Relatividade

Parte 2

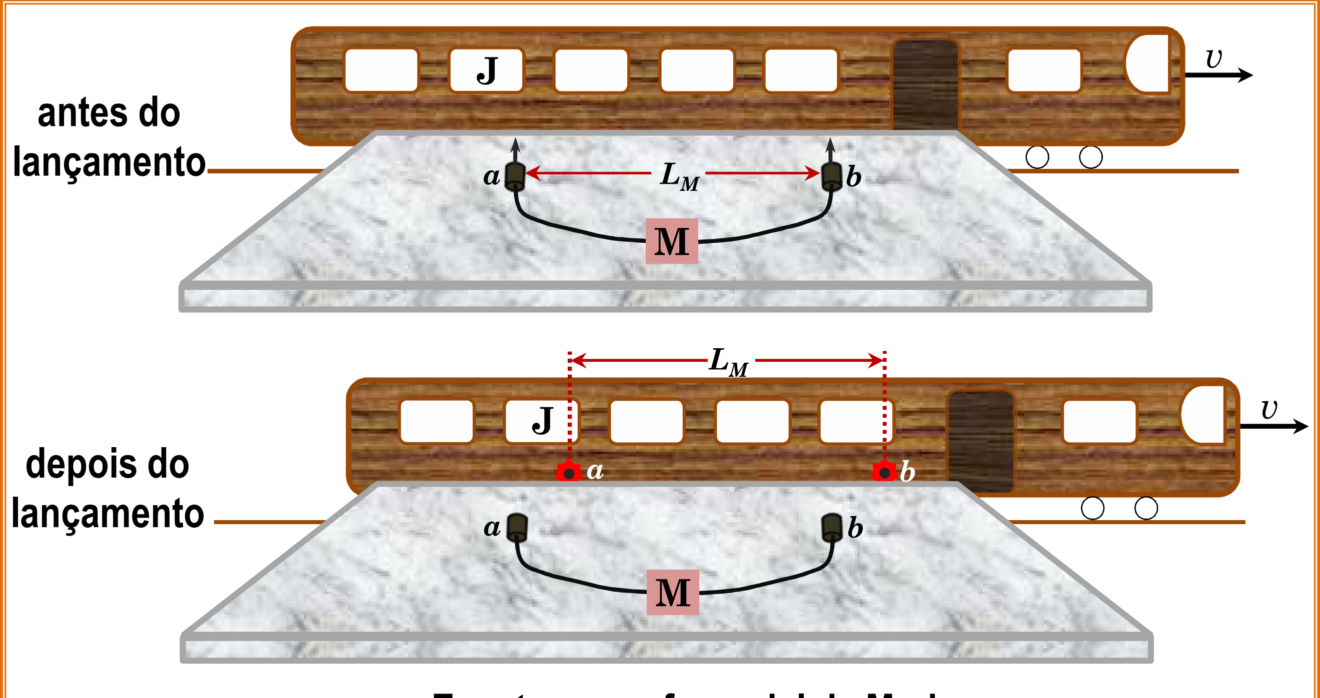
Lucy V. C. Assali

Física II - 2015 - IO

Principais Fontes Bibliográficas: Apostila do Prof. Manoel Robilotta e Serway

Transformações de Lorentz: contração do espaço

João, viajando em um trem de madeira que se desloca com velocidade $v = 3c/5$, passa por uma estação onde se encontra Maria. Na plataforma, ela colocou dois lançadores de dardos, separados pela distância $L_{\mathrm{M}} = 10\ \mathrm{m}$, conectados, por fios de mesmo comprimento, a um único interruptor, que permite lançar os dardos simultaneamente. No instante em que o trem passa pela estação, Maria aciona o disparador e os dardos cravam-se no trem. Posteriormente, o trem volta à estação e João desce. Na plataforma, João e Maria comparam a distância entre os dardos com aquela entre os disparadores e constatam que elas são diferentes. O propósito, nesta situação, é obter a distância entre os dardos no referencial do trem e discutir a explicação dos acontecimentos nos dois referenciais.



Eventos no referencial de Maria

Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz: contração do espaço

Vamos dividir a situação em dois eventos principais, pois vamos supor que a distância entre o trem e os disparadores seja tão pequena que podemos desprezar o intervalo de tempo entre a saída e a chegada de cada um dos dardos. Desse modo, só precisamos considerar os disparos dos dois dardos e descrevê-los nos referencias de Maria e João. Os eventos mais importantes, então, serão os disparos do dardo $\boldsymbol{a}$, escolhido arbitrariamente como origem espaço-temporal dos referenciais, e do dardo $\boldsymbol{b}$. Além disso, no referencial de Maria, os dois eventos acontecem simultaneamente e a distância entre eles é conhecida. Temos, então:

Evento $\boldsymbol{a}$ de referência: disparo do dardo $\boldsymbol{a}$: $\mathrm{S_M}$: $(0,0,0,0)$ e $\mathrm{S_J}$: $(0,0,0,0)$

Evento $\boldsymbol{b}$: disparo do dardo $\boldsymbol{b}$: $\mathrm{S_M}$: $(L_\mathrm{M},0,0,0)$ e $\mathrm{S_J}$: $(x_\mathrm{J}{}^b,0,0,t_\mathrm{J}{}^b)$

$$x_\mathrm{J}{}^b = \gamma L_\mathrm{M} \;\Rightarrow\; \boxed{L_\mathrm{J} = \gamma L_\mathrm{M}}$$

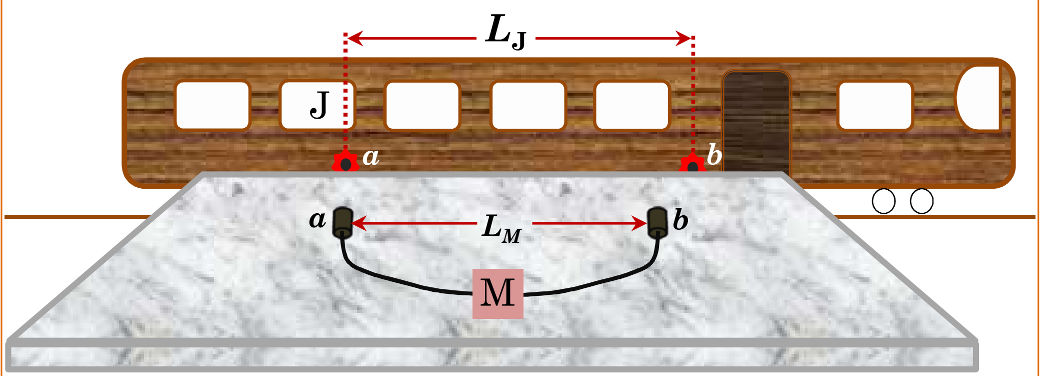
$$t_\mathrm{J}{}^b = \gamma[-\,v\, x_\mathrm{M}{}^b/c^2] = -\,v\gamma L_\mathrm{M}/c^2 \Rightarrow \boxed{t_\mathrm{J}{}^b = -\,\gamma v L_\mathrm{M}/c^2}$$

A distância entre os dardos no trem ($\mathrm{S_J}$) é dada por $L_\mathrm{J} = \gamma L_\mathrm{M}$. Usando $\gamma=5/4$ ($v = 3c/5$) e $L_\mathrm{M} = 10$ m, obtemos $\boxed{L_\mathrm{J} = 12{,}5\ \mathrm{m}}$.

