

Eletromagnetismo II

Prof. Luís R. W. Abramo - 1º Semestre 2015

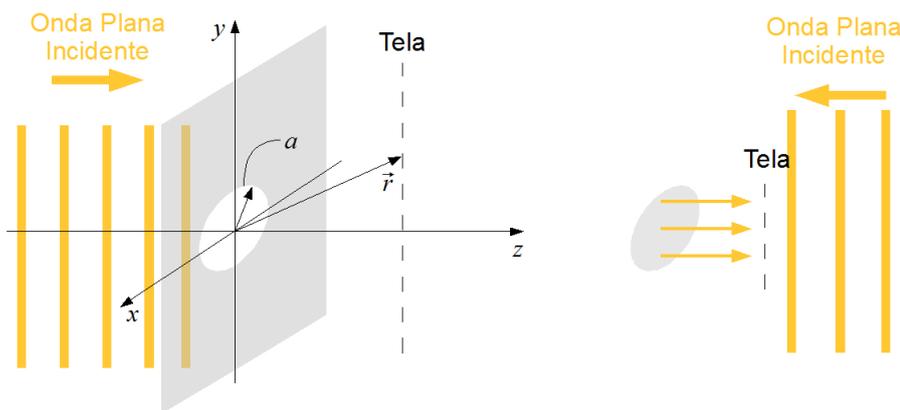
Preparo: Diego Oliveira

Aula 27

Exemplo: Abertura Circular

Vamos supor uma onda monocromática incidindo normalmente em um anteparo plano e infinito com uma abertura circular de raio a . Também vamos assumir que o padrão de difração é observado em uma tela muito distante do orifício. Pelo que foi visto neste curso, já sabemos que na tela de observação algum padrão de difração característico deve ser observado. Mais ainda, a descrição do que é observado na tela se dá pela integral de Kirchhoff-Helmholtz.

Coincidentemente, as condições impostas à ψ na situação descrita acima são muito semelhantes àsquelas que a função de onda deve satisfazer na operação de telescópios¹. A principal diferença está na configuração do aparato, ao invés de atravessar a abertura circular, a luz é refletida por um espelho circular; porém, para ψ , e para nós, o que importa **são** as condições impostas, não **a forma** que são impostas. Neste caso, tais condições são muito semelhantes em ambos problemas. (A figura abaixo esboça as duas situações).



¹O funcionamento de microscópios óticos se dá de maneira parecida.

Desta forma, podemos utilizar todo o ferramental que já conhecemos para calcular a função de onda ψ de um telescópio e determinar qual deve ser seu padrão de difração. Se ainda tomarmos as precauções de assumir uma tela pequena o suficiente para não criar um ponto cego, o espelho circular de raio a e plano e uma onda plana incidindo normalmente no espelho, as condições que perfazem ψ serão as mesmas em ambos os casos.

Para começar o tratamento do problema, tomemos a integral de difração:

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{ik\psi_0 e^{i\phi}}{2\pi r} \int_{S_0} dS' e^{-ik[(x'-x)^2+(y'-y)^2]/2r}$$

onde ϕ é uma fase multiplicativa não importante. No limite de Fraunhofer, temos:

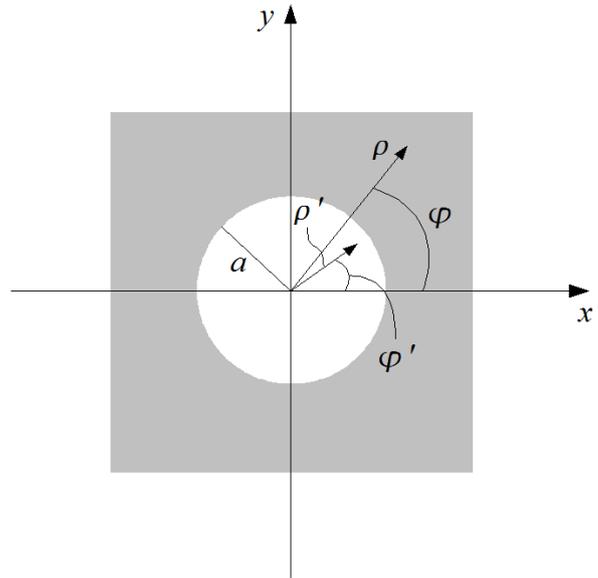
$$\left\langle \frac{(x'^2 + y'^2)}{r} \right\rangle_{S_0} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \psi(\vec{r}) \approx -\frac{ik\psi_0 e^{i\phi}}{2\pi r} \int_{S_0} dS' e^{-ik/r(xx'+yy')}.$$

Vale a pena mencionar que para a maioria dos instrumentos ópticos, as correções do limite de Fresnel são desprezíveis.

