em que o agente pode vir a realizar uma decisão.

- Definição: Seja $\mathcal{H}_i$ a coleção de conjuntos de informação do jogador i, $\mathcal{A}$ o conjunto de ações possíveis no jogo e $C(H) \subset \mathcal{A}$ o conjunto de possíveis ações no conjunto de informação H. Uma estratégia (pura) para o jogador i é uma função $\boxed{s_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{A}}$ tal que $s_i(H) \in C(H)$ para todo $H \in \mathcal{H}_i$.

Estratégias

- Em se tratando de um plano contingente completo, uma estratégia deve especificar ações para o jogador mesmo em conjuntos de informação que não são alcançados durante o jogo.

- Na realidade, a estratégia de um jogador deve incluir planos para ações mesmo que a sua própria estratégia os torne irrelevantes — a importância disso ficará aparente no estudo dos jogos sequenciais.

Estratégias

- O conjunto de estratégias disponíveis para um jogador i é dado por:

$$S_i = \times_{H \in \mathcal{H}_i} C(H),$$

  onde S_i é um espaço $|\mathcal{H}_i|$-dimensional, onde $|\mathcal{H}_i|$ é o número de conjuntos de informação do jogador i.

- O conjunto de estratégias de todos os jogadores é dado por:

$$S = S_1 \times ... \times S_I$$

- Um elemento neste conjunto

$$s = (s_1, ..., s_I) \in S$$

  é chamado de perfil de estratégias.

Estratégias

- Exemplo: Estratégias no Jogo "*Matching Pennies*" — B.
  - Neste cado, o conjunto de estratégias de cada jogador é dado por:

$$S_1 = \{H, T\}$$

    e

$$S_2 = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

  - Uma estratégia para o jogador 1 especifica simplesmente uma ação no início do jogo, "jogar $\underline{H}$" ou "jogar $\underline{T}$".
  - Uma estratégia para o jogador 2 especifica uma ação para cada um dos seus dois conjuntos de informação:

    i. "Jogar H se o jogador 1 jogar H; jogar H se o jogador 1 jogar T".

    ii. "Jogar H se o jogador 1 jogar H; jogar T se o jogador 1 jogar T".

    iii. "Jogar T se o jogador 1 jogar H; jogar H se o jogador 1 jogar T."

    iv. "Jogar T se o jogador 1 jogar H; jogar T se o jogador 1 jogar T".

Representação na Forma Normal

- Todo perfil de estratégias $s = (s_1, ..., s_I)$ induz uma sequência de jogadas e uma distribuição de probabilidade sobre os nodos terminais do jogo.

- Assim, para cada perfil de estratégias $(s_1, ..., s_I)$, podemos deduzir o payoff esperado de cada jogador.

- Note, portanto, que é possível especificar o jogo diretamente em termos das estratégias dos jogadores e seus payoffs esperados.

- Esta forma de representar o jogo é denominada de forma normal ou estratégica.

Representação na Forma Normal

- Formalmente, dada a função payoff $u_i : T \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos uma função payoff estendida como o payoff esperado do jogador i quando um perfil de estratégias s é adotado.

- Com abuso de notação, denotamos esta função como $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$, i.e. $u_i(\cdot)$ é a função utilidade von Neumann-Morgenstern associada aos resultados induzidos por um dado perfil de estratégias.

- Definição: A representação normal de um jogo $\Gamma_N = \{I, S, u\}$ consiste de um conjunto de jogadores, I, um espaço de estratégias, S, e funções de utilidade von Neumann-Morgenstein $u_i(s_1, ..., s_I)$ para cada jogador i.

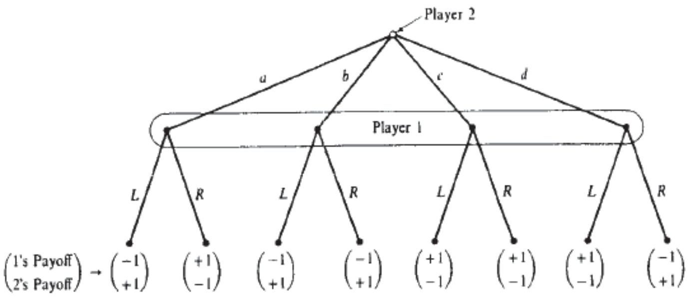
Representação na Forma Normal

- Exemplo: Forma Normal do Jogo "*Matching Pennies*" – B
  - A representação na forma normal deste jogo é a seguinte:

		Jogador 2			
		(H, H)	(H, T)	(T, H)	(T, T)
Jogador 1	H	-1,+1	-1,+1	+1,-1	+1,-1
	T	+1,-1	-1,+1	+1,-1	-1,+1

Representação na Forma Normal

- Da discussão anterior, fica claro que para qualquer representação na forma extensiva de um jogo, existe uma única representação na forma normal.
- Entretanto, o contrário não é verdadeiro. Note que a forma normal do exemplo anterior também poderia representar o seguinte jogo na forma extensiva:



Representação na Forma Normal

- Note que a representação do jogo na forma normal não é capaz de capturar os aspectos dinâmicos de um jogo sequencial.
- No entanto, para jogos simultâneos, nos quais os agentes realizam as suas escolhas ao mesmo tempo, a forma normal captura todos os elementos relevantes do jogo.
- Neste caso, a representação do jogo na forma normal é "equivalente" a sua representação na forma extensiva.