Transformações de Lorentz: contração do espaço

Este cálculo mostra que no trem a distância entre os dardos é de $12{,}5\ \mathrm{m}$. Quando o trem passa pela estação, esses $12{,}5\ \mathrm{m}$ aparecem contraídos, para $10\ \mathrm{m}$, quando observados por Maria. Quando o trem pára e volta para a estação, a distância entre os dardos cravados no trem continua a ser $12{,}5\ \mathrm{m}$, como mostra a figura abaixo. Como João, no seu referencial, explica esses resultados? Ele justificaria a diferença entre as distâncias observando que os dois dardos não atingem o trem simultaneamente. No referencial $\mathrm{S_J}$ há um intervalo de tempo, não nulo, entre os eventos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, dado por:

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{J}} = t_{\mathrm{J}}{}^{b} - t_{\mathrm{J}}{}^{a} = -v\gamma L_{\mathrm{M}}/c^2 = -2{,}5\mathrm{x}10^{-8}\ \mathrm{s}}$$

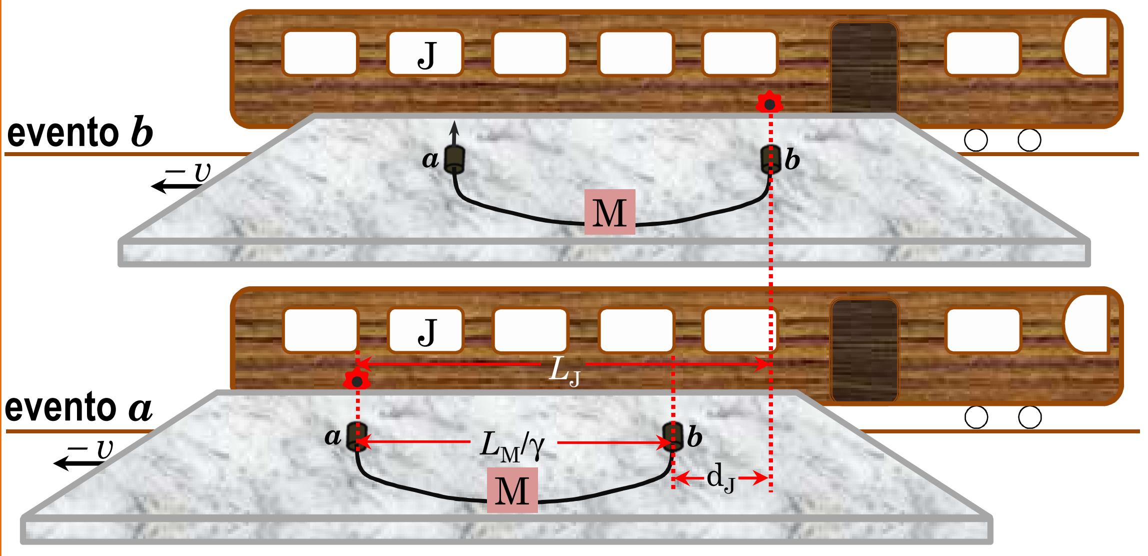


O trem, ao voltar, está parado em relação à estação

O sinal negativo indica que no referencial $\mathrm{S_J}$ o evento $\boldsymbol{b}$ ocorreu antes que o evento $\boldsymbol{a}$. É importante notar que um tempo negativo não tem nada demais, ele é apenas o produto da nossa escolha arbitrária da origem dos tempos. O que acontece depois dessa origem é positivo e o que acontece antes da origem é negativo. O sinal indica somente uma ordem relativa dos eventos, nada mais.

Transformações de Lorentz: contração do espaço

No referencial $\mathrm{S_J}$, o dardo $\boldsymbol{b}$ é lançado e a estação se desloca para a esquerda uma distância $d_\mathrm{J} = v\Delta t_\mathrm{J} = \gamma L_\mathrm{M} v^2/c^2$ (=4,5 m) e, em seguida, o dardo $\boldsymbol{a}$ é lançado. Esta situação está mostrada na figura abaixo. Sabemos que a distância entre os lançadores de dardos, na estação, é L_M. Quando vista do trem, entretanto, esta distância aparece contraída, pois a estação está em movimento. Assim, João explica a distância entre os dardos no seu referencial (trem) através da soma $L_\mathrm{J} = \gamma L_\mathrm{M} v^2/c^2 + L_\mathrm{M}/\gamma = 4{,}5 + 8{,}0 = 12{,}5$ m (= γL_M), ou seja, a distância entre os dardos, no trem, dada por L_J, é igual à distância entre os lançadores, vista do trem, somada à distância percorrida pela estação entre os dois eventos. Assim, a explicação de João para os seus 12,5 m contra os 10 m de Maria é a seguinte: para ele os 10 m de Maria aparecem contraídos para 8 m. Além disso, os disparos não são simultâneos e a estação se move 4,5m durante esse tempo. Aqui fica claro o princípio da relatividade em ação: os dois observadores são indistinguíveis e qualquer um deles é capaz de explicar satisfatoriamente a relação entre os dois eventos, apesar de cada um produzir uma explicação apropriada ao seu ponto de vista.

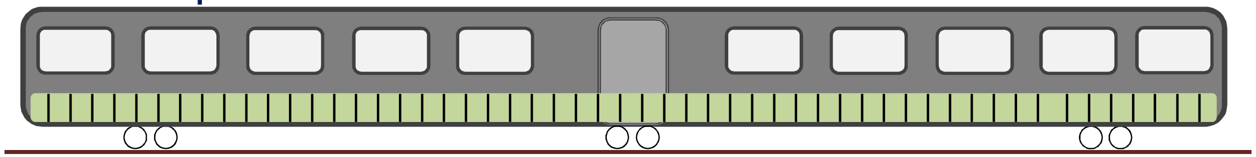


Eventos no referencial de João

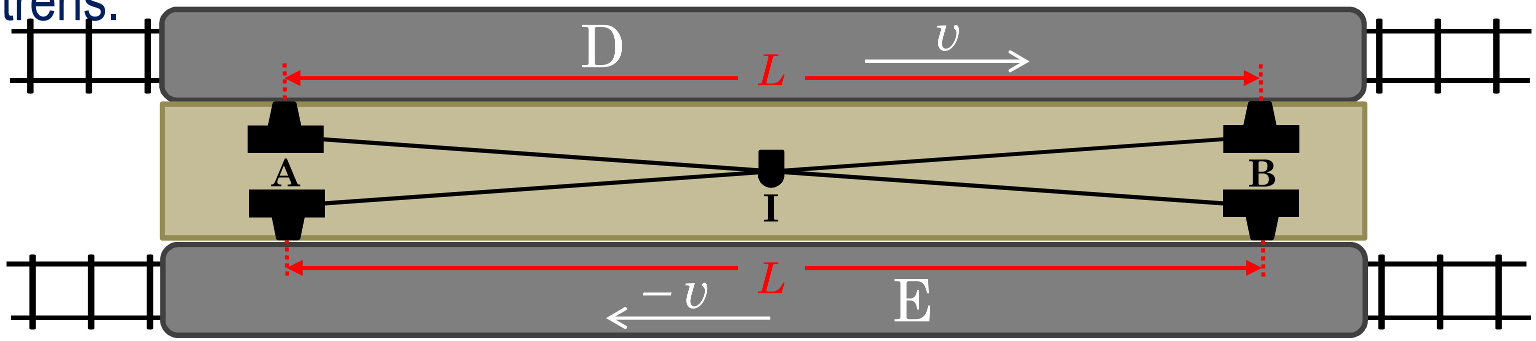
Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz: simultaneidade

Existem dois trens compridos, D e E, ao longo dos quais existem muitos relógios, dispostos como mostra a figura. Os relógios de cada um dos trens estão sincronizados entre si, de modo que todos eles sempre apresentam a mesma marcação do tempo. Os trens viajam na mesma direção mas em sentidos opostos, em uma ferrovia retilínea composta por dois pares de trilhos paralelos.



Na região onde os trens se cruzam existe uma “ilha” entre os trilhos sobre a qual estão dispostas quatro câmeras fotográficas, localizadas nos pontos A e B. Os dois pares de câmeras estão separados por uma distância L e elas podem ser acionadas simultaneamente, no referencial da Terra, pelo interruptor I, equidistante de todas elas. Num dado instante, as quatro câmeras são acionadas e cada uma delas fotografa o relógio do trem exatamente em frente a ela. No referencial da Terra, estas quatro fotos são simultâneas por construção. O que queremos verificar é se o mesmo acontece nos referenciais dos dois trens.



Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz: simultaneidade

Tomando como evento de referência as duas fotos feitas no ponto A e lembrando que estamos tratando com três referenciais: Terra (S_T), Trem D (S_D) e Trem E (S_E), temos:

Evento A de referência: fotos das câmeras localizadas em A:

S_T: (0,0,0,0); S_D: (0,0,0,0) e S_E: (0,0,0,0)

Evento B: fotos das câmeras localizadas em B:

S_T: $(L,0,0,0)$; S_D: $(x_D{}^B,0,0,t_D{}^B)$ e S_E: $(x_E{}^B,0,0,\ t_E{}^B)$

As coordenadas do evento B em S_D e S_E são obtidas através das TL:

$$\mathbf{S_T \Rightarrow S_D} \quad \begin{cases} x_D^B = \gamma[x_T^B - vt_T^B] \longrightarrow \boxed{x_D^B = \gamma L} \\ t_D^B = \gamma[t_T^B - (vx_T^B)/c^2] \longrightarrow \boxed{t_D^B = -\gamma vL/c^2} \end{cases}$$

$$\mathbf{S_T \Rightarrow S_E} \quad \begin{cases} x_E^B = \gamma[x_T^B + vt_T^B] \longrightarrow \boxed{x_E^B = \gamma L} \\ t_E^B = \gamma[t_T^B + (vx_T^B)/c^2] \longrightarrow \boxed{t_E^B = \gamma vL/c^2} \end{cases}$$

O intervalo de tempo entre as duas fotos no trem D é dado por $t_D{}^B - t_D{}^A = -\gamma vL/c^2 < 0$, o que indica que, neste referencial, a foto em B é anterior à foto em A. Já no trem E, a foto em B é posterior à foto em A, pois $t_E{}^B - t_E{}^A = \gamma vL/c^2 > 0$. Assim, os eventos simultâneos na Terra, deixam de sê-lo em outros referenciais que se movem em relação à ela. Além disso, estes resultados mostram que a ordem dos eventos também depende do sinal da velocidade relativa.

Transformações de Lorentz: simultaneidade

Para termos uma idéia mais concreta, vamos supor que v=0,99c e que a distância entre os pontos A e B, no referencial da Terra seja $L = 10$ s $(c) = 3 \times 10^9$ m. Com isso, teremos:

$$\boxed{t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} = -210,5 \text{ s} \quad \text{e} \quad t_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{E}}^{\mathrm{A}} = 210,5 \text{ s}}$$

Como já mencionado, não há nada de especial no fato de o primeiro desses intervalos de tempo ser negativo. Isso significa apenas que $t_D^A > t_D^B$. Se, por exemplo, as fotografias dos dois relógios em A indicassem, por coincidência 10 minutos, as fotos em B mostrariam relógios com $t_D^B \cong 7{,}5$ minutos e $t_E^B \cong 13{,}5$ minutos. O que é espantoso nestes resultados, do ponto de vista da intuição clássica, é que os eventos são simultâneos na Terra, mas isto não acontece nos trens. <u>A ordem dos eventos depende do sinal da velocidade relativa entre os referenciais</u>. Este resultado gera uma dúvida perturbadora, como já havíamos discutido: <u>se a ordem de dois eventos pode ser invertida somente pelo fato de invertermos o sentido de nosso caminhar, então será que a causa de um fenômeno físico pode virar efeito e o efeito aparecer antes da causa</u>? <u>*Isso não acontece e a relatividade mantém a noção de causalidade*</u>! As causas e efeitos só podem estar relacionados por trocas de informações que se propagam com velocidades iguais ou menores que a da luz, impossibilitando, assim, que o efeito preceda a causa, em qualquer referencial. Neste exemplo que acabamos de discutir, um raio de luz não viaja o suficientemente rápido para que as fotos do ponto A possam influenciar as fotos do ponto B, ou seja, as fotos nos dois pontos não têm e não podem ter correlação direta entre si. Por isso, a simultaneidade entre elas no referencial da Terra pode ser considerada como uma coincidência e que a ordem dos eventos pode ser alterada por uma mudança de referencial.

Relatividade

Causalidade e inversão da ordem temporal

Aprendemos que dois eventos simultâneos em um mesmo sistema inercial não são simultâneos em outro sistema inercial. Será possível que os observadores de dois sistemas inerciais, com velocidade relativa v, cheguem a discordar sobre a ordem temporal em que dois eventos acontecem? Vamos supor que no sistema S os eventos 1 e 2 tenham coordenadas (x_1,t_1) e (x_2,t_2), com $t_2 > t_1$. No sistema S' o intervalo de tempo entre estes dois eventos é

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v\,\Delta x}{c^2} \right), \text{ com } \Delta t = t_2 - t_1 > 0 \text{ e } \Delta x = x_2 - x_1$$

$\Rightarrow$ Para que a ordem temporal entre os eventos seja invertida, basta que $\Delta x > c^2 \Delta t / v$, ou equivalentemente, basta que $v > c^2 \Delta t / \Delta x$. Por outro lado, como $v < c$ <u>sempre</u>, então a inversão da ordem temporal só poderá acontecer se $\boxed{\Delta x > c\Delta t}$: <u>os</u> eventos acontecem em pontos tão distantes entre si que nem sequer a luz poderia sair de um dos pontos e chegar ao outro evento antes que esse acontecesse.

Será possível que um efeito preceda sua própria causa? Vamos imaginar que o evento 1 é a causa do evento 2. Para isso é necessário que alguma interação física, com origem no evento 1, propague-se até a posição x_2, atingindo-a antes ou exatamente no instante t_2. Como nada se propaga mais rápido do que a luz, é necessário que os eventos 1 e 2 satisfaçam a condição $\boxed{\Delta x \leq c\Delta t}$. Esta condição é exatamente oposta a anterior e a conclusão é: só seria possível inverter a ordem temporal dos eventos que não possuíssem uma relação de causa e efeito.

Lucy V. C. Assali

Relatividade

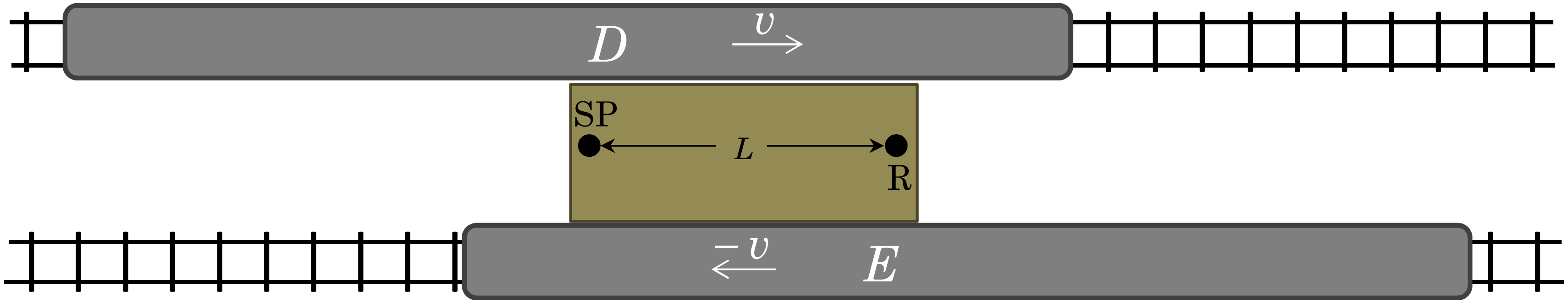
O paradoxo dos gêmeos

Este raciocínio elaborado, sobre o paradoxo dos gêmeos, é bastante famoso. Vamos analisá-lo do ponto de vista das TL, enunciando: "Duas irmãs gêmeas, Joana e Maria, moram em SP, que supomos fixa em um referencial inercial. Um dia elas vão à estação de trem e Maria faz uma viagem de ida e volta a uma cidade R, enquanto Joana a espera em SP. Após o retorno de Maria, elas notam que Joana havia envelhecido mais do que Maria, devido ao efeito de dilatação do tempo". O que é aparentemente paradoxal, neste caso, é que Maria parece ter se movido <u>relativamente</u> a Joana do mesmo modo que Joana moveu-se <u>relativamente</u> a Maria. Ao pensarmos assim parece haver uma simetria no problema, que não explica porque uma das irmãs possa acabar mais velha do que a outra. A solução desta aparente contradição está no fato de perceber que as situações das duas irmãs não são totalmente simétricas, pois Joana permanece sempre em um referencial inercial (SP), enquanto que o movimento de Maria é acelerado e ela precisa passar por três referenciais: SP, trem de ida ($\mathrm{SP}\to\mathrm{R}$), trem de volta ($\mathrm{R}\to\mathrm{SP}$), SP. Vamos supor que as viagens de ida e volta de Maria tenham sido efetuadas em dois trens muito longos. O trem D se move no sentido $\mathrm{SP} \to \mathrm{R}$ (sistema $\mathrm{S_D}$) e o trem E se move no sentido $\mathrm{R} \to \mathrm{SP}$ (sistema $\mathrm{S_E}$). Os módulos das velocidades dos dois trens, relativamente à Terra, são iguais a v.