No plano do anteparo, podemos definir as coordenadas polares ρ' , φ' , ρ e φ para os pontos na abertura e no anteparo, veja a figura ao lado. Assim:

$$xx' + yy' = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho}' = \rho\rho' \cos(\varphi - \varphi');$$

$$dS' = \rho' \rho' \varphi'.$$



Substituindo na integral, encontramos:

$$\psi(\vec{r}) \approx -\frac{ik\psi_0 e^{i\phi}}{2\pi r} \int_0^a d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-i\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')/r}$$

Usando o fato que a resposta não deve depender de ϕ por simetria e a seguinte relação:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' e^{iu \cos\varphi'} e^{in\varphi'} \frac{i^{-n}}{2\pi} \xrightarrow{n=0} J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{iu \cos\varphi'},$$

a integral fica:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &\approx -\frac{ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{i\phi}}{r} \int_0^a d\rho' \rho' J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{r}\right) 2\pi \\ &\approx -ik\psi_0 \frac{e^{i\phi}}{r} \left(\frac{r}{k\rho}\right)^2 \int_0^{ka\rho/r} du u J_0(u)\end{aligned}$$

onde tomamos a mudança de variáveis: $u = k\rho\rho'/r$.

Agora, dada a relação de recorrência:

$$\frac{dJ_n(u)}{du} = \frac{n}{u} J_n(u) - J_{n+1}(u)$$

e que:

$$J_{-1}(u) = -J_1(u),$$

se multiplicarmos a relação de recorrência por u e integramos por partes, encontraremos:

$$J_1(u) + uJ_1'(u) = (uJ_1(u))' = uJ_0(u)$$

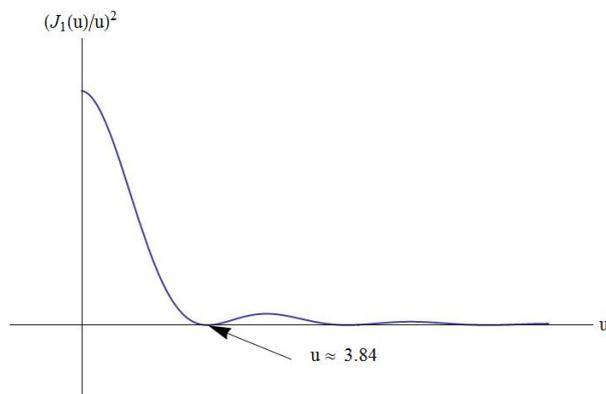
onde “ ’ ” indica derivada com relação à u .

Daí, é fácil resolver a integral para encontrar:

$$\psi(\vec{r}) \approx -i\psi_0 e^{i\phi} \frac{ka}{r} \frac{J_1\left(\frac{k\rho a}{r}\right)}{\frac{ka\rho}{r}},$$

e, conseqüentemente, a intensidade projetada na tela:

$$I = \psi_0^2 \left(\frac{ka}{r}\right)^2 \left(\frac{J_1\left(\frac{k\rho a}{r}\right)}{\frac{ka\rho}{r}}\right)^2$$



Note no gráfico ao lado que a intensidade deve se alternar entre picos luminosos e vales de intensidade zero. Contudo, esta alternância não possui periodicidade bem definida, ao contrário, por exemplo, da abertura retangular no limite de Fraunhofer, onde a intensidade é proporcional às funções trigonométricas de periodicidade é bem definida.

Pensando no funcionamento de um telescópio, se a fonte de luz é formada por duas estrelas, devemos observar na tela o padrão de difração sobreposto das intensidades dessas estrelas. Contudo, se as estrelas estão muito próximas, os picos centrais de intensidade devem se confundir, e dado o rápido decaimento dos da intensidade, não será possível distinguir claramente as estrelas. Por conseguinte, podemos nos perguntar, se estas estrelas estão muito próximas, qual deve ser a separação mínima para que seja possível distinguir em nosso telescópio uma da outra?

Para que seja possível distinguir as estrelas, os primeiros (e mais proeminentes) picos de intensidade na tela de observação devem estar separados por um distância maior que o primeiro zero de intensidade. Se analisarmos a expressão que acabamos de encontrar, veremos que o primeiro zero será dado em $\rho(2a)/\lambda r \approx 1.22$ (vide o gráfico). Este critério de discriminação é chamado de *critério de Rayleigh* e determina o limite de resolução do telescópio, ou seja, o quão próximo dois objetos distintos podem estar e ainda ser identificados.

