

Mecânica Quântica — 7600022

Primeira Lista — teste no dia 22/8/2017

1. Um elétron se move no potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (x > 0), \end{cases}$$

onde V_0 é uma energia positiva. Encontre a autofunção do elétron para uma energia E no intervalo $0 < E < V_0$.

2. Um poço de potencial é definido pela igualdade

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < \frac{a}{2}) \\ V_0 & (|x| > \frac{a}{2}), \end{cases}$$

onde V_0 é uma energia positiva. Encontre a equação que determina a energia do estado fundamental.

3. Para o problema anterior, desenhe qualitativamente a função de onda do autoestado fundamental. Justifique seu desenho.
4. Considere agora o potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 < x < \frac{a}{2}) \\ V_0 & (x > \frac{a}{2}) \end{cases},$$

Mostre que a energia do estado fundamental é idêntica à energia do primeiro autoestado com função de onda ímpar no potencial do problema 1. *Dica: mostre que os dois estados obedecem à mesma equação de Schrödinger independente do tempo e às mesmas condições de contorno.*

5. A função de onda de um elétron preso em um poço infinito que se estende de $x = -a/2$ a $x = a/2$ é dada pela expressão

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\phi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} - \phi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} \\ E_2 &= \frac{\hbar^2 4\pi^2}{2m a^2} \\ \phi_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ \phi_2(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right). \end{aligned}$$

Calcule a probabilidade de encontrar o elétron num pequeno segmento de largura $\Delta x \ll a$ em torno do ponto $x = a/4$, em função do tempo.

6. Para a função de onda do problema anterior, calcule a probabilidade de encontrar o elétron entre $x = 0$ e $x = a/2$ em função do tempo.
7. Calcule a corrente de probabilidade $J(x, t) = (\hbar/m)\Im[\psi^*(x, t)\partial\psi(x, t)/\partial x]$ no ponto $x = 0$, em função de tempo, para a função de onda do problema 5.

8. Seja $P_{ab}(t)$ a probabilidade de se encontrar uma partícula no intervalo $(a < x < b)$ no instante t . Mostre que

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t).$$

9. Dadas duas autofunções distintas $\phi_n(x)$ e $\phi_{n'}(x)$ do poço infinito com largura a centrado em $x = 0$, mostre que a integral

$$\int_{-a/2}^{a/2} \phi_n^*(x) \phi_{n'}(x) dx$$

é nula.

10. Um poço infinito tem largura $a = 1\text{Å}$. Encontre a diferença entre as energias de um elétron no primeiro estado excitado e no estado fundamental, em eV. Qual a frequência da luz emitida se o elétron decair do primeiro estado excitado para o fundamental?