Estratégias Mistas

Estratégias Mistas

- Até o momento, assumimos que os jogadores escolhiam uma única estratégia dentro do conjunto de possíveis estratégias.

- No entanto, é possível que, em algumas situações, os agentes queiram aleatorizar as suas escolhas entre várias estratégias.

- Definição: Uma estratégia mista para o jogador i é uma função $\sigma_i : S_i \longrightarrow [0,1]$ que atribui probabilidade $\sigma_i(s_i) \geq 0$ para cada estratégia pura $s_i \in S_i$, satisfazendo $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Estratégias Mistas

- Suponha que o jogador i possua M estratégias puras:

$$S_i = \{s_{1i}, ..., s_{Mi}\}$$

- O conjunto de estratégias mistas disponíveis para ele é dado pelo seguinte simplex:

$$\Delta(S_i) = \Big\{(\sigma_{1i}, ..., \sigma_{Mi}) \in \mathbb{R}^M : \sigma_{mi} \geq 0 \text{ para } m = 1, ..., M \text{ e } \textstyle\sum_{m=1}^{M} \sigma_{mi} = 1 \Big\}$$

- Assim, definimos a utilidade von Neumann-Morgenstern associada a um perfil de estratégias mistas σ como:

$$u_i(\sigma_1, ..., \sigma_I) = \sum_{s \in S} [\sigma_1(s_1).\sigma_2(s_2)...\sigma_I(s_I)].u_i(s)$$

  Observe que para que esta expressão faça sentido, é importante que cada jogador escolha as suas estratégias de maneira independente.

Estratégias Mistas

- Assim, podemos considerar o jogo na forma normal $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ onde extendemos o conjunto de estratégias dos jogadores para incluir tanto estratégias puras quanto mistas.

- Exemplo: Estratégias Mistas no Jogo "*Matching Pennies*" – B.
  - Lembre-se que, neste cado, o conjunto de estratégias puras de cada jogador é dado por:

$$S_1 = \{H, T\}$$

    e

$$S_2 = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

  - Logo, o conjunto das estratégias mistas dos jogadores é dado por:

$$\Delta(S_1) = \Big\{(\sigma_{11}, \sigma_{21}) \in [0,1]^2 : \sigma_{11} + \sigma_{21} = 1\Big\}$$

    e

$$\Delta(S_2) = \Big\{(\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}, \sigma_{42}) \in [0,1]^4 : \sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{32} + \sigma_{42} = 1\Big\}$$

Extra: Estratégias Comportamentais

- No caso de jogos na forma extensiva, ao invés de aleatorizar sobre o conjunto (potencialmente grande) de estratégias puras em S_i, poderiamos pensar que o jogador aleatorize separadamente sobre as possíveis ações em cada um de seus conjuntos de informação $H \in \mathcal{H}_i$.

- Definição: Dado um jogo na forma extensiva Γ_E, uma estratégia comportamental para o jogador i especifica, para cada conjunto de informação $H \in \mathcal{H}_i$ e $a \in C(H)$, uma probabilidade $\lambda_i(a, H) \geq 0$, com $\sum_{a \in C(H)} \lambda_i(a, H) = 1$ para todo $H \in \mathcal{H}_i$.

Extra: Estratégias Comportamentais

- Em jogos com "perfect recall", as duas formas de modelar o comportamento aleatório dos jogadores são equivalentes.

- Para qualquer estratégia comportamental de um jogador i, existe uma estratégia mista que gera a mesma distribuição sobre resultados, dadas as estratégias (mistas ou comportamentais) dos demais jogadores; e vice-versa.

Exemplos Econômicos

- Vamos ilustrar os conceitos apresentados anteriormente, aplicando-os ao caso de um modelo de competição imperfeita com as seguintes características:

  i. Duas firmas, 1 e 2;

  ii. Demanda de mercado, $Q(P)$, com $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$;

  iii. Demanda inversa, $P(Q)$, com $P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$;

  iv. Cada firma produz uma quantidade não-negativa, q_i;

  v. Custo de produção, $c_i(q_i)$, com $c_i(0) = 0$.

- Note que, neste caso, o conjunto de ações é infinito, pois o espaço de possíveis quantidades e preços estão em um contínuo.