Relatividade

O paradoxo dos gêmeos

A figura abaixo representa a visão de alguém no referencial da Terra, suposto inercial.



Vamos tomar as origens espaço-temporais nos três referenciais como sendo coincidentes e determinados no instante em que Maria pula da estação (SP) no trem D, que está indo para R:

Evento A de referência: Maria pula da estação para o trem D:

S_T: (0,0,0,0); S_D: (0,0,0,0) e S_E: (0,0,0,0)

Evento B: Chegada de Maria a R, onde ela pula diretamente para o trem de volta, sem parar na estação $\Rightarrow$ Maria muda de trem (D $\Rightarrow$ E):

S_T: $(L,0,0,L/v)$; S_D: $(x_D{}^B,0,0,t_D{}^B)$ e S_E: $(x_E{}^B,0,0,\ t_E{}^B)$

Evento C: Maria chega a SP (pula do trem para a estação)

S_T: $(0,0,0,2L/v)$; S_D: $(x_D{}^C,0,0,t_D{}^C)$ e S_E: $(x_E{}^C,0,0,\ t_E{}^C)$

Relatividade

O paradoxo dos gêmeos

As descrições destes eventos nos referenciais dos trens são obtidas através das TL:

Evento B: Maria muda de trem $(\mathrm{D} \Rightarrow \mathrm{E})$:

$$\begin{cases} x_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} = \gamma[x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} - vt_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}] = \gamma[L - v(L/v)] \longrightarrow \boxed{x_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} = 0} \\ t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} = \gamma[t_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} - (vx_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}})/c^2] = \gamma[L/v - (vL)/c^2] \longrightarrow \boxed{t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} = L/(\gamma v)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} = \gamma[x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} + vt_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}] = \gamma[L + v(L/v)] \longrightarrow \boxed{x_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} = 2\gamma L} \\ t_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} = \gamma[t_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} + (vx_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}})/c^2] = \gamma[L/v + (vL)/c^2] \longrightarrow \boxed{t_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} = [(\gamma L)/(v)][1 + v^2/c^2]} \end{cases}$$

O resultado $x_{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{B}} = 0$ não é surpresa, já que Maria, uma vez no trem, sempre ficou parada na origem do sistema $\mathrm{S_D}$. O resultado $t_{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{B}} < t_{\mathrm{T}}{}^{\mathrm{B}}$ mostra a dilatação do tempo de Maria, quando observado por Joana. O tempo total de ida da viagem de Maria é

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{M}}^{\mathrm{ida}} = t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} = L/(\gamma v) - 0 = L/(\gamma v)}$$

Relatividade

O paradoxo dos gêmeos

Evento C: Maria chega a SP:

$$\begin{cases} x_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} = \gamma[x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C}} - vt_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C}}] = \gamma[0 - v(2L/v)] \longrightarrow \boxed{x_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} = -2\gamma L} \\ t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} = \gamma[t_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C}} - (vx_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C}})/c^2] = \gamma[0 - (v/c^2)(2L/v)] \longrightarrow \boxed{t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} = (2\gamma L)/v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} = \gamma[x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C}} + vt_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C}}] = \gamma[0 + v(2L/v)] \longrightarrow \boxed{x_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} = 2\gamma L} \\ t_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} = \gamma[t_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C}} + (vx_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C}})/c^2] = \gamma[0 + (v/c^2)(2L/v)] \longrightarrow \boxed{t_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} = (2\gamma L)/v} \end{cases}$$

O resultado ${x_{\mathrm{E}}}^{\mathrm{C}} = {x_{\mathrm{E}}}^{\mathrm{B}}$ não é surpresa, já que Maria, uma vez no trem, sempre ficou parada na origem do sistema $\mathrm{S_E}$ durante a viagem de volta. O tempo total de volta é

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{M}}^{\mathrm{volta}} = t_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} = (2\gamma L)/v - [(\gamma L)/(v)][1 + v^2/c^2] = L/(\gamma v)}$$

Como esperado, ${\Delta t_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{volta}} = {\Delta t_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{ida}}$. Assim, o tempo total para a viagem de Maria, tal como indicado no seu relógio, é

$$\boxed{\Delta \tau_{\mathrm{M}} = \Delta t_{\mathrm{M}}^{\mathrm{ida}} + \Delta t_{\mathrm{M}}^{\mathrm{volta}} = 2L/(\gamma v)}$$

Relatividade

O paradoxo dos gêmeos

Por outro lado, o tempo total próprio decorrido para Joana, que ficou em SP (S_T) esperando a irmã, é

$$\boxed{\Delta\tau_J = 2L/v > \Delta\tau_M}$$

Como o tempo de vida de uma pessoa é determinado pelo relógio que ela carrega, Joana ficou, de fato, mais velha do que Maria. Existe, portanto, uma assimetria real e concreta entre os tempos decorridos nas vidas de Joana e Maria, que se deve ao fato de esta última ter sofrido acelerações necessárias para poder sair e voltar para SP. A partir desta viagem, apesar de viverem felizes, Joana e Maria tiveram que comemorar seus aniversários em datas diferentes. Vamos avaliar quais deveriam ser os valores de L e v para que a diferença de idade entre as duas irmãs fosse de um dia, imaginando que a viagem de Maria durou um mês no referencial de Joana.

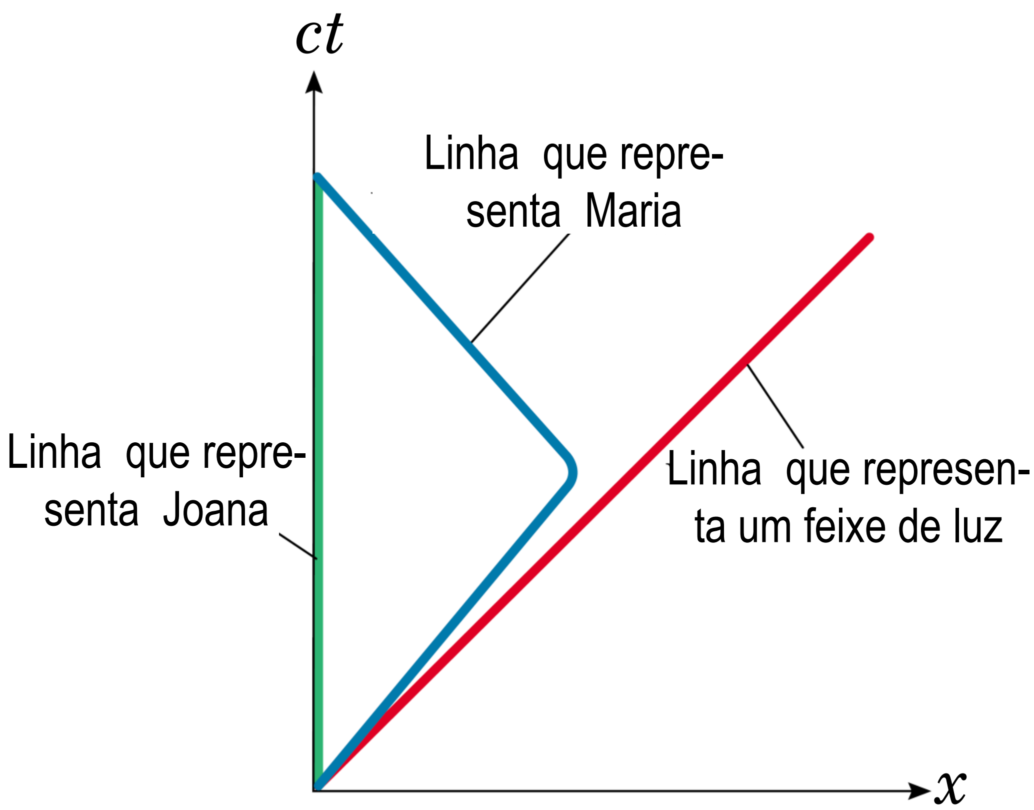
$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ mês } \cong 2{,}6 \times 10^6 \text{ s} \\ 1 \text{ dia } \cong 8{,}6 \times 10^4 \text{ s} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \Delta\tau_J = (2L)/v = 2{,}6 \times 10^6 \text{ s} \\ \Delta\tau_J - \Delta\tau_M = \Delta\tau_J\,(1 - 1/\gamma) = 8{,}6 \times 10^4 \text{ s} \end{array}$$

