PSI-2432: Projeto e Implementação de Filtros Digitais
2ª Prova

21 de maio de 2015

Nome: ...Gabarito...

Nº USP: ...

Turma: ...

Duração da prova: 100 minutos
Tipo desta prova: com consulta ao material próprio, limitado a uma folha A4.

Notas:

1ª **Q:** ...

Total: ...

1. (10, 0) Projete um filtro FIR passa-baixas com as seguintes características:

- Limite superior da faixa de passagem: $\omega_p = 0,4\pi$ rad/amostra,
- Limite inferior da faixa de rejeição: $\omega_r = 0,6\pi$ rad/amostra,
- Ordem: 3.

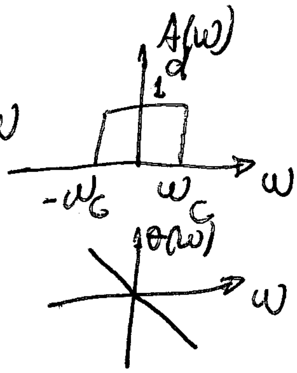
Pedem-se os itens abaixo.

a) (1,0) Determine a resposta ao impulso do filtro ideal para este caso.

b) (1,2) Estime a ondulação máxima que o projeto com a janela de Kaiser pode fornecer.

c) (1,2) Calcule a resposta ao impulso do filtro projetado com janela de Kaiser neste caso.

a) $$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega M} e^{j\omega n}\, d\omega$$



$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_r}{2} \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{2}$$

$$M = \frac{N}{2} = \frac{L-1}{2} \rightarrow M = 3/2$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-j\omega(n-1)}\, d\omega$$

ou

$$h_d(n) = \frac{\sin\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)} \quad \text{ou} \quad h_d(n) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}\right]$$

b) $$N = \frac{A-8}{2,285\,\Delta\omega}$$

em

$$\Delta\omega = \omega_r - \omega_p \rightarrow \Delta\omega = 0,2\pi$$

donde

$$A = 2,285 \times N \times \Delta\omega + 8$$
$$= 2,285 \times 3 \times 0,2\pi + 8 \rightarrow A = 12,3071\text{ dB} \rightarrow \boxed{\delta = 0,2425}$$

Com $A < 21$ dB $\rightarrow \beta = 0$ (janela retangular) que fornece $A = 21$ dB $\rightarrow \boxed{\delta = 0,0891}$

c) Assim
$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$h(0) = \frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{-\frac{3\pi}{2}} \rightarrow \boxed{h(0) = 0,1501 = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}} \qquad \boxed{h(3) = h(0)}$$

$$h(1) = \frac{\sin\left(-\pi/4\right)}{-\pi/2} \rightarrow \boxed{h(1) = 0,4502 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}} \qquad \boxed{h(2) = h(1)}$$

d) (1,0) Estime a ondulação máxima que o projeto de Chebyshev pode fornecer.

e) (1,2) Identifique o fator funcional $Q(\omega)$ e o atraso de grupo auxiliar $\tilde{M}$ para recair na forma da função de amplitude do tipo I. Determine o número de frequências extremantes necessário pelo Teorema da Alternância. Faça sua escolha inicial de frequências extremantes.

Obs.: Leve em conta o tipo do filtro.

d) $N = \dfrac{A - 13}{2{,}324\,\Delta\omega}$, $A = -20\log_{10}\delta$ com $\delta = \delta_p = \delta_r$

$A = N \times 2{,}324 \times \Delta\omega + 13 \longrightarrow \boxed{A = 17{,}3806\ dB}$

$\delta = 10^{-A/20} \longrightarrow \boxed{\delta = 0{,}1352}$

e) Tipo II porque N é ímpar (L é par) e a fase é linear:

$Q(\omega) = \cos\dfrac{\omega}{2}$

$\tilde{M} = M - \dfrac{1}{2} \longrightarrow \tilde{M} = 1$

Pelo Teorema da Alternância, o número mínimo de extremantes é

$\tilde{M} + 2 = 3$

As bordas ω_p e ω_r são sempre extremantes. Completamos o conjunto com $\omega_1 = 0$. Assim, as extremantes escolhidas são

$\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0{,}4\pi$, $\omega_3 = 0{,}6\pi$

f) (1,0) Monte o sistema de equações do erro de amplitude para as condições dadas.

g) (1,2) Resolva o sistema de equações de erro, obtendo a função de amplitude auxiliar $\tilde{A}(\omega)$ e o desvio máximo em primeira aproximação (única iteração). Como o desvio máximo se compara com sua estimativa?

