Mecânica Clássica 2 (Semestre 2 de 2017): Lista 1

Os problemas a seguir se referem ao problema de dois corpos interagentes, livres de forças externas ao sistema.

1. Considere o problema de dois corpos que interagem entre si, sem a presença de forças externas. Construa a Lagrangeana do sistema e mostre que o momento total é conservado. **Resp:** $L = (M\dot{\mathbf{R}}^2)/2 + (M\mu\dot{\mathbf{r}}^2)/2 + V(r)$.

2. No problema de dois corpos com força central, mostre que o momento angular do sistema é conservado.

3. Mostre no problema de dois corpos a energia mecânica do sistema é conservada.

4. Mostre que a equação geral da órbita é

$$\frac{l^2 u^2}{\mu}(\ddot{u} + u) = f(u) \tag{1}$$

   onde $u = 1/r$.

5. Se a força de interação é $f = k/r^2$, mostre que a órbita é uma cônica. Determine o tipo de curva que o corpo descreve em função da energia total do sistema.

6. No caso em que a energia é negativa, mostre que $T^2 = (4\pi^2 a^3)/k$, onde T é o período da órbita e a o semi-eixo maior da elípse.

7. Considere uma força $f = br^{n+1}$. Mostre que que só existem órbitas estáveis, isto é, em que os corpos permanecem a distâncias finitas ao longo do tempo, se $n > -3$.

8. Deseja-se colocar em órbita circular em torno da Terra um satélite artificial de massa $m << M$, onde M é a massa da Terra.

   a) A partir do potencial efetivo, determine a condição necessária para a órbita circular e o raio dessa órbita. **Resp:** $E = -(\mu k^2)/(2l^2)$.

   b) Com o resultado anterior, mostre que a equação da órbita realmente se reduz à equação do círculo.

   Para colocar o satélite em órbita, uma vez atingida a posição da órbita deve-se imprimir uma velocidade inicial perpendicular ao vetor posição do satélite, chamada velocidade de inserção.

   c) Determine a velocidade de inserção em função do raio da órbita. **Resp:**$v_o^2 = k/(\mu r_o)$.

   d) A partir do resultado anterior, determine o período de rotação do satélite. Compare com a Terceira Lei de Kepler.

e) Um satélite é chamado geosíncrono se o seu período de rotação é de um dia. Determine o raio correspondente à órbita geosícrona. **Resp:**$r_s = (kT^2)/(4\pi^2\mu)$.

f) Em que condição um satélite é geoestacionário? **Resp:** Deve ser geosíncrono e estar sobre o equador, movendo-se no mesmo sentido de rotação da Terra.

9. Mostre que a equação diferencial que descreve o movimento de uma partícula sujeita a uma força central, $f(r)$, pode ser expressa na forma

$$\frac{\mu(r^2\dot{\theta})^2}{2r^4}\left[\dot{r}^2 + r^2\right] - \int f(r)dr = E\,. \tag{2}$$

10. Um satélite tem como maior e menor velocidade orbitais, respectivamente, v_+ e v_-. Sendo T o período de rotação do satélite em torno da Terra, mostre que o semi-eixo maior da elípse que representa a trajetória do satélite é $a = (T/2\pi)\sqrt{v_+v_-}$.

11. Um satélite descreve uma órbita dada por $r^n = acos(n\theta)$. Determine a força de interação entre os dois corpos.**Resp:**$f(r) \propto r^{-(2n+3)}$.

12. Segundo a teoria da força nuclear de Yukawa, a força atrativa entre dois nucleons no interior do núcleo é dada pelo potencial

$$V(r) = k\frac{e^{-\alpha r}}{r}\,. \tag{3}$$

a) Encontre a lei da força nuclear.

b) Calcule aenergia total, E, e o momento angular L, se a partícula se move numa trajetória circular de raio r_o.

c) Determine o período de rotação.

13. Um corpo de massa m está ligado a uma mola de constante elástica k e massa desprezível (sistema massa-mola). O sistema é fixado numa parede vertical e pode se mover sobre uma superfície lisa.

a) Determine a Lagrangeana e as equações de Lagrange.

b) Ache a solução geral da equação diferencial.

14. No problema massa-mola anterior, considere agora que há uma força de atrito viscoso, $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = -b\mathbf{v}$ que atua sobre a massa m. Encontre a solução geral e estude os 3 regimes de movimento.

15. No problema anterior, considere agora que uma força externa dada por $F(x) = cos(\omega t)$ é aplicada sobre a massa m. Encontre uma solução específica. Qual a solução geral do problema? Estude o que acontece quando se varia a frequencia ω da força externa.

16. Dois sistemas massa-mola de massa m e constante elástica k são colocados numa superfície horizontal lisa, com um deles preso a uma parede à esquerda e o outro preso à parede do lado direito, de modo que os sistemas seja colineares. Então os dois sistemas são ligados por uma terceira mola de constante elástica k'. Os corpos podem oscilar na direção colinear livremente em torno do ponto de equilíbrio.

    a) Escreva a Lagrangeana do sistema.

    b) Obtenha as equações de Lagrange.

    c) Encontre os modos normais de oscilação.

    d) Determine a solução geral.

    e) Quais as equações de movimento de um sistema em que os dois corpos parte da posição de equilíbrio com velocidades iguais opostas, inicialmente afastando-se um do outro?

17. Considere o caso em que a energia potencial de um sistema qualquer é dependente das coordenadas generalizadas de modo que quando se muda a escala de distâncias de modo que $q \to \alpha q$ então $V(q) \to V(\alpha q) = \alpha^\nu V(q)$.

    a) Como deve se transformar a variável temporal a fim de que a Lafrangeana do sistema não se altere? **Resp:** $t \propto l^{(2-\nu)/2}$.

    b) Usando esse resultado, mostre que se V é o potencial gravitacional, a Terceira Lei de Kepler é obtida.

    c) Se o sistema considerado é um pêndulo, mostre que se obtem a lei do pêndulo para pequenas oscilações.

18. Considerando que o tempo é homogêneo, isto é, a escolha da origem do tempo não interfere sobre os sistemas físicos, mostre que esta simetria leva à conservação da energia mecânica do sistema.

19. Mostre como muda a Lagrangeana de um sistema quando se faz uma transformação de Galileu. Mostre que as equações de Lagrange que descrevem a evolução do sistema não se alteram com essa transformação.

20. (Teorema de Noether) Considere uma transformação de coordenadas do tipo $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \epsilon(\mathbf{r}, t)$. Suponha que o sistema é invariante para essa transformação. Mostre que há uma grandeza fśicia que é conservada e deermine essa grandeza.