$$\boxed{L \cong 10^{14} \text{ m} \quad \text{e} \quad v \cong 0{,}26\, c}$$

Nota: Não é possível, no universo em que vivemos, fazer uma viagem que se inicie e termine no mesmo ponto do espaço, sem algum tipo de aceleração. Em 1971, relógios atômicos de césio foram colocados em aviões, que circunavegaram a Terra nos sentidos horário e anti-horário. Suas marcações foram comparadas com as de relógios estacionários na Terra e as diferenças observadas estavam compatíveis com as previsões da teoria da relatividade.

Relatividade

O paradoxo dos gêmeos: Gráfico espaço-tempo



Não existe simetria entre os referenciais de Maria e de Joana $\Rightarrow$ <u>não há paradoxo</u>

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Obtem-se da diferenciação das TL espaço-temporais:

$$dx' = dx$$

$$dy' = \gamma(dy - vdt) \longrightarrow dy' = \gamma\, dt(\frac{dy}{dt} - v)$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dy) \longrightarrow dt' = \gamma\, dt(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt})$$

$$\longrightarrow \frac{dy'}{dt'}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y - v}{1 - \frac{v\, v_y}{c^2}} \\ v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x}{\gamma\left(1 - \frac{v\, v_y}{c^2}\right)} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v\, v_y}{c^2}\right)} \end{aligned}}$$

<u>transformação inversa:</u>

$$v_y = \frac{v'_y + v}{1 + \frac{v\, v'_y}{c^2}}$$

$$v_x = \frac{v'_x}{\gamma\left(1 + \frac{v\, v'_y}{c^2}\right)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v\, v'_y}{c^2}\right)}$$

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

1) Maria, no referencial $\mathrm{S_M}$, observa João passando para a direita, com velocidade $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Pedro também passa por Maria, com velocidade $\boldsymbol{u} = u\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Qual a velocidade de Pedro relativamente a João?

Na mecânica clássica teríamos: $\vec{u}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{Pedro}} = \vec{u}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{Pedro}} - \vec{v} = (u - v, 0, 0)$

Diferentemente da mecânica clássica, na relatividade temos:

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{J}}^{x} &= \frac{u - v}{1 - (uv)/c^2} \\ u_{\mathrm{J}}^{y} &= u_{\mathrm{J}}^{z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \vec{u}_{\mathrm{J}} = \left(\frac{u - v}{1 - (uv)/c^2}, 0, 0 \right)$$

Consideremos que, no referencial de Maria, João se move com velocidade $\boldsymbol{v} = 3c/5\ \hat{\boldsymbol{\imath}}$ e Pedro com velocidade $\boldsymbol{u} = -\,4c/5\ \hat{\boldsymbol{\imath}}$. A velocidade de Pedro relativamente a João será:

Na mecânica clássica

$$\vec{u}_{\mathrm{J}} = \left(-\frac{7c}{5}, 0, 0 \right)$$

módulo maior que c

Na relatividade

$$\vec{u}_{\mathrm{J}} = \left(-\frac{35c}{37}, 0, 0 \right)$$

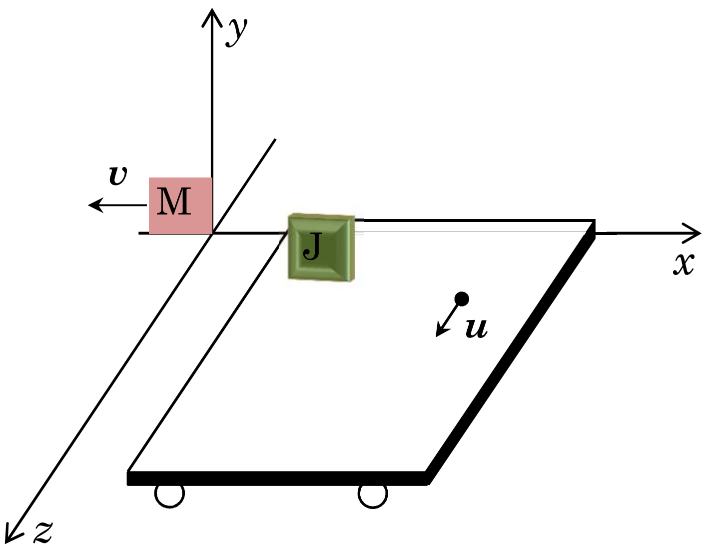
módulo menor que c

Este exemplo mostra que o cálculo relativístico é consistente com o fato de que o módulo da velocidade de qualquer corpo tem que ser sempre menor que c.

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

2) João está numa plataforma que se move paralelamente ao eixo x com velocidade $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\imath}}$ em relação a Maria. Sobre essa plataforma, existe um corpo que se move segundo o eixo z, com velocidade $\boldsymbol{u}_{\mathrm{J}}$ em relação a João. A figura mostra os movimentos de Maria e do corpo, vistos por João.



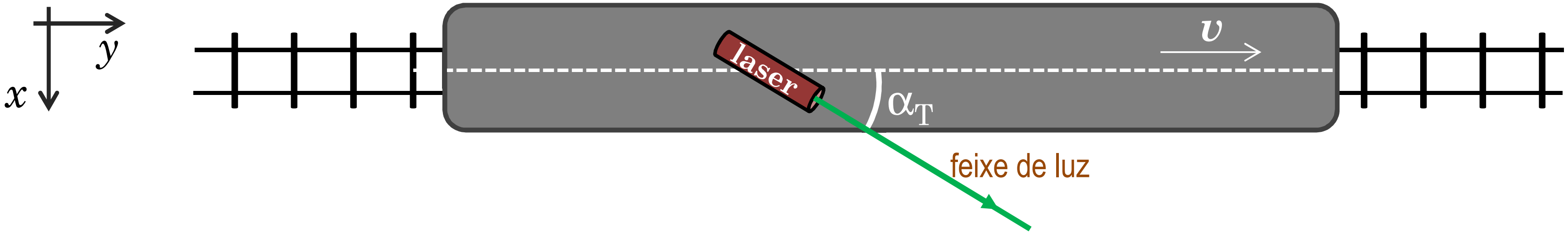
Quais são as previsões clássica e relativística para a velocidade do corpo relativamente a Maria? Na mecânica clássica temos $\boldsymbol{u}_{\mathrm{M}} = (v{,}0{,}\mathrm{u})$, enquanto que na relatividade, temos que $\boldsymbol{u}_{\mathrm{M}} = (v{,}0{,}\mathrm{u}/\gamma)$. Se adotarmos, por exemplo, $v = 3c/5$ e $u = 4c/5$, teremos classicamente que $\boldsymbol{u}_{\mathrm{M}} = (3c/5{,}0{,}4c/5)$, cujo módulo é $|\boldsymbol{u}_{\mathrm{M}}| = c$ e, relativisticamente, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{M}} = (3c/5{,}0{,}16c/25)$, cujo módulo é $|\boldsymbol{u}_{\mathrm{M}}| = \sqrt{481}\ c/\sqrt{625} \cong 0{,}88c$. Este exemplo mostra, novamente, que o cálculo relativístico é consistente com o fato de que o módulo da velocidade de qualquer corpo tem que ser sempre menor que c.

Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

3) A velocidade da luz: No interior de um trem existe uma fonte de laser, que emite um feixe horizontal, formando um ângulo α_T com o eixo do trem. A figura mostra o laser e seu feixe, vistos do referencial do trem. Quando o trem se move com velocidade $\boldsymbol{v}$, qual é a velocidade da luz em relação ao solo?



Neste tipo de questão, é conveniente pensarmos no feixe de luz emitido pelo laser como sendo composto por muitos fótons, cada um deles com velocidade $c_T = (c\ \text{sen}\alpha_T,\ c\ \cos\alpha_T,\ 0)$, no referencial do trem. A velocidade de cada fóton, em relação ao solo, deve ser obtida pelas relações relativísticas entre velocidades. Assim:

$$\boxed{c_S^x = \frac{c\,\text{sen}\alpha_T}{\gamma\,(1 + v\cos\alpha_T/c)}} \qquad \boxed{c_S^y = \frac{c\cos\alpha_T + v}{1 + v\cos\alpha_T/c}} \qquad \boxed{c_S^z = 0}$$

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

Para interpretar o resultado, calculemos, inicialmente, o módulo do vetor c_S:

$$\boxed{|c_S|^2 = \frac{\left(1 - v^2/c^2\right) c^2 \mathrm{sen}^2\alpha_T + \left(c\cos\alpha_T + v\right)^2}{\left(1 + v\cos\alpha_T/c\right)^2} = c^2}$$

Assim, o módulo da velocidade da luz, em relação ao solo é também igual a c, independente dos valores adotados para v e α_T. Este resultado indica que as regras de adição de velocidades obtidas das TL são compatíveis com o segundo postulado da relatividade, segundo o qual o <u>módulo</u> da velocidade da luz no vácuo é independente do referencial inercial. É interessante notar que a direção da velocidade da luz depende do referencial. Para determinar o ângulo α_S, entre o feixe de luz e o eixo y, no referencial do solo, escrevemos $c_S = (c\ \mathrm{sen}\alpha_S,\ c\ \cos\alpha_S,\ 0)$, e comparamos com as equações anteriores:

$$c_S^x = c\,\mathrm{sen}\alpha_S = \frac{c\,\mathrm{sen}\alpha_T}{\gamma\left(1 + v\cos\alpha_T/c\right)} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{sen}\alpha_S = \frac{\mathrm{sen}\alpha_T}{\gamma\left(1 + v\cos\alpha_T/c\right)}}$$

$$c_S^y = c\cos\alpha_S = \frac{c\cos\alpha_T + v}{1 + v\cos\alpha_T/c} \Longrightarrow \boxed{\cos\alpha_S = \frac{\cos\alpha_T + v}{1 + v\cos\alpha_T/c}}$$

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

Utilizando as duas equações anteriores encontramos que o ângulo α_S, entre o feixe de luz e o eixo y, no referencial do solo, fica:

$$\boxed{\alpha_S = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha_T}{\gamma\,(\cos\alpha_T + v/c)}\right]}$$

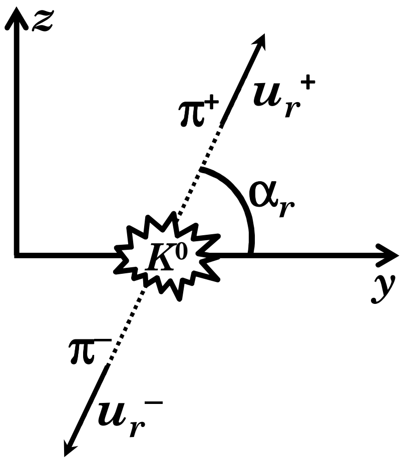
Nos casos particulares em que o feixe de luz é paralelo ou antiparalelo à velocidade do trem, temos que $\alpha_T = 0$ e $\alpha_T = \pi$ e os vetores velocidade da luz são dados, respectivamente, por $c_T = c_S = (0,c,0)$ e $c_T = c_S = (0,-c,0)$. Por outro lado, se o laser é orientado perpendicularmente ao eixo do trem, teremos $\alpha_T = \pi/2$ e, portanto, os dois vetores são diferentes, apesar de terem módulos iguais: $c_T = (c,0,0)$ e $c_S = (c/\gamma,v,0)$.

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

4) O decaimento do K^0: Na física das partículas elementares, são comuns os processos em que uma partícula pode decair em outras. Um desses processos envolve o méson K^0, sem carga elétrica, que pode decair em dois mésons pi, com massas iguais, cargas elétricas positiva e negativa, e denotados por π^+ e π^-, respectivamente. Esses mésons são chamados de kaons e píons, por simplicidade, e o decaimento é representado simbolicamente por $K^0 \to \pi^+\pi^-$. No sistema de referência S_r, em que o kaon está em repouso, a conservação da quantidade de movimento obriga que as velocidades dos dois píons tenham módulos e direções iguais e sentidos opostos. Neste sistema, o módulo das velocidades pode ser determinado a partir dos dados experimentais como sendo $u_r = 0{,}83c$. Vamos supor que as trajetórias dos píons estejam contidas no plano yz e que o ângulo entre a velocidade do π^+ e o eixo y seja α_r, como mostra a figura. Assim, as velocidades dos píons, nesse referencial, são

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u}_r^{\,+} &= (0, u_r \cos\alpha_r, u_r \,\mathrm{sen}\alpha_r) \\ \vec{u}_r^{\,-} &= (0, -u_r \cos\alpha_r, -u_r \,\mathrm{sen}\alpha_r) \end{aligned}}$$



Em geral, os kaons não estão em repouso no sistema do laboratório (S_ℓ). Por isso, neste exemplo, desejamos determinar as velocidades dos píons em um sistema onde o kaon tem velocidade v paralela à direção y. Assim, v é a velocidade relativa entre os sistemas S_r e S_ℓ.

Transformações de Lorentz

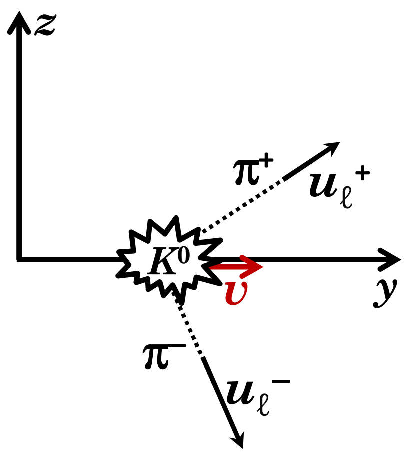
Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

Podemos, então, escrever as velocidades dos píons no sistema do laboratório através das relações:

$$u^+_{\ell_x} = 0 \qquad u^+_{\ell_y} = \frac{u_r \cos\alpha_r + v}{1 + v\, u_r \cos\alpha_r / c^2} \qquad u^+_{\ell_z} = \frac{u_r \operatorname{sen}\alpha_r}{\gamma\,(1 + v\, u_r \cos\alpha_r / c^2)}$$

$$u^-_{\ell_x} = 0 \qquad u^-_{\ell_y} = \frac{-\,u_r \cos\alpha_r + v}{1 - v\, u_r \cos\alpha_r / c^2} \qquad u^-_{\ell_z} = \frac{-\,u_r \operatorname{sen}\alpha_r}{\gamma\,(1 - v\, u_r \cos\alpha_r / c^2)}$$

Estes resultados determinam $\boldsymbol{u}_\ell^{+}$ e $\boldsymbol{u}_\ell^{-}$, em função dos dados u_r e α_r, e indicam que, em geral, os dois píons terão velocidades diferentes em módulo e orientação no referencial do laboratório, como mostra a figura abaixo. Para termos uma imagem mais concreta desses resultados, vamos considerar a situação particular onde $\alpha_r = 0$, que corresponde a



$$\vec{u}_\ell^{\,+} = \left(0,\ \frac{u_r + v}{1 + u_r v / c^2},\ 0\right)$$

$$\vec{u}_\ell^{\,-} = \left(0,\ \frac{u_r - v}{1 - u_r v / c^2},\ 0\right)$$

Utilizando $u_r = 0{,}83c$ e supondo $v = 0{,}5c$, temos:

$$\vec{u}_\ell^{\,+} = (0; 0,94c; 0) \qquad e \qquad \vec{u}_\ell^{\,-} = (0; 0,56c; 0)$$