f) $E(\omega) = A_d(\omega) - Q(\omega)\tilde{A}(\omega)$

$$\frac{E(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{A_d(\omega)}{Q(\omega)} - \tilde{A}(\omega)$$

ou

$$\tilde{A}(\omega) + \frac{E(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{A_d(\omega)}{Q(\omega)}$$

com

$$\tilde{A}(\omega) = \tilde{a}(0) + \tilde{a}(1)\cos\omega$$

$$E(\omega_k) = (-1)^k\delta, \quad k = 0, 1, \ldots, M+1 \quad [k = 0, 1, 2]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_1 & \frac{1}{\cos\frac{\omega_1}{2}} \\ 1 & \cos\omega_2 & \frac{-1}{\cos\frac{\omega_2}{2}} \\ 1 & \cos\omega_3 & \frac{1}{\cos\omega_3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}(0) \\ \tilde{a}(1) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\cos\frac{\omega_1}{2} \\ 1/\cos\frac{\omega_2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

g)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}3090 & -1{,}2361 \\ 1 & -0{,}3090 & 1{,}7013 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}(0) \\ \tilde{a}(1) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}2361 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0{,}3090 \times 1{,}7013 - 0{,}3090 \times 1{,}2361 - (1{,}7013 + 0{,}3090) - (1{,}2361 + 0{,}3090)$$

$$\det(A) = -3{,}4117$$

$$\tilde{a}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1{,}2361 & 0{,}3090 & -1{,}2361 \\ 0 & -0{,}3090 & 1{,}7013 \end{vmatrix} \Big/ \det(A) = \cancel{0{,}3090(1{,}7013 - 1{,}2361) - 1{,}2361(}$$

$$\tilde{a}(0) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1{,}2361 & 0{,}3090 & -1{,}2361 \\ 0 & -0{,}3090 & -1{,}7013 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$= \frac{0{,}3090(1{,}7013 - 1{,}2361) - 1{,}2361(1{,}7013 + 0{,}3090)}{\det(A)}$$

$$= \frac{-2{,}3412}{-3{,}4117} \longrightarrow \boxed{\tilde{a}(0) = 0{,}6862}$$

$$\tilde{a}(1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1{,}2361 & -1{,}2361 \\ 1 & 0 & 1{,}7013 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$= \frac{-1{,}2361 \times 2 + 1{,}7013 \times 0{,}2361}{-3{,}4117}$$

$$= \frac{-2{,}0705}{-3{,}4117} \longrightarrow \boxed{\tilde{a}(1) = 0{,}6069}$$

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}3090 & 1{,}2361 \\ 1 & -0{,}3090 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$= \frac{1{,}2361 - 0{,}3090 + 0{,}3090 \times 0{,}2361}{-3{,}4117} \longrightarrow \boxed{\delta = -0{,}2931}$$

$$= \frac{1{,}0001}{-3{,}4117}$$

h) (1,2) Obtenha a função de amplitude $A(\omega)$ e a resposta ao impulso projetada.

i) (1,0) Calcule o excesso de erro quadrático além do erro quadrático mínimo para suas soluções por janela de Kaiser e pelo critério de Chebyshev.

h) $b(1) = 2\tilde{a}(0) \longrightarrow \boxed{b(1) = 1{,}3725}$

$b(2) = b\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\tilde{a}\left(n-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\tilde{a}(1) \longrightarrow \boxed{b(2) = 0{,}3034}$

Assim temos

$$\boxed{A(\omega) = 1{,}3725 \cos\frac{\omega}{2} + 0{,}3034 \cos\frac{3\omega}{2}}$$

Como $A(\omega) = 2h(1)\cos\frac{\omega}{2} + 2h(0)\cos\frac{3\omega}{2}$,

$h(0) = \frac{b(2)}{2} \longrightarrow \boxed{h(0) = 0{,}1517}$

$h(1) = \frac{b(1)}{2} \longrightarrow \boxed{h(1) = 0{,}6862}$

i) Excesso de erro quadrático

Janela de Kaiser: $\boxed{\mathcal{E}_{2exk} = 0}$

Filtro de Chebyshev:

$\mathcal{E}_{2excheb} = 2\left[(0{,}1517 - 0{,}1501)^2 + (0{,}6862 - 0{,}4502)^2\right]$

ou

$\boxed{\mathcal{E}_{2excheb} = 0{,}1114}$