Exemplos Econômicos

- Exemplo 1: Modelo de Cournot
  - Neste caso, cada firma escolhe simultaneamente uma quantidade, q_1 e q_2, e o preço de mercado é determinado por $P(q_1 + q_2)$.
  - Na forma normal, esse jogo é caracterizado pelos seguintes elementos:
    - *i*. Conjunto de estratégias: $S_i = \mathbb{R}_+$, com $s_i = q_i$;
    - *ii*. Funções de payoff: $u_i(s_i, s_{-i}) = s_i P(s_1 + s_2) - c(s_i)$.

Exemplos Econômicos

- Exemplo 2: Modelo de Bertrand
  - Neste caso, cada firmas escolhe simultaneamente um preço, p_1 e p_2, e a quantidade de mercado é determinada por $Q(\min\{p_1, p_2\})$.
  - Na forma normal, esse jogo é caracterizado pelos seguintes elementos:
    - *i*. Conjunto de estratégias: $S_i = \mathbb{R}_+$, com $s_i = p_i$;
    - *ii*. Funções de payoff:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} Q(s_i)\, s_i - c(Q(s_i)) & \text{se } s_i < s_{-i} \\ \frac{1}{2} Q(s_i)\, s_i - c(\frac{1}{2} Q(s_i)) & \text{se } s_i = s_{-i} \\ 0 & \text{se } s_i > s_{-i} \end{cases}$$

Exemplos Econômicos

- Exemplo 3: Modelo de Stackelberg
  - Neste caso, as firmas escolhem sequencialmente as suas quantidades, de maneira que a firma 2 observa a quantidade escolhida da firma 1.
  - Na forma normal, esse jogo é caracterizado pelos seguintes elementos:
    - *i*. Conjunto de estratégias:

$$S_1 = \mathbb{R}_+, \text{ com } s_1 = q_1;$$

$$S_2 = \{\text{funções } f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\}, \text{ com } s_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

    - *ii*. Funções de payoff:

$$u_1(s_1, s_2) = s_1 P(s_1 + s_2(s_1)) - c_1(s_1)$$

$$u_2(s_1, s_2) = s_2(s_1) P(s_1 + s_2(s_1)) - c_1(s_2(s_1))$$

Jogos Simultâneos

Jogos Simultâneos

- Nesta seção, estudaremos os chamados jogos estáticos, em que os agentes atuam ao mesmo tempo e uma única vez.

- A análise desses jogos nos permitirá introduzir alguns conceitos básicos de teoria dos jogos, os quais serão gradualmente generalizados à medida que considerarmos jogos mais complexos.

- O nosso objetivo principal é realizar previsões sobre os resultados desses jogos.

Estratégias Dominantes e Dominadas

Estratégias Dominantes e Dominadas

- Considere o jogo dilema dos prisioneiros representado abaixo:

		Prisioneiro 2	
		DC	*C*
Prisioneiro 1	*DC*	-2,-2	-10,-1
	C	-1,-10	-5,-5

- Observe que o resultado (C, C) é o mais plausível, pois "C" é a melhor estratégia de cada jogador para qualquer escolha de seu oponente.

- Uma estratégia como essa é denominada estratégia estritamente dominante.

Estratégias Dominantes e Dominadas

- Definição: Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma estritamente dominante para o jogador i se para todo $s_i' \neq s_i$, tem-se que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}), \quad \text{para todo } s_{-i} \in S_{-i}$$

- Intuitivamente, uma estratégia é estritamente dominante para um jogador se ela maximiza unicamente o seu payoff para qualquer estratégia que os seus oponentes possam adotar.

Estratégias Dominantes e Dominadas

- Note que o resultado (C, C) é Pareto-dominado por (NC, NC).

- Ambos os jogadores estariam melhor se pudessem se comprometer a não confessar.

- Observe que, neste caso, o comportamento auto-interessado não gera um resultado socialmente ótimo, pois as ações de cada agente geram uma externalidade negativa sobre o seu oponente.

Estratégias Dominantes e Dominadas

- É natural esperar que um jogador utilize uma estratégia estritamente dominante, caso ela exista. Mas o que ocorre quando ela não existir?

		Jogador 2		
		a	b	c
Jogador 1	A	$5,5$	$0,10$	$3,4$
	B	$3,0$	$2,2$	$4,5$

- Observe que, no jogo acima, não há estratégias estritamente dominantes. Porém, o jogador 2 obtém payoff estritamente maior ao escolher b ao invés de a, independentemente da decisão do jogador 1.

- Neste caso, diz-se que a estratégia a é estritamente dominada por b.

Estratégias Dominantes e Dominadas

- Definição: Uma estratégia $s_i \in S_i$ é estritamente dominada para um jogador i se existir outra estratégia $s_i^{'} \in S_i$ tal que:

$$u_i(s_i^{'}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \quad \text{para todo } s_{-i} \in S_{-i}.$$

  Neste caso, dizemos que a estratégia $s_i^{'}$ domina estritamente s_i.

- Note que podemos re-expressar a definição de dominância estrita da seguinte forma: uma estratégia $s_i \in S_i$ é estritamente dominante se ela dominar estritamente toda outra estratégia em S_i.