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

Por outro lado, se $\alpha_r = \pi/2$, obtemos:

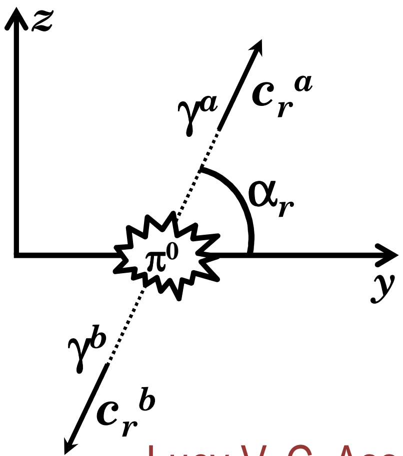
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u}_\ell^{\,+} &= (0, v, u_r/\gamma) \\ \vec{u}_\ell^{\,-} &= (0, v, -u_r/\gamma) \end{aligned}}$$

onde, utilizando $u_r = 0{,}83c$ e supondo $v = 0{,}5c$, temos:

$$\boxed{\vec{u}_\ell^{\,+} = (0; 0,5c; 0,72c) \quad e \quad \vec{u}_\ell^{\,-} = (0; 0,5c; -0,72c)}$$

5) O decaimento do π^0: Um méson pi, neutro, representado por π^0, pode decair em dois fótons, num processo representado por $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Quando π^0, que se move com velocidade v, paralela ao eixo y, em relação ao sistema do laboratório S_ℓ, decai, qual o intervalo de ângulos possíveis entre as direções dos dois fótons? Para resolver este problema, é conveniente raciocinar, inicialmente, no referencial S_r, onde o π^0 está em repouso. Neste referencial, a quantidade de movimento do píon é nula e os fótons devem ter velocidades opostas, como no exemplo anterior. Assim, temos que

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{c}_r^{\,a} &= (0, c\cos\alpha_r, c\,\mathrm{sen}\alpha_r) \\ \vec{c}_r^{\,b} &= (0, -c\cos\alpha_r, -c\,\mathrm{sen}\alpha_r) \end{aligned}}$$



Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz

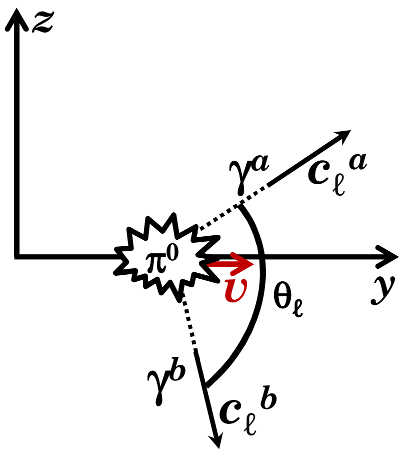
Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

Assim, usando as TL para as velocidades, podemos obter os vetores velocidade dos fótons no sistema do laboratório:

$$\vec{c}_\ell^{\,a} = \left(0,\ \frac{c\cos\alpha_{\mathrm{r}} + v}{1 + v\cos\alpha_{\mathrm{r}}/c},\ \frac{c\,\mathrm{sen}\alpha_{\mathrm{r}}}{\gamma\,(1 + v\cos\alpha_{\mathrm{r}}/c)}\right)$$

$$\vec{c}_\ell^{\,b} = \left(0,\ \frac{-c\cos\alpha_{\mathrm{r}} + v}{1 - v\cos\alpha_{\mathrm{r}}/c},\ \frac{-c\,\mathrm{sen}\alpha_{\mathrm{r}}}{\gamma\,(1 - v\cos\alpha_{\mathrm{r}}/c)}\right)$$

O ângulo θ_ℓ entre os dois fótons, no laboratório, é obtido pelo produto escalar desses vetores:



$$\vec{c}_\ell^{\,a}\cdot\vec{c}_\ell^{\,b} = c^2\cos\theta_\ell \implies \cos\theta_\ell = \frac{-1 + v^2/c^2}{1 - v^2\cos^2\alpha_r/c^2}$$

Como $0 \leq \cos^2\alpha_r \leq 1$, então $-1 \leq \cos\theta_\ell \leq -(1-v^2/c^2)$. Os ângulos possíveis, no sistema do laboratório S_ℓ, estão contidos no intervalo $\pi \leq \theta_\ell \leq \theta_\ell{}^{\text{mín}}$, onde $\theta_\ell{}^{\text{mín}} = \arccos[-1+v^2/c^2]$. Assim, $\theta_\ell{}^{\text{mín}} > \pi/2$, já que o seu cosseno é negativo. Entretanto, quando a velocidade do π^0 é muito alta, ligeiramente inferior a c, $\theta_\ell{}^{\text{mín}} \rightarrow \pi/2$.

Relatividade: O Efeito Doppler da Luz

Um efeito bastante importante da dilatação do tempo é um deslocamento no valor da frequência da onda luminosa emitida por átomos em repouso em relação àquela emitida por átomos em movimento. Este fenômeno, conhecido como efeito Doppler, foi introduzido quando estudamos ondas sonoras, onde o movimento da fonte em relação ao meio de propagação da onda pode ser distinguido do movimento do observador com respeito ao meio. No entanto, no caso da luz, como ela não necessita de um meio para se propagar e em qualquer referencial sua velocidade é c, não podemos distinguir se o movimento é da fonte ou do observador. Assim, se a velocidade relativa entre a fonte de luz e o observador é v, a frequência medida pelo observador é:

$$\boxed{\nu_{\text{observador}} = \frac{\sqrt{1 \pm v/c}}{\sqrt{1 \mp v/c}}\,\nu_{\text{fonte}}}$$

sinais superiores: aproximação $\Rightarrow \nu_{\text{observador}} > \nu_{\text{fonte}}$

sinais inferiores: afastamento $\Rightarrow \nu_{\text{observador}} < \nu_{\text{fonte}}$

frequência da fonte no referencial em repouso

O mais espetacular uso do efeito Doppler relativístico é a medida nos deslocamentos da frequência da luz emitida por objetos astronômicos, tais como uma galáxia. Linhas espectrais encontradas na região extrema do ultra-violeta para galáxias em repouso em relação à Terra são deslocadas $\approx$ 100 nm para a região do vermelho (red shift) para galáxias distantes, mostrando que elas estão se afastando da Terra. Hubble fez inúmeras medidas deste red shift para confirmar que a maioria das galáxias estão se afastando, indicando que o Universo está se expandindo.

Lucy V. C. Assali

Dinâmica: Momento Linear

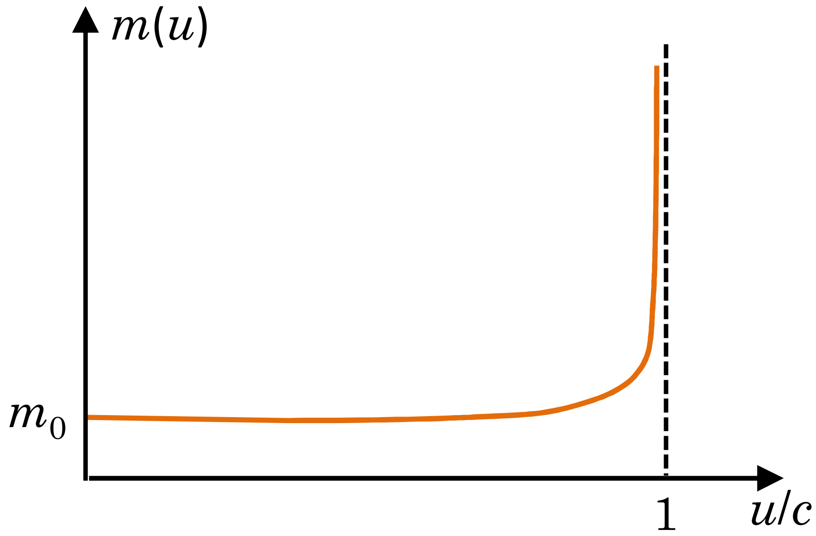
Para que a Lei de Conservação do Momento Linear possa ser mantida na Teoria da Relatividade, devemos modificar o conceito clássico de **massa**. A massa de um objeto é dependente de sua velocidade $\boldsymbol{u}$, ou seja, m=$m(u)$, de modo que

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}$$

$m_0 \Longrightarrow$ massa clássica (repouso)

$m \Longrightarrow$ massa relativística

Quando $u/c \rightarrow 0$ temos que $m \rightarrow m_0$:



Dinâmica: Momento Linear

A expressão para o momento linear, na relatividade, é:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\,\vec{u}}$$

$$\left.\begin{aligned} p_x &= mu_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,u_x \\ p_x &= mu_y = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,u_y \\ p_x &= mu_z = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,u_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

A massa de repouso de um elétron é $9{,}11$ x 10^{-31} kg. Se sua velocidade é $0{,}75c$, encontre seu momento linear e compare com o valor clássico.

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\,u = \frac{(9,11 \times 10^{-31})(0,75 \times 3,0 \times 10^{8})}{\sqrt{1 - (0,75)^2}} = \boxed{3,1 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m/s}}$$

$$p = m_0\,u = (9,11 \times 10^{-31})(0,75 \times 3,0 \times 10^{8}) = 2,0 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m/s}$$

50% maior que
o clássico

Dinâmica: Força e Energia Cinética

A Segunda lei de Newton deve, agora, ser generalizada para

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\,\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right]$$

Com isso, podemos calcular a energia cinética de uma partícula, pois sabemos que ela é igual ao trabalho realizado por uma força ao aumentar a velocidade da partícula de zero para um valor u. Vamos nos limitar ao movimento da partícula a uma dimensão (x) e temos, na relatividade:

$$E_c = \int_{u=0}^{u=u} F\,dx = \int \frac{d}{dt}(m\,u)dx = \int d(m\,u)\frac{dx}{dt} =$$

$$= \int (m\,du + u\,dm)u = \int_{u=0}^{u=u} \boxed{(m\,u\,du + u^2 dm)}$$

m e u são variáveis

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{m^2\,c^2 - m^2\,u^2 = m_0^2\,c^2}$$

vamos diferenciar esta equação

Dinâmica: Força e Energia Cinética

$$2m\,c^2\,dm - m^2\,2u\,du - u^2\,2m\,dm = 0 \Longrightarrow \boxed{mu\,du + u^2\,dm = c^2\,dm}$$

$$E_c = \int_{u=0}^{u=u} (m\,u\,du + u^2 dm) = \int_{m=m_0}^{m=m} c^2\,dm = mc^2 - m_0c^2$$

$$\boxed{E_c = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1 \right]}$$

Tomando $E = mc^2$, chamada de energia total da partícula, podemos escrever

$$E = \underline{m_0c^2} + E_c$$

energia de repouso da partícula

Note que quando $u/c \rightarrow 1$ a energia cinética da partícula tende ao infinito, significando que é necessário realizar uma quantidade infinita de trabalho, sobre a partícula, para que ela alcance a velocidade da luz (velocidade limite). Podemos, também, escrever que

$$E_c = (m - m_0)c^2$$

mostrando que a variação da energia cinética da partícula está relacionada com a variação de sua massa (inercial).

Dinâmica: Energia e momento

A relação entre E e p pode ser derivada a partir da expressão do momento:

$$p^2 = \frac{m_0^2\, u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \Longrightarrow \frac{p^2}{c^2} = \frac{m_0^2\left(\frac{u^2}{c^2}\right)}{1-\frac{u^2}{c^2}} \Longrightarrow \frac{p^2}{c^2} = \frac{m_0^2\left(\frac{u^2}{c^2}+1-1\right)}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{p^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{m_0^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{1-\frac{u^2}{c^2}} \Longrightarrow \frac{p^2}{c^2} = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - m_0^2$$

$$\boxed{E = m\,c^2 = \left[\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right] c^2 \Rightarrow \frac{E^2}{c^4} = \frac{m_o^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$(E_c + m_0c^2)^2 - (m_0c^2)^2 = E_c^2 + 2E_c m_0 c^2$$

$$(\text{Energia de repouso})^2$$

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -\,m_0^2\,c^2 \Longrightarrow \boxed{E^2 = p^2\,c^2 + m_0^2\,c^4}$$

Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita

Exemplos:

1) Um evento ocorre no sistema de referência S em $x = 40{,}0\ \mathrm{m}$, $y = z = 0$, no intervalo de tempo $t = 10^{-8}$ s. O sistema de referência S' se descola com velocidade $v = 0{,}8c$ em relação a S, na direção x. Ache as coordenadas espaço-tempo, do evento, em S', sabendo que os dois referenciais têm eixos paralelos entre si.

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}} = \frac{5}{3}$$

$$y' = y \text{ e } z' = z$$

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{5}{3}\left(40,0 - 0,8c \times 10^{-8}\right) = \frac{5}{3}(40,0 - 2,4) \cong 62,7\ \text{ m}$$

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = \frac{5}{3}\left[10^{-8} - \left(\frac{0,8}{3 \times 10^8}\right)40,0\right] = -1,61 \times 10^{-8}\ \text{ s}$$

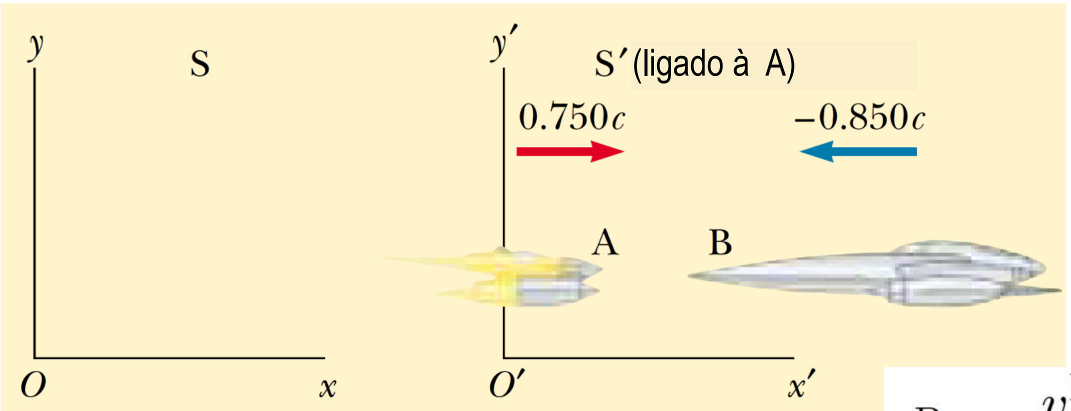
Relatividade Restrita

2) O período de um pêndulo é medido ser 3,0 s no referencial do pêndulo. Qual é o período quando medido por um observador que se move com velocidade 0,95c em relação ao pêndulo? Vamos assumir que quem está em movimento é o pêndulo:

$$\Delta\tau_p = 3,0\,\mathrm{s} \Rightarrow \Delta t = \gamma\,\Delta\tau_p = \frac{1}{\sqrt{1-(0,95)^2}}\,3,0 = 9,6\,\mathrm{s}$$

Um pêndulo em movimento demora mais para completar o período do que um em repouso.

3) Duas espaçonaves A e B, observadas da Terra, se movem em sentidos opostos, onde a velocidade da nave A é 0,75c e da B é 0,85c. Qual a velocidade da nave B quando observada pelos tripulantes da nave A?



Vamos fixar a nave A no referencial S′, cuja velocidade v, em relação à S (Terra) é 0,75c. Assim, a velocidade de B em relação à A fica:

$$v_{S'}^{B} = \frac{v_S^B - v}{1-\frac{v_S^B v}{c^2}} = \frac{-0,85c - 0,75c}{1-\frac{(-0,85c)(0,75c)}{c^2}} = -0,98c$$